EJERCICIOS RESUELTOS DE LOGARITMOS

1. Hallar el valor de x: (ESTRATEGIA: Aplicar la definición $\log_b N = p \Leftrightarrow N = b^p$)

a) $\log_x 1000 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$

b) $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

c) $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$

d) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = x \Leftrightarrow 2^x = \left(\frac{1}{16}\right) \Rightarrow x = -4$

e) $\log_x 32 = -5 \Leftrightarrow x^{-5} = 32 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

f) $\log x = 2 \Leftrightarrow 10^2 = x \Rightarrow x = 100$

g) $\ln x = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$

h) $\log_x\left(\frac{1}{27}\right) = -3 \Leftrightarrow x^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right) \Rightarrow x = 3$

2. Calcula: (ESTRATEGIA: Modificar el argumento para aplicar: $\log_b b^r = r$)

a) $\log_3 \sqrt[4]{243} = \log_3 \sqrt[4]{3^5} = \log_3 3^{5/4} = \frac{5}{4}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{3^5} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-5/4} = -\frac{5}{4}$

c) $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

d) $\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{1/2} = \frac{1}{2}$

e) $\log_{64} 2 = \log_{64} \sqrt[6]{64} = \log_{64} 64^{1/6} = \frac{1}{6}$

f) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{1/2} = \frac{1}{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{1/3} = \frac{1}{3}$

i) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2^{-1}} = \log_2 2^{-1/2} = -\frac{1}{2}$

j) $\log 1 = \log 1^0 = 0$ (PROPIEDAD GENERAL: $\log_b 1 = 0$)

k) $\log_{1/10} 10 = \log_{1/10}\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -1$

l) $\log_{\frac{1}{10}} 0{,}001 = \log_{\frac{1}{10}} 10^{-3} = \log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^{3} = 3$

m) $\log \sqrt[3]{10000} = \log \sqrt[3]{10^4} = \log 10^{4/3} = \frac{4}{3}$

n) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{1000} = \log_{\frac{1}{10}} 10 = \log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -1$

3. Halla la base de los siguientes logaritmos: (DEFINICIÓN DE LOGARITMO)

a) $\log_a 10000 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 10000 \Rightarrow a = 100$ (la solución $a=-100$ no tiene sentido)

b) $\log_a 16 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ $(\cancel{a=-4})$

c) $\log_a 125 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$

d) $\log_a 729 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 729 \Rightarrow a^{-3} = 3^6 \Rightarrow a^{-3} = 9^3 \Rightarrow a^{-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \Rightarrow a = \frac{1}{9}$

4. Expresa como un solo logaritmo (APLICAR LAS PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES)

a) $\log 6 + \log 8 - \log 3 = \log \frac{\cancel{6}^{\,2}\cdot 8}{\cancel{3}} = \log 16$

b) $\log 9 + \log 28 - (\log 7 - \log 9) = \log \frac{9\cdot 28}{\frac{7}{9}} = \log \frac{9\cdot \cancel{28}^{\,4}\cdot 9}{\cancel{7}} = \log 324$

5. Calcula

$\log 1000 - \log 0{,}001 + \log \frac{1}{1000} = \log 10^3 - \log 10^{-3} + \log 10^{-3} = \cancel{3} - (-3) + (\cancel{-3}) = 3$

6. Sabiendo que $\log 2 \simeq 0{,}301030$, calcula:

(ESTRATEGIA): Transformar los argumentos para ponerlos en función de 2 y de 10, cuyos logaritmos decimales conocemos)

a) $\log 4 = \log 2^2 = 2\cdot \log 2 = 2\cdot 0{,}301030 = 0{,}602060$

b) $\log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - 0{,}301030 = -0{,}301030$

c) $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301030 \simeq 0{,}69897$

d) $\log 0{,}5 = \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 1 - \log 2 = 0 - 0{,}301030 \simeq -0{,}301030$

e) $\log\sqrt{2} = \log 2^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot \log 2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}301030 \simeq 0{,}150515$

f) $\log 16 = \log 2^4 = 4\cdot\log 2 = 4\cdot 0{,}301030 \simeq 1{,}20412$

g) $\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log 1 - \log 16 = 0 - 4\cdot\log 2 \cong -1{,}20412$

h) $\log 0{,}025 = \log(25\cdot 10^{-3}) = \log 25 + \log 10^{-3} = \log\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \log 10^{-3} = 2\cdot\log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 10^{-3} =$

$= 2\cdot(\log 10 - \log 2) + (-3) = 2(1 - 0{,}301030) - 3 \simeq -1{,}60206$

i) $\log\sqrt[3]{32} = \log 2^{5/3} = \frac{5}{3}\cdot\log 2 = \frac{5}{3}(0{,}301030) \cong 0{,}50172$

j) $\log\sqrt{\frac{1}{2}} = \log 2^{-1/2} = -\frac{1}{2}\cdot 0{,}301030 = -0{,}150515$

k) $\log\sqrt{\frac{1}{64}} = \log\frac{1}{8} = \log 2^{-3} = -3\cdot 0{,}301030 = -0{,}903090$

l) $\log 0{,}00625 = \log(625\cdot 10^{-5}) = \log(5^4\cdot 10^{-5}) = \log\left(\frac{10}{2}\right)^4 + \log 10^{-5} =$

