PREGUNTA 1: Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función: $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$ donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibuja la gráfica de la función S(t) para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

(3 puntos)

PREGUNTA 2: Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & si \quad x \leq 2 \\ \frac{2x+71}{4x+7} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de f (x).

b) Calcula el área limitada por la función f (x) y el eje de abscisas en el intervalo [0,2] dibujando el recinto correspondiente.

(3 puntos)

PREGUNTA 3: Dada la función: $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

a) Halla sus asíntotas

b) Estudia sus intervalos de crecimiento / decrecimiento

c) Estudia su curvatura.

d) Esboza su gráfica.

(3 puntos)

PREGUNTA 4: Halla las dimensiones de una ventana de 6 m de perímetro para que tenga la mayor área posible, y así deje pasar la mayor cantidad de luz posible.

(1 puntos)

PREGUNTA 1: $S(t)=660-231t+27t^2-t^3$

a) $S'(t)=-231+54t-3t^2$

$S'(t)=0 \Leftrightarrow \quad -231+54t-3t^2=0 \Rightarrow t^2-18t+77=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\dfrac{18\pm\sqrt{324-308}}{2}=\dfrac{18\pm 4}{2}=\begin{cases}11\\7\end{cases}$ (0,5)

$S''(t)=54-6t$

$S''(11)=54-66=-12<0 \Rightarrow t=11$ es un máximo

$S''(7)=54-42=12>0 \Rightarrow t=7$ es un mínimo.

t: horas transcurridas desde las 12 de la mañana, luego:

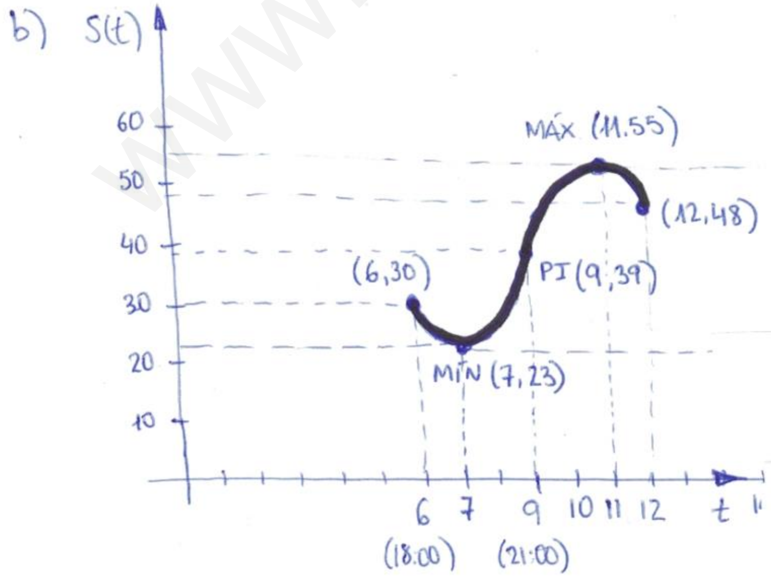
- A las 7 de la tarde la audiencia es mínima. (0,5)
- A las 11 de la noche (23:00) la audiencia es máxima.

Como S(t) está definida entre las 18:00 y las 0:00, ambos resultados están en el dominio de definición.

- Si $t=7 \Rightarrow S(7)=660-231\cdot 7+27\cdot 7^2-7^3=23\%$ de audiencia.
- Si $t=11 \Rightarrow S(11)=660-231\cdot 11+27\cdot 11^2-11^3=55\%$ de audiencia.

(0,5)

b) (1.5p)



$S''(t)=0 \Leftrightarrow 6t=54 \Rightarrow t=9$ (P. INFLEXIÓN)

$S(6)=30$ $\quad S(12)=48$

$S(9)=39$

PREGUNTA 2: $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2x+71}{4x+7} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) • en $(-\infty, 2)$ la continuidad está garantizada por ser un polinomio

(0,75) • en $(2, \infty)$ la continuidad está garantizada porque se trata de una función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ cuyo denominador se anula en $x = -\frac{7}{4}$, valor que no pertenece a su zona de definición $(2, \infty)$

