

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Los apartados dentro de una pregunta son equipuntuables.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno/a.

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO/A DEBERÁ ESCOGER UNO DE LOS DOS BLOQUES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DEL MISMO

Bloque A

1A- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + mz = m \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los distintos valores del parámetro m .
- b) Resolver el sistema cuando $m=6$.

2A- La distancia, en millas, entre un barco pesquero que salió a faenar durante un período de 10 días y su puerto base viene dada por la función:

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t - 6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10 - t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido, en días, desde su salida del puerto base.

- a) ¿Después de cuántos días es máxima la distancia del pesquero a su puerto base? ¿A cuántas millas se encontraba?
- b) ¿Durante qué períodos aumentaba la distancia a su puerto base? ¿En qué períodos disminuía?
- c) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

3A- El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley normal de media μ días y desviación típica 3 días.

- a) Determine un intervalo de confianza para estimar μ , a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.
- b) Razona, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que el verdadero valor de μ es de 9 días.
- c) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92 %?

4A- Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A)=0,2$; $P(B)=0,2$ y $P(A \cup B)=0,4$. Razona si los sucesos A y B son incompatibles y si son independientes.

1B- Con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200€ y 150€ respectivamente. Para cada bicicleta de montaña son necesarios 1kg de acero y 3 kg de aluminio, mientras que para las de paseo hacen falta 2kg de cada uno de los metales. Aplicando técnicas de programación lineal, calcule cuántas bicicletas de paseo y de montaña se deben fabricar para obtener el máximo beneficio.

2B- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 + 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Estudie su continuidad.
- b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje x entre $x=0$ y $x=2$.

3B- En un cine hay tres salas. En la sala A hay 240 espectadores; en la sala B, 180, y en la sala C, 80. Se sabe que la película de la sala A agrada al 40 % de los espectadores, mientras que las películas de las otras salas tienen un 50 % y un 90 % de aceptación. A la salida del cine elegimos un espectador al azar. Calcule la probabilidad de que:

- a) La película le haya gustado.
- b) La película le haya gustado si ha estado en la sala C.
- c) Salga de la sala C si la película le ha gustado.

4B- Se supone que el peso de las chicas de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 de estas chicas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?

BLOQUE A :

1A:
$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3y=0 \\ x-2y+mz=m \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

a)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = 3m - 4 - (3 + 2m) = m - 7$$

$$|A|=0 \Leftrightarrow m-7=0 \Rightarrow \boxed{m=7}$$

• Si $m \neq 7$: $Rg(A)=3=Rg(A^*)=n \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $m=7$:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg(A)=2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 14 = 7 \Rightarrow Rg(A^*)=3 \end{array} \right\} Rg(A) \neq Rg(A^*) \Rightarrow \text{S. INCOMPATIBLE}$$

b) Si $m=6 \Rightarrow |A|=6-7=-1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-18}{-1} = 18$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{6}{-1} = -6$$

2A-

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t-6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10-t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

siendo: M : distancia (millas)
 t : tiempo (días)

PARÁBOLA:

$$36 - (2t-6)^2 = 36 - (4t^2 - 24t + 36) = -4t^2 + 24t$$

Su extremo es un máximo.
 $a = -4 < 0$

• Puntos de corte con los ejes: $M \equiv y$; $t \equiv x$

eje y : $(x=0) \Rightarrow y=0$ $(0,0)$

eje x : $(y=0) \Rightarrow 0 = -4x^2 + 24x \Rightarrow 0 = x^2 - 6x = x(x-6) \Rightarrow \begin{cases} x=0 & (0,0) \\ x=6 & (6,0) \end{cases} \leftarrow \text{Fuera de su zona de definición}$

• Vértice:

$$M'(t) = -8t + 24; \quad M'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t + 24 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ días}$$

$$0 \leq t \leq 5$$

$$M(3) = -4 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = -36 + 72 = 36 \text{ millas}$$

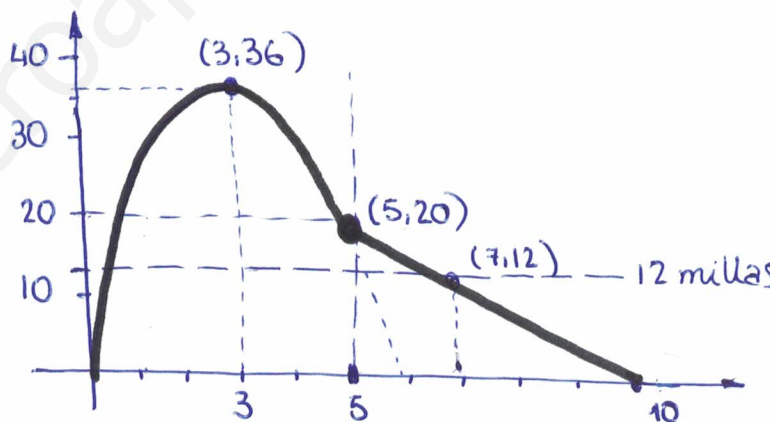
RECTA:

$$4(10-t)$$

$$(5 < t \leq 10)$$

x	y
5	20
10	0

$$M(5) = 36 - 4^2 = 20$$



a) A los 3 días y se encontraba a 36 millas.