$= 4(\log 10 - \log 2) - 5\cdot\log 10 = 4(1 - 0{,}301030) - 5 \simeq -2{,}20412$

m) $\log\frac{1}{1024} = \log\frac{1}{2^{10}} = \log 2^{-10} = -10\cdot 0{,}301030 = -3{,}01030$

n) $\log\sqrt{\frac{5}{16}} = \log\frac{\sqrt{5}}{4} = \log\left(\frac{10}{2}\right)^{1/2} - \log 2^2 = \frac{1}{2}(\log 10 - \log 2) - 2\cdot\log 2 =$

$= \frac{1}{2}(1 - 0{,}30130) - 2\cdot 0{,}301030 = -0{,}252575$

7. Expresa como un solo logaritmo:

a) $3(\log 8 - \log 4) + \log 3 = 3\cdot\log\frac{8}{4} + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 = \log(8\cdot 3) = \log 24$

b) $\log 6 + \log 2 - \log 3 = \log\frac{6\cdot 2}{3} = \log 4$

c) $2\log 2 + \log 30 - \log 12 = \log\frac{\cancel{4}\cdot 30}{\cancel{12}\ 3} = \log 10 = 1$

d) $(\log 3 + \log 25) - \left(\frac{1}{2}\log 3 + \log 5\right) = \log(3\cdot 25) - \log 5\sqrt{3} = \log\frac{3\cdot\cancel{25}\ 5}{\cancel{5}\sqrt{3}} =$

$= \log\frac{15}{\sqrt{3}} = \log\frac{15\sqrt{3}}{3} = \log 5\sqrt{3}$

8. Calcula A, B, C y D en las siguientes expresiones:

(ESTRATEGIA: llegar a: $\log_b A = \log_b B \Leftrightarrow A = B$

OJO: ¡NO TACHAR logaritmos como si fuesen factores!)

a) $\log A = 3\log x + \log y - 2\log z \Rightarrow$

$\Rightarrow \log A = \log x^3 + \log y - \log z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log A = \log \dfrac{x^3 \cdot y}{z^2} \Leftrightarrow A = \dfrac{x^3 y}{z^2}$

b) $\log B = 4\log x - 5\log y + 2\log z \Rightarrow$

$\Rightarrow \log B = \log \dfrac{x^4 \cdot z^2}{y^5} \Leftrightarrow B = \dfrac{x^4 \cdot z^2}{y^5}$

c) $\log C = 2\log x - 3\log y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log C = \log x^2 - \log y^3 + \log 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log C = \log \dfrac{100x^2}{y^3} \Leftrightarrow C = \dfrac{100x^2}{y^3}$

d) $\log D = 2 - 3\log x + 3\log z \Rightarrow$

$\Rightarrow \log D = \log 100 - \log x^3 + \log z^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log D = \log \dfrac{100z^3}{x^3} \Leftrightarrow D = \dfrac{100z^3}{x^3} = 100\left(\dfrac{z}{x}\right)^3$

9. Expresa en función de log2 y de log 10 la expresión:

$\log 125 - \log 0{,}5 + 2\log 25 = \log 5^3 - \log \frac{1}{2} + \log (5^2)^2 =$

$= \log\left(\frac{10}{2}\right)^3 - \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{10}{2}\right)^4 = 3(\log 10 - \log 2) - (\log 1 - \log 2) + 4(\log 10 - \log 2) =$

$= 3(1 - \log 2) + \log 2 + 4(1 - \log 2) = 3 - 3\log 2 + \log 2 + 4 - 4\log 2 =$

$= 7 - 6\log 2$

10. Calcular sin calculadora:

a) $\log_5 \frac{25\sqrt{5}}{\sqrt[5]{125}} = \log_5 \frac{5^2 \cdot 5^{1/2}}{5^{3/5}} = \log_5 5^{\left(2+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)} = 2+\frac{1}{2}-\frac{3}{5} = \frac{20+5-6}{10} = \frac{19}{10}$

b) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_2 0{,}5 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

d) $\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{3/4} = \frac{3}{4}$

e) $\log_2 \frac{16}{\sqrt{64}} = \log_2 \frac{2^4}{2^3} = \log_2 2 = 1$

11. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar o agrupar:

a) $\log\left(\frac{a^2 \cdot b^3}{c^4}\right) = \log(a^2 \cdot b^3) - \log c^4 = \log a^2 + \log b^3 - \log c^4 = 2\log a + 3\log b - 4\log c$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{a^3}}{b^2 \cdot c^{-4}}\right) = \ln a^{3/2} - \left(\ln b^2 + \ln c^{-4}\right) = \frac{3}{2}\ln a - 2\ln b + 4\ln c$

c) $3\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - 3\log 3 - \log 25 = \log 5^3 + \log 9^{1/2} - \log 3^3 - \log 25 = \log \frac{5^{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}}{3^{\cancel{3}2} \cdot \cancel{5^2}} = \log \frac{5}{3^2}$

d) $\frac{1}{2}\log a - 2\log b - \log c - \frac{5}{2}\log d = \log \frac{\sqrt{a}}{b^2 \cdot c \cdot \sqrt{d^5}}$

e) $\log_2\left(\frac{a^4\, b^3}{\sqrt[5]{c^2}}\right) = 4\log_2 a + 3\log_2 b - \frac{2}{5}\log_2 c$