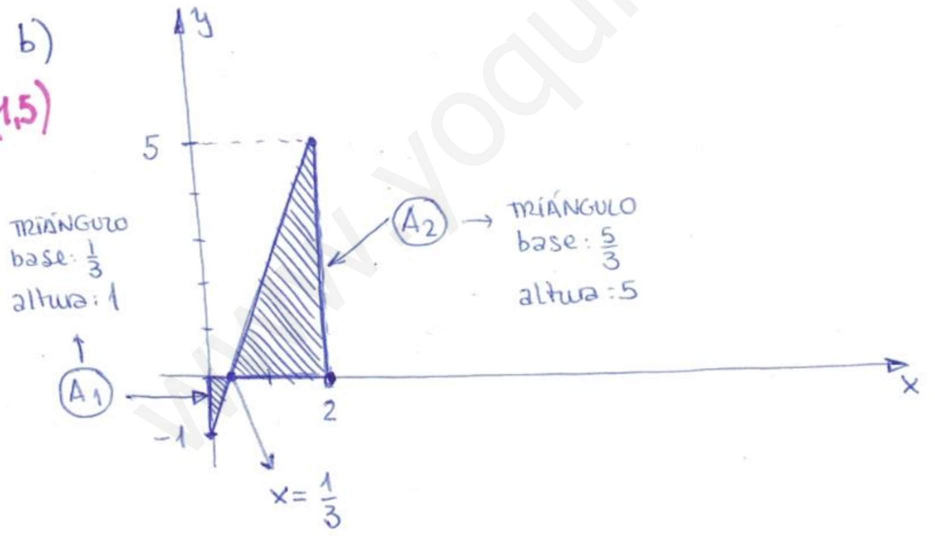
(0,75) • en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-1) = 6-1 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+71}{4x+7} = \dfrac{75}{15} = 5 \end{array}\right\} \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Por lo tanto: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) (1,5)



En $[0,2]$ $f(x)$ es una recta:

$f(0) = -1$

$f(2) = 5$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Sin cálculo integral: $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} u^2$

Con cálculo integral: $A = \left| \int_0^{\frac{1}{3}} (3x-1)\,dx \right| + \int_{\frac{1}{3}}^{2} (3x-1)\,dx =$

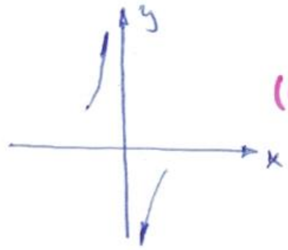
$= \left| \left[\frac{3x^2}{2} - x \right]_0^{1/3} \right| + \left[\frac{3x^2}{2} - x \right]_{\frac{1}{3}}^{2} = \left| \frac{3 \cdot \frac{1}{9}}{2} - \frac{1}{3} \right| + \left(\frac{3 \cdot 4}{2} - 2 - \frac{3 \cdot \frac{1}{9}}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3} u$

PREGUNTA 3: $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x}$

a) ASÍNTOTAS: HORIZONTALES NO TIENE: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

VERTICALES: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-5}{x} = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-5}{x} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$

$x=0$ es asíntota vertical



(0,5)

OBLICUA: Forma general: $y = mx+n$ siendo:

- $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5}{x^2} = 1$
- $n = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-5}{x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2} - 5 - \cancel{x^2}}{x} = 0$

Asíntota: $\boxed{y=x}$ (0,5)

División de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^2 \quad -5 & x \\ \hline -x^2 \qquad & x \\ \hline -5 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Asíntota: $\boxed{y=x}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2-(x^2-5)}{x^2} = \dfrac{x^2+5}{x^2}$ (0,5)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$

Estudio de signos en dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$: El numerador y el denominador serán siempre positivos en $\mathbb{R}-\{0\}$, por lo tanto $f(x)$ es CRECIENTE en todo su dominio.

c) $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 2x(x^2+5)}{x^4} = \dfrac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 10x}{x^4} = \dfrac{-10}{x^3}$

Estudio de signos:

$-\infty$		0		$+\infty$
	$\dfrac{-}{-} = \oplus$		$\dfrac{-}{+} = \ominus$	
	CÓNCAVA HACIA ARRIBA		CÓNCAVA HACIA ABAJO	

