

PREGUNTA 1:

La probabilidad de que un estudiante universitario termine su carrera en los años establecidos por el plan de estudios es $\frac{3}{5}$ y la de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es $\frac{2}{3}$. Halla la probabilidad de que:

- a) Ambos terminen sus estudios en los años establecidos.
- b) Solo el varón los termine en el plazo fijado.
- c) Al menos uno de los dos termine en el tiempo establecido.

Definimos los siguientes sucesos:

$A = \text{«Un estudiante termine su carrera en los años establecidos»}$

$B = \text{«La hermana termine su carrera en los años establecidos»}$

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = 0,2$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{9 + 10 - 6}{15} = \frac{13}{15} = 0,87$

PREGUNTA 2:

Sea X una variable aleatoria normal de media 50 y desviación típica 4.

- a) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?
- b) Si $\bar{X}_{16}$ indica la variable aleatoria «Media muestral para muestras de tamaño 16», calcule el valor de a para que $P(50 - a \leq \bar{X}_{16} \leq 50 + a) = 0,9876$.

$$\text{a) } \bar{X} \equiv N\left(50, \frac{4}{\sqrt{4}}\right) = N(50, 2)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 54) &= P\left(\frac{\bar{X} - 50}{2} > \frac{54 - 50}{2}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \\ &= 1 - 0,9772 = 0,0228 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \bar{X}_{16} \equiv N\left(50, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50, 1)$$

$$\begin{aligned} P(50 - a \leq \bar{X}_{16} \leq 50 + a) &= P\left(\frac{50 - a - 50}{1} \leq \frac{\bar{X}_{16} - 50}{1} \leq \frac{50 + a - 50}{1}\right) = \\ &= P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1 = 0,9876 \rightarrow P(Z \leq a) = 0,9938 \rightarrow a = 2,5 \end{aligned}$$

PREGUNTA 3:

En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.
- Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Definimos los siguientes sucesos:

A = «Salir par»

B = «Salir un número mayor o igual que cinco»

C = «Obtener dos caras»

D = «Obtener exactamente una cara»

- La probabilidad de ganar es:

$$P(G) = P(C \cap A) + P(D \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

PREGUNTA 4:

Tras múltiples observaciones se ha constatado que el número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones:

- Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para la media de pulsaciones de todos los deportistas de esa edad.
- Interpretar el significado del intervalo obtenido.

a) $1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,015}$

Para un nivel de confianza del 97% tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17. Luego .

$$z_{\alpha/2} = z_{0,015} = 2,17$$

$$\left(64 - 2,17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}; 64 + 2,17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} \right) = (62,05; 65,95)$$

- b) La probabilidad de que la muestra proceda de una población cuya media esté en el intervalo (62,05; 65,95) es 0,97.

PREGUNTA 5:

Se ha lanzado una moneda al aire 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones. Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0,03, con un nivel de confianza del 97 %. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

$$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0,6 \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,015}$$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17.

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0,015} = 2,17$$

$$n = \frac{2,17^2 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{0,03^2} = 1.255,71$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 1.256.