12. Usa el cambio de base y la calculadora para calcular:

a) $\log_5 80 = \frac{\log 80}{\log 5} = \frac{1{,}9031}{0{,}6990} = 2{,}7226$ ó $\log_5 80 = \frac{\ln 80}{\ln 5} = \frac{4{,}3820}{1{,}6094} = 2{,}7226$

b) $\log_{12} 100 = \frac{\log 100}{\log 12} = 1{,}8533$

c) $\log_5 200 = \frac{\log 200}{\log 5} = 3{,}2920$

d) $\log_{100} 40 = \frac{\log 40}{\log 100} = 0{,}8010$

e) $\log_3 \frac{3}{1/274} = \log_3 822 = \frac{\log 822}{\log 3} = 6,1093$

f) $\log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \log_3 \frac{3^{2/3}}{3^3} = \log_3 3^{2/3-3} = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$

CON CALCULADORA: $\log_3 \frac{\sqrt[3]{9}}{27} = \frac{\log(\sqrt[3]{9}/27)}{\log 3} = -\frac{7}{3}$

13. Expresa como un solo logaritmo:

a) $\log_2 5 - 3\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 9 = \log_2 \frac{5}{a^3} + \log_2 \sqrt[3]{9^7} = \log_2 \frac{5\sqrt[3]{9^7}}{a^3}$

b) $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h = \log \frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{h^5}}{t^2\cdot p} = \log \frac{\sqrt{mh^5}}{t^2 p}$

14. Calcula A: $\log A = 2\log 3 - \frac{1}{2}\log y + \frac{3}{4}\log x \Rightarrow \log A = \log \frac{3^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \frac{9\cdot\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}}$

15. Transforma la siguiente expresión algebraica en una expresión logarítmica:

$A = \frac{7x^3}{y^2} \Rightarrow \log A = \log \frac{7x^3}{y^2} = \log 7x^3 - \log y^2 = \log 7 + \log x^3 - 2\log y =$

$= \log 7 + 3\log x - 2\log y$

16. Sabiendo que $\log a = 0,123$ y que $\log b = 0,345$, calcula:

a) $\log \frac{a\cdot b^2}{\sqrt{a^5}} = \log a + 2\log b - \frac{5}{2}\log a = 2\log b + \left(1 - \frac{5}{2}\right)\log a =$

$= 2\cdot 0,345 - \frac{3}{2}\cdot 0,123 = 0,5055$

b) $\log \frac{3\sqrt{a^3}}{b^4} = \log(3\sqrt{a^3}) - \log b^4 = \log 3 + \frac{3}{2}\log a - 4\log b =$

$= \log 3 + \frac{3}{2}\cdot 0,123 - 4\cdot 0,345 = \log 3 - 1,1955 = -0,7184$

calculadora.

17. Sabiendo que $\log 2 \simeq 0{,}3$ y que $\log 3 \simeq 0{,}5$, calcula $\log \frac{0{,}12}{\sqrt{3}}$

$$\log \frac{0{,}12}{\sqrt{3}} = \log 0{,}12 - \log\sqrt{3} = \log(12\cdot 10^{-2}) - \frac{1}{2}\log 3 =$$
$$= \log 12 + \log 10^{-2} - \frac{1}{2}\log 3 = \log(2^2\cdot 3) + \log 10^{-2} - \frac{1}{2}\log 3 =$$
$$= 2\cdot\log 2 + \log 3 - 2\cdot\log 10 - \frac{1}{2}\log 3 = 2\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 - 2 =$$
$$\simeq 2\cdot 0{,}3 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5 - 2 \simeq -1{,}15$$

18. Sabiendo que $\log 5 \simeq 0{,}7$. Calcula:

a) $\log 500 = \log(5\cdot 100) = \log 5 + \log 100 \simeq 0{,}7 + 2 = 2{,}7$

b) $\log 2000 = \log \frac{10000}{5} = \log 10000 - \log 5 \simeq 4 - 0{,}7 = 3{,}3$

19. Aplica los logaritmos para resolver la ecuación exponencial:

$$3^{x+1} = 60 \Rightarrow 3\cdot 3^x = 60 \Rightarrow 3^x = 20 \Leftrightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\cdot\log 3 = \log 20 \Rightarrow x = \frac{\log 20}{\log 3} = 2{,}7268$$

20. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

b) $\log_9 1 = 0$

c) $\log_5\left(\frac{1}{625}\right) = \log_5 5^{-4} = -4$

d) $\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

e) $\log_{1/5}\left(\frac{1}{125}\right) = \log\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 3$

f) $\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

g) $\log \sqrt[5]{100} = \log 10^{2/5} = \frac{2}{5}$

h) $\log_6 \frac{1}{216} = \log_6 6^{-3} = -3$