

PREGUNTA 1.-

a) Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 8 \\ x + y \geq 5 \\ x - 5y \leq 0 \end{array} \right\}$$

b) Halla las soluciones de la siguiente inecuación y represéntalas en la recta real:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1} < 0$$

PREGUNTA 2.- Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla:

Años	2005	2006	2007
Gasto en publicidad (x 1000€)	1	3	5
Ingresos (x 1000€)	4	26	64

a) ¿Qué tipo de interpolación es más conveniente para reflejar las variaciones en los gastos y los ingresos?

b) Calcula mediante interpolación qué ingresos se esperan con unos gastos en publicidad de 9000€.

c) Si se quieren obtener unos ingresos de 100000€, ¿qué gasto en publicidad hay que realizar?

PREGUNTA 3.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula el dominio de f(x)

b) Calcula f(-4), f(-2), f(0), f(2) y f(3)

PREGUNTA 4.- Halla las asíntotas de la función: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$

PREGUNTA 5.- Calcula los números a y b para que sea continua en toda la recta real la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 2 \\ bx + 1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x - a & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

PREGUNTA 6.- Aplicando la definición de derivada, obtén la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

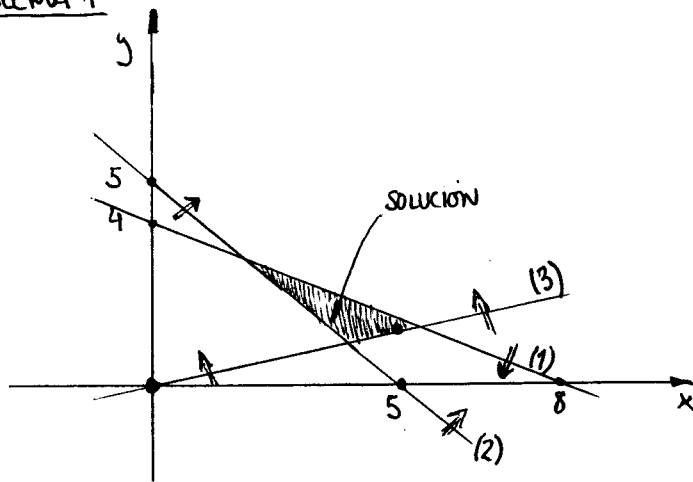
Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	a) 1 punto b) 1,5 puntos
2	1,5 puntos
3	1 punto (0,5 puntos por apartado)
4	2 puntos
5	1,5 puntos
6	1,5 puntos

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

PROBLEMA 1

a)



(1) $x+2y=8$

x	y
0	4
8	0

$O(0,0): 0+2\cdot 0=0 \leq 8 \checkmark$

(2) $x+y=5$

x	y
0	5
5	0

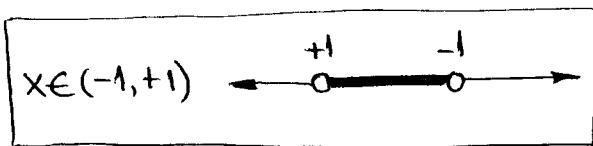
$O(0,0): 0+0=0 > 5$ NO

(3) $x-5y=0$

x	y
0	0
5	1

$P(3,3): 3-5\cdot 3=-12 \leq 0 \checkmark$

b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-1} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)} < 0$



Si $x = \pm 1$ ~~\neq~~ $\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)}$

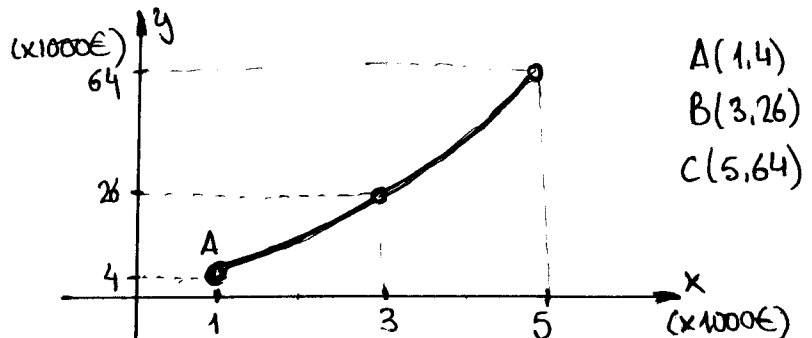
	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-1)$	-	-	+	+
$(x+1)(x-1)$	+	-	+	+
$\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)}$	+	-	+	+

PROBLEMA 2

a) Los gastos crecen a razón de 2000€ al año de forma constante \Rightarrow INTERPOLACIÓN LINEAL.

