PREGUNTA 1: Un museo tiene tres salas de exposiciones: A, B y C. Los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 €. Un determinado día entraron en la sala un total de 120 personas. Se sabe que el número de visitantes conjunto de las salas A y C coincide con la séptima parte de la recaudación total, en euros.

a) ¿Es posible saber con estos datos el número de visitantes a cada sala? Justificar matemáticamente la respuesta. (1 punto)
b) Si además se sabe que la recaudación en la sala B asciende a 200 €, ¿Es posible conocer el número de visitantes a cada sala? En caso afirmativo, resuelve el problema. (1 punto)

PREGUNTA 2: Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; B=$(x \quad m)$; C=$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; D=$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$; E=$\begin{pmatrix} -y+2m+2 \\ -2x-my+5 \end{pmatrix}$

a) Si (AB)(2C-D) = E, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (x e y) en función del parámetro m. (1 punto)
b) Discute las soluciones del sistema anterior según los valores de m. (1 punto)
c) Resuelve el sistema si m=4. (0,5 puntos)

PREGUNTA 3: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=5 \\ 5x+y-z&=11 \\ 3x-y+az&=2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (1,25 puntos)
b) Resolver si a=-4. (1,25 puntos)

PREGUNTA 4: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} kx+y+z&=1 \\ y+z&=1 \\ x+ky+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k. (1,5 puntos)
b) Resolver siempre que sea posible. (1,5 puntos)

Sólo se valorarán las respuestas debidamente justificadas

PREGUNTA 1:

Llamemos:

A ≡ nº de visitantes a la sala A.
B ≡ nº " " " " " B.
C ≡ nº " " " " " C.

Ecuaciones:

a) $A+B+C=120$

$$A+C=\frac{1}{7}(2A+4B+7C) \Rightarrow 7A-2A-4B+\cancel{7C}-\cancel{7C}=0 \Rightarrow 5A-4B=0$$

Sistema: $\left.\begin{array}{l} A+B+C=120 \\ 5A-4B=0 \end{array}\right\}$ 3 incógnitas, 2 ecuaciones

$$A^{*}=\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 120 \\ 0 \end{array}\right.\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-4-5=-9\neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(A^{*})=2<n \Rightarrow S.C.I.$$

Imposible dar una solución única.

b) $$\left.\begin{array}{l} A+B+C=120 \\ 5A-4B=0 \\ 4B=200 \end{array}\right\} \Rightarrow B=50 \Rightarrow 5A-4\cdot 50=0 \Rightarrow A=40 \Rightarrow C=120-50-40=30$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A=40 \text{ personas} \\ B=50 \text{ personas} \\ C=30 \text{ personas} \end{array}}$$

PREGUNTA 2 :

a) $$\left[\underset{(2\times1)}{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}\underset{(1\times2)}{(x\ \ m)}\right]\cdot\left[2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}\right]=\underset{(2\times2)}{\begin{pmatrix}3x & 3m\\x & m\end{pmatrix}}\cdot\underset{(2\times1)}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}3x+3m\\x+m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+2m+2\\-2x-my+5\end{pmatrix}$$

Luego: $$\left.\begin{array}{l}3x+3m=-y+2m+2\\x+m=-2x-my+5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+y=2-m\\3x+my=5-m\end{array}\right\}$$

b) $$A^*=\left[\begin{array}{cc|c}3&1&2-m\\3&m&5-m\end{array}\right]\qquad |A|=\begin{vmatrix}3&1\\3&m\end{vmatrix}=3m-3=3(m-1)$$

$$\underbrace{\begin{matrix}3&m\end{matrix}}_{A}$$

$$|A|=0\Leftrightarrow\boxed{m=1}$$

- Si $m\neq1\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rg(A)=rg(A^*)=2=n\Rightarrow$ S.C.D.
- Si $m=1\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rg(A)=1$

$$\left.\begin{array}{l}A^*=\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\3&1&4\end{array}\right)\qquad\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=3\neq0\Rightarrow rg(A^*)=2\end{array}\right\}\text{S. INCOMPATIBLE}$$

c) Si $m=4\Rightarrow m\neq1\Rightarrow$ S.C.D.

$$-\left.\begin{array}{l}3x+y=-2\\3x+4y=1\end{array}\right\}$$
$$\overline{\quad-3y=-3\Rightarrow y=1\Rightarrow x=-1\quad}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$$

PREGUNTA 3:

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y+az=2 \end{array}\right\}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix}=-4a-12=-4(a+3) \Rightarrow |A|=0 \Leftrightarrow a=-3$$

- Si $a\neq-3 \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow rg(A)=rg(A^*)=3=n \Rightarrow SCD$
- Si $a=-3 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq0 \Rightarrow rg(A)=2 \\ rg(A^*): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq0 \Rightarrow rg(A^*)=3 \end{array}\right\} \text{S.INCOMP.}$$

b) Si $a=-4$: $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y\cancel{+a}-4z=2 \end{array}\right\}$$ S.C.D Cuadrado (Cramer)

$$|A|=-4(-4+3)=4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{4}=\frac{4}{4}=1\ ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{4}=\frac{20}{4}=5; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

PREGUNTA 4:

$$\left.\begin{array}{l} Kx+y+z=1 \\ y+z=1 \\ x+Ky+z=2 \end{array}\right\} \qquad A^{*}=\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

a) $|A| = -K^2+K = K(1-K)$

$|A|=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$ ó $\boxed{K=1}$

- Si $K\neq 0$ y $K\neq 1$; $|A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(A^{*})=3=n \Rightarrow$ SCD
- Si $K=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)<3$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2 \\ rg(A^{*}): \quad |A|=0\,; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\,; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow rg(A^{*})=2 \end{array}\right\} \text{S.C.I.}$$

- Si $K=1$: $|A|=0 \Rightarrow rg(A)\leq 2$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2 \\ rg(A^{*}): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A^{*})=3 \end{array}\right\} \text{S.INCOMP.}$$

b) Si $K=0$ (S.C.I)

Tomamos el menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} 0x+y=1-\lambda \\ x+0y=2-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{array}} \quad (0{,}5\,p)$$

$(\lambda=z)$ $\qquad$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

• Si $K \neq 0$ y $K \neq 1 \Rightarrow$ S.C.D

$$|A| = K(1-K)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & K & 1 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{\cancel{1}+\cancel{K}+\cancel{2}-\cancel{2}-\cancel{K}-\cancel{1}}{K(1-K)} = \frac{0}{K(1-K)} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{K+0+\cancel{1}-\cancel{1}-2K-0}{K(1-K)} = \frac{-\cancel{K}}{\cancel{K}(1-K)} = -\frac{1}{1-K} = \frac{1}{K-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & K & 2 \end{vmatrix}}{K(1-K)} = \frac{2K+0+\cancel{1}-\cancel{1}-K^2-0}{K(1-K)} = \frac{2K-K^2}{K(1-K)} = \frac{\cancel{K}(2-K)}{\cancel{K}(1-K)} = \frac{2-K}{1-K}$$

$$\boxed{\text{Luego } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/K-1 \\ 2-K/1-K \end{pmatrix}} \quad (1p)$$