PREGUNTA 1:

a) Calcula k para que f(x) sea continua en R.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ k+1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

b) ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Incluye representaciones gráficas a modo de ejemplos en las respuestas.

PREGUNTA 2: Estudia (dominio, puntos de corte con los ejes, simetrías, asíntotas, continuidad, crecimiento/decrecimiento) y representa la siguiente función: $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$.

PREGUNTA 3: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2x}{x^2-4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

PREGUNTA 4: Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ b) $f(x) = (1+e^x)^2$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1-5x}$ d) $f(x) = e^x \cdot Ln(x^2+1)$

e) ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	a) 0,75 p ; b) 1 p
2	2,5 p
3	a) 1 p ; b) 1 p
4	a) 0,75 p ; b) 0,75 p ; c) 0,75 p ; d) 0,75 p ; e) 0,75 p

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

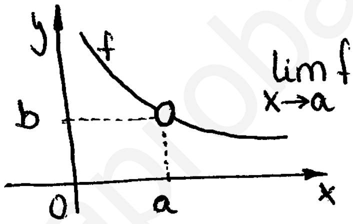
PREGUNTA 1:

a) Para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ tendrá que suceder que: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. En $\mathbb{R}-\{0\}$ la continuidad está garantizada por ser una función racional con el denominador no nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 0+1 = 1 \\ f(0) = K+1 \end{array}\right\}$$

Luego tendrá que ser: $K+1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{K=0}$

b) Sí, se puede, por ejemplo:



$\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\nexists f(a)$

No, si la función no está definida en un punto es imposible que cumpla la condición de continuidad en ese punto:

f continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; imposible si $\nexists f(a)$.

Por ejemplo en la figura anterior habría una discontinuidad evitable.

PREGUNTA 2: $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

- $\text{dom} f = \mathbb{R}-\{-1\}$
- PUNTOS DE CORTE:

 -eje y: $f(0) = 2 + \frac{1}{0+1} = 3 \qquad A(0,3)$

 -eje x: $0 = 2 + \frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{x+1} = -2$; $1 = -2x-2$; $2x = -3$; $x = -\frac{3}{2} \qquad B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

- Simetrías: $f(-x) = 2 + \frac{1}{-x+1} \neq f(x); -f(x)$: NO HAY.

- Asíntotas:

  - VERTICALES: $\lim_{x \to -1^-} \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) = 2 + (-\infty) = -\infty$

  $$\lim_{x \to -1^+} \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) = 2 + (+\infty) = +\infty$$

  - HORIZONTALES: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) = 2 \qquad \boxed{y=2}$

- Continuidad: $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1} = g(x) + h(x)$ siendo: $\begin{cases} g(x) = 2 \\ h(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

$g(x)$: continua en $\mathbb{R}$ (función constante)

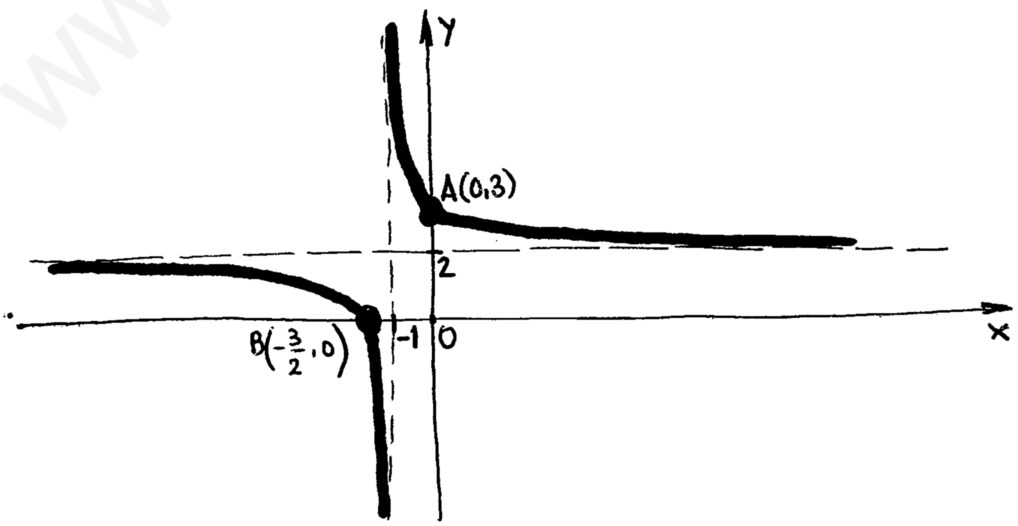
$h(x)$: continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ (racional en la que el denominador sólo se anula en $x=-1$)

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

- Monotonía:

$$f'(x) = \left[2 + (x+1)^{-1}\right]' = 0 + \left(-(x+1)^{-2} \cdot 1\right) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio



PREGUNTA 3:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+2\ -\ 2x}{(x+2)(x-2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=-\frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1})^2-2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

PREGUNTA 4:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x)=(1+e^x)^2\Rightarrow f'(x)=2(1+e^x)\cdot e^x=2e^x(1+e^x)$

c) $f(x)=\frac{e^{2x}}{1-5x}\Rightarrow\frac{2e^{2x}(1-5x)+5e^{2x}}{(1-5x)^2}=f'(x)$

d) $f(x)=e^x\cdot\ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\ln(x^2+1)+e^x\cdot\frac{2x}{x^2+1}$

e) Será en aquellos puntos donde $f'(x)=8$:

$f'(x)=3x^2-4$

$3x^2-4=8\Leftrightarrow 3x^2-12=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow \boxed{x=\pm 2}$