Los ingresos crecen 22000€ de 2005 a 2006 y 38000€ de 2006 a 2007 por lo tanto no es lineal \Rightarrow INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

b) Ingresos vs Gastos
 Sean Gastos $\equiv x$
 Ingresos $\equiv y$



Parábola: $y = ax^2 + bx + c$

$A(1,4) \Rightarrow 4 = a + b + c$
 $B(3,26) \Rightarrow 26 = 9a + 3b + c$
 $C(5,64) \Rightarrow 64 = 25a + 5b + c$

(...) $a=2$
 $b=3$
 $c=-1$

$y = 2x^2 + 3x - 1$

Por lo tanto, si $x=9$ (9000€)

$y = 2 \cdot 81 + 3 \cdot 9 - 1 = 188$

188000 €

$$c) \text{ si } y=100 \Rightarrow 100 = 2x^2 + 3x - 1 ;$$

$$2x^2 + 3x - 101 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \\ c=-101 \end{array} \right\}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-101)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{817}}{4}$$

NO TIENE SENTIDO

$$x=6.4 \Rightarrow \boxed{6400\text{€}}$$

PROBLEMA 3

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } x < -2 \longrightarrow \text{Es una recta} \Rightarrow \text{Dominio } \mathbb{R} \\ -x^2+5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \longrightarrow \text{Parabola} \Rightarrow \text{ " " } \mathbb{R} \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \longrightarrow \text{Recta} \Rightarrow \text{ " " } \mathbb{R} \end{cases}$$

El dominio de f : $D(f) = \mathbb{R}$

$$b) \begin{aligned} f(-4) &= -2(-4) - 3 = +8 - 3 = +5 \\ f(-2) &= -(-2)^2 + 5 = -4 + 5 = +1 \\ f(0) &= -0^2 + 5 = +5 \\ f(2) &= -2^2 + 5 = -4 + 5 = +1 \\ f(3) &= 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = +2 \end{aligned}$$

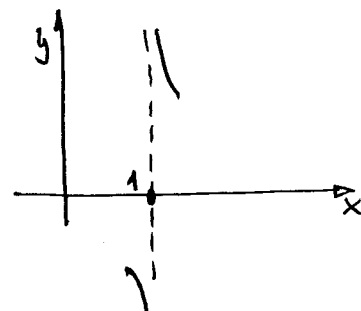
PROBLEMA 4 : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

• Asintotas horizontales : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ NO

• Asintotas verticales : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + 1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1 + 1 + \frac{2}{\rightarrow 0} = \infty$

L. laterales $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 + \frac{2}{\rightarrow 0^-} = -\infty$

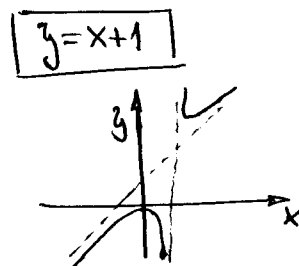
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 1 + \frac{2}{\rightarrow 0^+} = +\infty$



• As. oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2-x} \right) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 + \frac{2}{x-1} - x \right) = 1 + 0 = 1$$



PROBLEMA 5

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 2 \\ bx+1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x-a & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Condición de continuidad en $x=2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a \cdot 2 = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = b \cdot 2 + 1 = 2b + 1 \\ f(2) = 2a \end{array} \right\} 2a = 2b + 1$$

Idem en $x=4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 - a \\ f(4) = 4x + 1 \end{array} \right\} 4b + 1 = 4 - a$$

Sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ a + 4b = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ -2a - 8b = -6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2a - 2b = 1 \\ a + 4b = 3 \end{array}} \right\} -10b = -5 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

PROBLEMA 6

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$