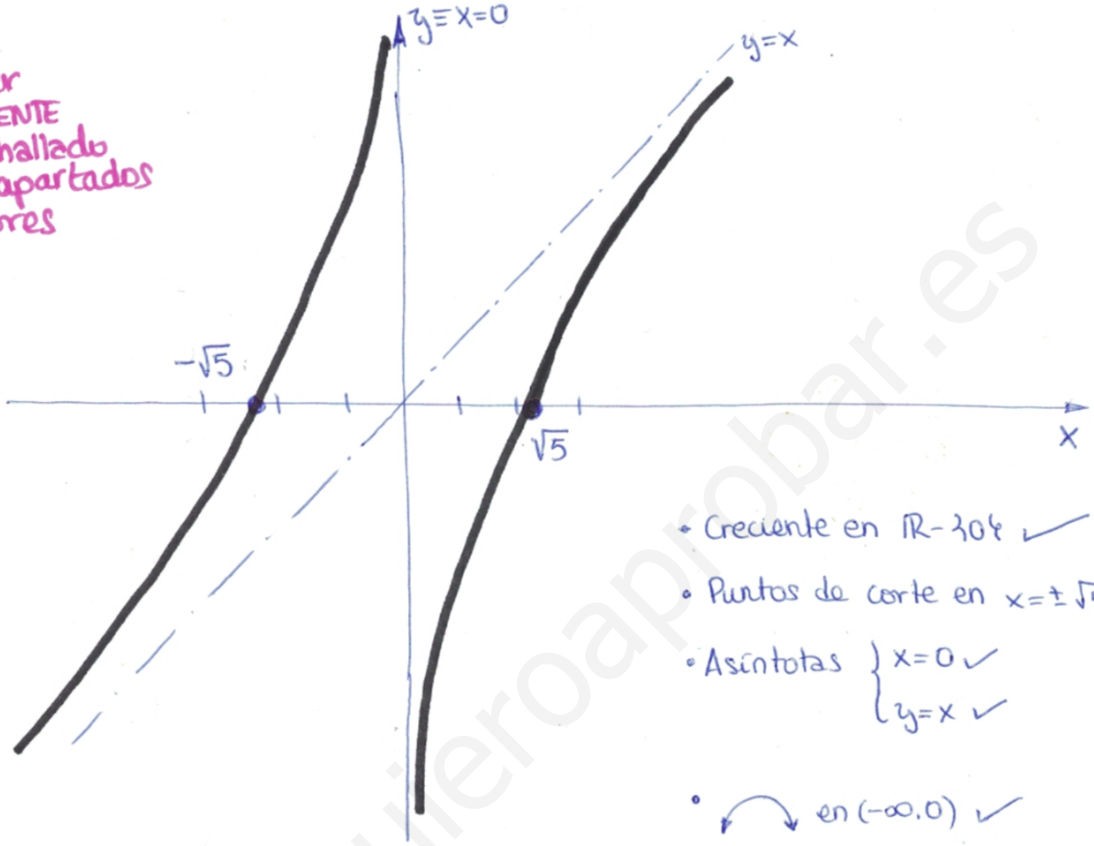
(0,75)

d) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES:

x	y
0	$\to \nexists$ dom
	0

$$f(x) = \frac{x^2-5}{x} = 0 \iff x^2-5=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

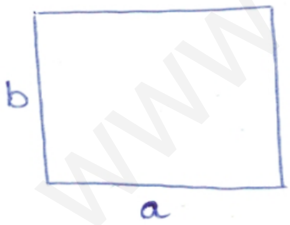
(0,75)
↓
debe ser COHERENTE con lo hallado en los apartados anteriores



- Creciente en $\mathbb{R}-\{0\}$ ✓
- Puntos de corte en $x=\pm\sqrt{5}$ ✓
- Asíntotas $\begin{cases} x=0 ✓ \\ y=x ✓ \end{cases}$
- en $(-\infty,0)$ ✓

  en $(0,\infty)$ ✓

PREGUNTA 4:



$$p = 2(a+b) = 6 \Rightarrow a+b=3 \Rightarrow b = 3-a$$

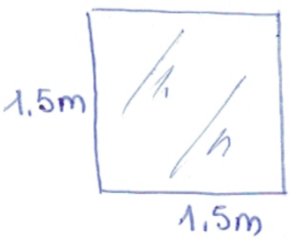
$$A(a,b) = a\cdot b \Rightarrow A(a) = a(3-a) = 3a-a^2$$

$$A'(a)=0 \Rightarrow 3-2a=0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}\,m$$

$$A''(a) = -2 \Rightarrow A''\left(\frac{3}{2}\right)<0 \text{ (es un máximo)}$$

$$\text{Si } a=\frac{3}{2} \Rightarrow b = 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,m$$

La ventana de área máxima es un cuadrado de lado 1,5m



$$A_{máx} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\,m^2 = 2{,}25\,m^2$$