Dadas las funciones:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula las composiciones de funciones.

a) $f \circ g$
b) $g \circ h$
c) $h \circ f$
d) $g \circ f$
e) $h \circ g$
f) $f \circ h$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$

$(f \circ g)(3) = 512$

b) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$

$(g \circ h)(3) = \frac{1}{9}$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2^x) = \frac{1}{2^x}$

$(h \circ f)(3) = \frac{1}{8}$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^{2x}$

$(g \circ f)(3) = 64$

e) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \frac{1}{x^2}$

$(h \circ g)(3) = \frac{1}{9}$

f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

$(f \circ h)(3) = \sqrt[3]{2}$

Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+1}\right) = 3\sqrt{x+1} - 2$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

Dom $(f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Dom $(g \circ f) = [-1, +\infty)$

Calcula la función inversa de cada función.

a) $y = 2x + 5$

b) $y = \frac{3 - x}{2}$

c) $y = \sqrt[3]{2x - 3}$

a) $y = 2x + 5 \rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$

b) $y = \frac{3 - x}{2} \rightarrow x = 3 - 2y \rightarrow f^{-1}(x) = 3 - 2x$

c) $y = \sqrt[3]{2x - 3} \rightarrow x = \frac{y^3 + 3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3}{2}$

Determina $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = \text{sen}\, x$ y $f^{-1}(x) = \text{arc sen}\, x$

e) $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$

a) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 1 = x + 2$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 1) = \frac{1}{3}(3x - 1) + 1 = x + \frac{2}{3}$

Las funciones no son inversas.

b) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x}$

Las funciones no son inversas.

c) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x$

Las funciones son inversas.

d) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\text{arc sen}\ x) = \text{sen}\ (\text{arc sen}\ x) = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\text{sen}\ x) = \text{arc sen}\ (\text{sen}\ x) = x$

Las funciones son inversas.

e) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x - 2}\right) = x - 2 + 2 = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = x$

Las funciones son inversas.