PREGUNTA 1: ¿Cuánto han de valer *a* y *b* para que la división $(x^4-5x^3+3x^2+ax+b):(x^2-5x+1)$ sea exacta?

PREGUNTA 2: Hallar el resto, sin dividir, de $(6x^2-5x-6):(x-1)$. Justifica tu respuesta.

PREGUNTA 3: Simplifica: a) $\dfrac{x^5-16x}{x^3-7x^2+16x-12}$ b) $\dfrac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$

PREGUNTA 4: Calcula y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{2x+1}{x+1}+\dfrac{3x}{x^2-1}$ b) $\dfrac{3x+3}{12x-12}:\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$ c) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

PREGUNTA 5: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-8x^2-9=0$ b) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{4}$

PREGUNTA 6: Resuelve por el *Método de Gauss* los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. En cada caso, clasifica el sistema según sus soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 5x-4y+3z=9 \\ 2x+y-2z=1 \\ 4x+3y+4z=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=-2 \\ x-2y-z=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 6x+y-2z=7 \end{array}\right\}$

Calificaciones:

	apartado		
PREGUNTA	a)	b)	c)
1	1 pto		
2	1 pto		
3	0,75 ptos	0,5 ptos	
4	0,5 ptos	0,5 ptos	0,5 ptos
5	0,75 ptos	0,75 ptos	0,75 ptos
6	1 pto	1 pto	1 pto

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

1 DIVISIÓN EXACTA $\Rightarrow$ Resto = 0

$$\begin{array}{l|l} x^4-5x^3+3x^2+ax+b & x^2-5x+1 \\ -x^4+5x^3-x^2 & x^2+2 \\ \hline 0+0+2x^2+ax+b & \\ \quad -2x^2+10x-2 & \\ \hline \quad ax+10x+b-2 = \boxed{(a+10)x+b-2=0} & \end{array}$$

Tendrá que suceder que $\begin{cases} a+10=0 \Rightarrow \boxed{a=-10} \\ b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=2} \end{cases}$

2 Teorema del Resto. El valor de $P(x)$ en $x=a$ coincide con el resto de $P(x):(x-a)$; por lo tanto:

$P(1) = 6(1)^2-5(1)-6 = \underline{-5} = \text{RESTO}$

3
a) $x^5-16x = x\underbrace{(x^4-16)}_{\text{diferencia de cuadrados}} = x\underbrace{(x^2+4)}_{\text{irreducible}}\underbrace{(x^2-4)}_{\text{dif. cuadrados}} = x(x+2)(x-2)(x^2+4)$

$x^3-7x^2+16x-12 = (x-2)^2\cdot(x-3)$

	1	-7	16	-12
2		2	-10	12
	1	-5	6	0
2		2	-6	
	1	-3	0	

Por lo tanto:

$$\frac{x^5-16x}{x^3-7x^2+16x-12} = \frac{x(x+2)\cancel{(x-2)}(x^2+4)}{(x-2)^{\cancel{2}}(x-3)} = \frac{x(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x-3)}$$

b) $$\frac{4x^2+12x+9}{\underbrace{4x^2-9}_{\text{suma por diferencia}}} = \frac{\overbrace{(2x+3)^{\cancel{2}}}^{\text{cuadrado de una suma}}}{\cancel{(2x+3)}(2x-3)} = \frac{2x+3}{2x-3}$$

4
a) $$\frac{2x+1}{x+1}+\frac{3x}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x+1}+\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{(2x+1)(x-1)+3x}{(x+1)(x-1)} =$$

[mcm = $(x+1)(x-1)$]

$$= \frac{2x^2-2x+x-1+3x}{x^2-1} = \frac{2x^2+2x-1}{x^2-1}$$

b) $$\frac{3x+3}{12x-12} : \frac{(x+1)^2}{(x^2-1)} = \frac{\cancel{3}(x+1)}{\cancel{12}_4(x-1)} : \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{4}$$

c) $$\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4} = \frac{x^8-x^4}{x^4(x^2+1)} = \frac{\cancel{x^4}(x^4-1)}{\cancel{x^4}(x^2+1)} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{(x^2+1)}} = x^2-1$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-2 \\ x-2y-z=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}E1\\E2-E1\\E3-2E1\end{array}} \left.\begin{array}{l} x+y+z=-2 \\ -3y-2z=5 \\ -3y-2z=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}E1\\E2\\E3-E2\end{array}} \begin{array}{l} x+y+z=-2 \\ -3y-2z=5 \\ ¿\,0=-9\,? \end{array}$$

