PREGUNTA 1: Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcular:

a) $A^2 - 2A - 8I_3$
b) Hallar la matriz X, tal que: $AX = I_3$

PREGUNTA 2: Calcula A^{2016}, siendo A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PREGUNTA 3: Determinar la matriz X que verifique $A^2 X = \frac{1}{2}(A+BC)$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ;\ C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 4: Calcular el rango de la matriz A según los distintos valores del parámetro k:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & k \\ 1 & -k & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 5: Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de m que hacen que A tenga inversa.
b) Haciendo m=4, resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$XA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todas las preguntas se calificarán sobre un mismo valor de 2 puntos.

Sólo se valorarán las respuestas debidamente justificadas

01985

PREGUNTA 1:

a) $A^2 - 2A - 8I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $A \cdot X = I_3 \Rightarrow X = A^{-1}$

- Cálculo de A^{-1} por Gauss-Jordan:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{4} \cdot F_1 \\ -\frac{1}{4} F_2 \\ \frac{1}{4} F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$, with $\underbrace{}_{I_3}$ under the left block and $\underbrace{}_{A^{-1}}$ under the right block.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

- Cálculo de A^{-1} por determinantes:

$|A| = 0 + 8 + 8 - 0 - 0 - 0 = 16 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adj(A)} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{|A|}} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

luego: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

01985

PREGUNTA 2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 4I \cdot A = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = 4 \cdot A \cdot A = 4A^2 = 4 \cdot 4I = 16I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = 16I \cdot A = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 32 & 0 \\ 32 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$A^n = 2^n \cdot I$ si n es par

$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si n es impar

Entonces: $A^{2016} = 2^{2016} \cdot I = \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$

(NOTA: Si tratas de calcular 2^{2016} con la calculadora te dará ERROR, porque es un número tan grande que no puede representarlo ni siquiera empleando la notación científica)

01985

PREGUNTA 3:

$$A^2X = \frac{1}{2}(A+BC)$$

$$\underbrace{(A^2)^{-1}\cdot A^2}_{I}\cdot X = (A^2)^{-1}\cdot\frac{1}{2}(A+BC) = \frac{1}{2}(A^2)^{-1}(A+BC) \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2}(A^2)^{-1}\cdot(A+BC)}$$

$$A+BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}: \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{(A^2)^{-1}}$$

Por lo tanto:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 40 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}}$$

01985

PREGUNTA 4:

A) Por el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & K \\ 1 & -K & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{F_1 \leftrightarrow F_2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & K \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -K & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-F_1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & K \\ 0 & -1 & 3 & 2-2K \\ 0 & -K & 6 & -2-K \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boxed{F_3-KF_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & K \\ 0 & -1 & 3 & 2-2K \\ 0 & 0 & 6-3K & \underbrace{-2-K-2K+2K^2}_{2K^2-3K-2} \end{pmatrix}$$

Analizamos si existe algún valor de K que haga esta fila nula.

$6-3K=0 \Rightarrow 3K=6 \Rightarrow \boxed{K=2}$

$2K^2-3K-2=0 \Rightarrow \boxed{K=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=2\ ;\ -\frac{1}{2}}$

Conclusión: Si $K=2$ la fila 3 se anula y $rg(A)=2$; para cualquier otro valor de K: $rg(A)=3$

B) Por determinantes: A_{3x4}: mayor rango posible: $rg(A)=3$

Menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -K & 5 \end{vmatrix}=-K+1-2K+5=-3K+6\ ;\quad -3K+6=0 \Rightarrow K=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & K \\ 1 & -K & -2 \end{vmatrix}=-2K-K+2K^2-2=2K^2-3K-2\ ;\quad 2K^2-3K-2=0 \Rightarrow K=2 \text{ ó } K=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & K \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}=4+10+K+2-10K+2=-9K+18\ ;\quad -9K+18=0 \Rightarrow K=2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & K \\ -K & 5 & -2 \end{vmatrix}=-2-K^2-2K+5K=-K^2+3K-2\ ;\quad -K^2+3K-2=0 \Rightarrow K=1 \text{ ó } K=2$$

Si $\boxed{K=2}$ se anulan todos los menores de orden 3 $\Rightarrow rg(A)<3$

• $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$; Para cualquier otro valor de K: $rg(A)=3$

01985

PREGUNTA 5:

a) $|A| = 3(m+1) + (m-6)(m+1) - 12 = 3m + 3 + m^2 + m - 6m - 6 - 12 =$

$= m^2 - 2m - 15$

$m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

Por lo tanto: A tendrá inversa $\forall m \in \mathbb{R} - \{5, -3\}$

b) $X \cdot A = (3 \ \ 1 \ \ 1) \Rightarrow X = (3 \ \ 1 \ \ 1) \cdot A^{-1}$

Si $m = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 - 2 \cdot 4 - 15 = 16 - 8 - 15 = -7$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adj(A)} \begin{pmatrix} -6 & 15 & 10 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{|A|}} -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Luego: $\boxed{X} = (3 \ \ 1 \ \ 1) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}(7 \ \ 0 \ \ -7) = \boxed{(-1 \ \ 0 \ \ 1)}$

dimensiones: $(1 \times 3)(3 \times 3) = (1 \times 3)$