b) Aumentaba en el periodo $(0,3)$ y disminuía en $(3,10)$

c) De la figura se demuestra que se encontraba en el periodo $(5,10]$ (la recta) Por lo tanto:

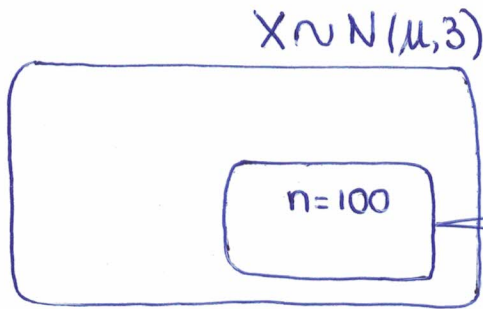
$$4(10-t) < 12 \Rightarrow 40 - 4t < 12 \Rightarrow -4t < 12 - 40 \Rightarrow -4t < -28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t < -7 \Rightarrow \boxed{t > 7}$$

A partir de los 7 días.

3A -

X: días de permanencia en un hospital



a)

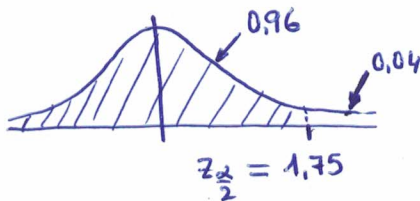
$$IC_{97\%}(\mu) = (8,1 - E ; 8,1 + E)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 8,1 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17 \end{array} \right\} E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0,651$$

$$IC_{97\%}(\mu) = (8,1 - 0,651 ; 8,1 + 0,651) = (7,449 ; 8,751)$$

b) Como $9 \notin (7,449 ; 8,751)$ a ese nivel de confianza no podemos aceptar que la media real sea de 9 días.

c) $1 - \alpha = 0,92 \Rightarrow \alpha = 0,08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04$



$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{máx}} = 1 \text{ día} \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75 \\ \sigma = 3 \end{array} \right\}$$

$$1 = 1,75 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1^2 = \frac{1,75^2 \cdot 3^2}{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1,75 \cdot 3}{1} \right)^2 = 27,56$$

Por lo tanto, el tamaño muestral mínimo debe ser de 28 personas.

4A.

$$P(A)=0,2$$

$$P(B)=0,2$$

$$P(A \cup B)=0,4$$

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cap B)=0$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,2 - 0,4 = 0 : \text{ sí son incompatibles.}$$

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B)=0$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \neq 0 : \text{ NO son independientes,}$$

BLOQUE B:

1B-

	X B. MONTAÑA	Y B. PASEO	TOTAL DISPONIBLE
Kg ACERO	1	2	80
Kg AL	3	2	120

Maximizar $F(x,y) = 200x + 150y$

Sujeta a:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

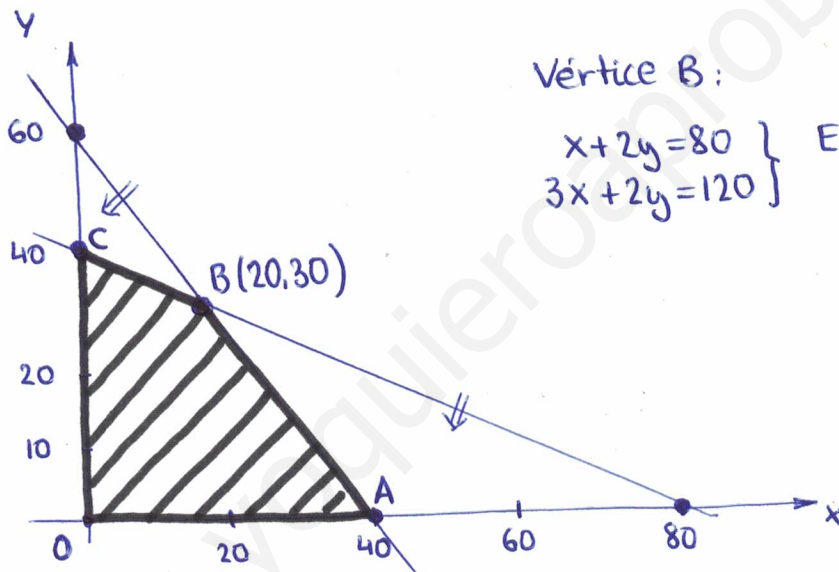
Región factible:

Recta 1: $x + 2y = 80$

x	y
0	40
80	0

Recta 2: $3x + 2y = 120$

x	y
0	60
40	0



Vértice B:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ec2} - \text{Ec1:} \\ 2x = 40 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 30 \end{array}$$

Evaluamos $F(x,y)$ en los vértices:

$$F(40, 0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8000 \text{ €}$$

$$F(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 8500 \text{ €}$$

$$F(0, 40) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 40 = 6000 \text{ €}$$

$$F(0, 0) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0 \text{ €}$$

$\Rightarrow$ SOLUCIÓN ÓPTIMA: Fabricar 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo, obteniendo un beneficio máximo de 8500€.

26-

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & : x \leq 0 \\ -1 + 2x & : 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & : x > 1 \end{cases}$$

a) Continuidad: La función, definida a tramos, está compuesta por polinomios, por lo tanto la continuidad está garantizada en toda la recta $\mathbb{R}$ salvo, tal vez, en $x=0$ y $x=1$ donde hay que estudiarla aparte:

$$\boxed{x=0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - 2x) = -0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + 2x) = -1 + 2 \cdot 0 = -1$$

Discontinuidad de salto de 1 unidad.

$$\boxed{x=1}$$

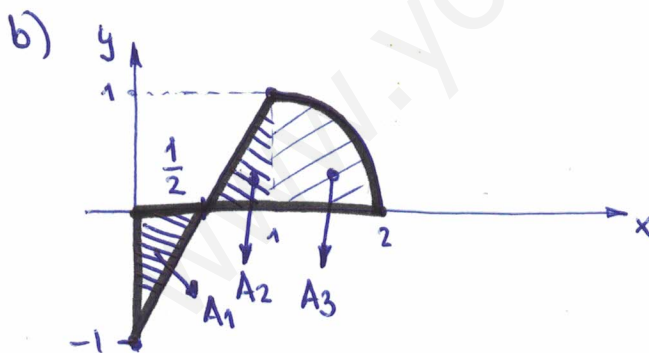
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1 + 2x) = -1 + 2 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

$$f(1) = 1$$

$f(x)$ continua en $x=1$

Luego: $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{1\}$



Recta: $-1 + 2x$

x	y
0	-1
1	1

Parábola: $-x^2 + 2x$

$a < 0$

P.C: $-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Vértice: $y'(x) = -2x + 2$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

* $A_1 = A_2$ y son triángulos $\Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{4} u^2$

* $A_3 = \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = -\frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} u^2$

Luego: $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} u^2$

38-

TOTAL ESPECTADORES: $240 + 180 + 80 = 500$

$$P(A) = \frac{240}{500} = \frac{12}{25} = 0,48 ; P(B) = \frac{180}{500} = \frac{9}{25} = 0,36 ; P(C) = \frac{80}{500} = \frac{4}{25} = 0,16$$

A: espectador sala A

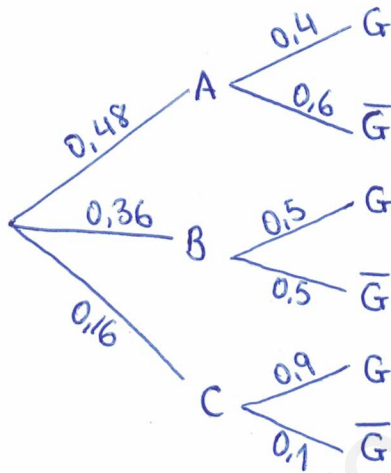
B: " " B

C: " " C

G: la película gusta

$P(A) = 0,48$	$P(B) = 0,36$	$P(C) = 0,16$
		90%
40%	50%	$P(G/C) = 0,9$
$P(G/A) = 0,4$	$P(G/B) = 0,5$	

diagrama de árbol:



a) TH. PROBABILIDAD TOTAL:

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) = \\
 &= P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) = \\
 &= 0,48 \cdot 0,4 + 0,36 \cdot 0,5 + 0,16 \cdot 0,9 = 0,516 \quad (51,6\%)
 \end{aligned}$$

$$b) P(G/C) = 0,9 \quad (90\%)$$

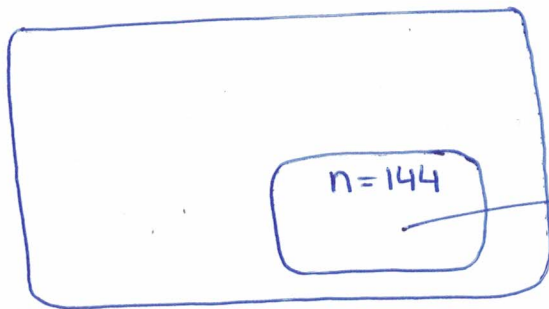
c) TH. BAYES: Verosimilitud $\leadsto$ "La película le ha gustado"

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{0,16 \cdot 0,9}{0,516} = 0,2791 \quad (27,91\%)$$

4B-

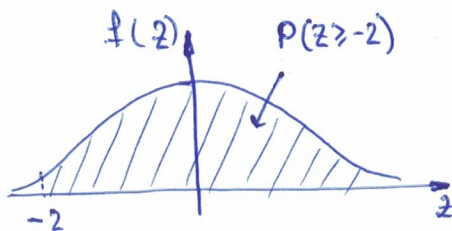
X : Peso de las chicas de una región.

$$X \sim N(64, 6)$$



$$\bar{X} \sim N\left(64, \frac{6}{\sqrt{144}}\right) = N(64, 0.5)$$

$$P(\bar{X} > 63) = P\left(Z > \frac{63-64}{0.5}\right) = P(Z > -2) = P(Z \leq 2) = 0.9772 \quad (97.72\%)$$



=