INCOMPATIBLE

c)

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 6x+y-2z=7 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 3x-2y+z=1 \\ 6x+y-2z=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}E1\\E2-3E1\\E3-6E1\end{array}} \left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ -5y+4z=-5 \\ \cancel{-5y+4z=-5} \end{array}\right\}$$

Redundante; sobra una

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ -5y+4z=-5 \end{array}\right\}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Parametrizamos : $\boxed{z=t}$

$$\text{(I)}\quad x+y=2+t$$

$$-5y=-5-4t \Rightarrow \boxed{y=\frac{5+4t}{5}=1+\frac{4}{5}t}$$

sustituyendo en (I)

$$x+1+\frac{4}{5}t=2+t \Rightarrow \boxed{x=1+\frac{1}{5}t}$$

Soluciones : $\boxed{(x,y,z)=\left(1+\frac{1}{5}t\,,\ 1+\frac{4}{5}t\,,\ t\right)}$

⑤ a) BICUADRADA

$$x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=z} z^2-8z-9=0 \quad \left.\begin{matrix} a=1 \\ b=-8 \\ c=-9 \end{matrix}\right\} \quad z_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2} \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

$$\xleftarrow{x=\sqrt{z}}$$

$$\left.\begin{matrix} z_1=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \\ z_2=-1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{-1}\notin\mathbb{R} \text{ (no valen)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{SOLUCIONES: } \begin{matrix} x=+3 \\ x=-3 \end{matrix}$$

b) $\left(\sqrt{3x+3}-1\right)^2=\left(\sqrt{8-2x}\right)^2$; $3x+3+1-2\sqrt{3x+3}=8-2x$;

$(5x-4)^2=\left(2\sqrt{3x+3}\right)^2$; $25x^2+16-40x=4(3x+3)$; $\boxed{25x^2-52x+4=0}$

$$\left.\begin{matrix} a=25 \\ b=-52 \\ c=4 \end{matrix}\right\} \quad x_{1,2}=\frac{52\pm\sqrt{(-52)^2-4(25)(4)}}{50}=\frac{52\pm 48}{50} \begin{cases} 2 \\ \frac{4}{50}=\frac{2}{25}=0{,}08 \end{cases}$$

Comprobaciones:
SI $x=2$: $\left.\begin{cases} \sqrt{3\cdot 2+3}-1=\sqrt{9}-1=3-1=2 \\ \sqrt{8-2x}=\sqrt{8-2\cdot 2}=\sqrt{4}=2 \end{cases}\right\}$ $x=2$ VÁLIDO

Si $x=0.08$: $\left.\begin{cases} \sqrt{3\cdot 0{,}08+3}-1=1{,}8 \\ \sqrt{8-2\cdot 0{,}08}=2{,}8 \end{cases}\right\}$ $x=\frac{2}{25}$ NO VÁLIDO

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$; $mcm\{4,x,x^2\}=4x^2$; $\frac{4x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}+\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\frac{\cancel{12}^{3}x^2}{\cancel{4}}$; $4x+4=3x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2-4x-4=0 \quad \left.\begin{matrix} a=3 \\ b=-4 \\ c=-4 \end{matrix}\right\} \quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{4\pm 8}{6} \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

⑥ a)

$$\left.\begin{matrix} 5x-4y+3z=9 \\ 2x+y-2z=1 \\ 4x+3y+4z=1 \end{matrix}\right\}$$

Reordeno ecuaciones e incógnitas

$$\left.\begin{matrix} \boxed{y}+2x-2z=1 \\ -4y+5x+3z=9 \\ 3y+4x+4z=1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\begin{matrix} E1 \\ E2+4E1 \\ E3-3E1 \end{matrix}} \left.\begin{matrix} y+2x-2z=1 \\ 13x-5z=13 \\ -2x+10z=-2 \end{matrix}\right\}$$

De nuevo cambio el orden de las incógnitas (más fácil eliminar z)

$$\left.\begin{matrix} y-2z+2x=1 \\ -5z+13x=13 \\ 10z-2x=-2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} y-2z+2x=1 \\ 10z-2x=-2 \\ -5z+13x=13 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E2+2E3 \end{matrix}}$$

$$\left.\begin{matrix} y-2z+2x=1 \\ 10z-2x=-2 \\ 24x=24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x=1} \rightarrow 10z-2=-2 \Rightarrow 10z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \rightarrow y+2=1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO