LÍMITES DE FUNCIONES

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = \infty$$ → Calculamos límites laterales

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{27+18-9}{27+36+3-6} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1+2-3}{1+4+1-6} = \frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} = \frac{1+3}{1+5+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{-27+18+9}{-27+36-3-6}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-x)}{(x+3)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{9+3}{9-3-2}=\frac{12}{4}=3$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2-4}=\frac{12-10-2}{4-4}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3(-2)-1}{-2-2}=\frac{7}{4}$$

Ejemplo 7

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}=\frac{\sqrt{9}-3}{3-3}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}\ \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{-1}{\sqrt{9}+3}=\frac{-1}{6}$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}=\frac{2\cdot 4-8}{\sqrt{25}-5}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}\ \rightarrow \text{Operar denominador}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2+9-25}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}\ \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)}=\frac{2(\sqrt{25}+5)}{4+4}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

Ejemplo 9

$$\lim_{x \to -2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{3-\sqrt{2\cdot(-2)^2+1}}{3(-2)-6} = \frac{3-\sqrt{9}}{-6-6} = \frac{0}{-12} = 0$$

Ejemplo 10

→ Indeterminación

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{(3-\sqrt{2x^2+1})(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$ → Operar numerador

$$\lim_{x \to 2} \frac{9-(2x^2+1)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x^2+8}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2(x^2-4)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{(3\mathrm{x}-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$ → Operar denominador

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{3(x-2)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)}{3(3+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{-2(2+2)}{3(3+\sqrt{2(2)^2+1})} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \frac{\frac{4}{4}+\frac{4}{2}-3}{\frac{4}{4}-1} = \frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x^2-\frac{1}{4})} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x+6}{4(x+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{4}{2}+6}{4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 2$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ → Indeterminación → Grado denominador > Grado numerador

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5} = 0$$

Ejemplo 14

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$$

Ejemplo 15

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ → Indeterminación → Grado numerador > Grado denominador

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3} = -\infty$$

Ejemplo 16

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}} = \frac{5}{1} = 5$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = 1$$

Ejemplo 18

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{25x^2-7}-5x)=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{25x^2-7}-5x)(\sqrt{25x^2-7}+5x)}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{25x^2-7-25x^2}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-7}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\frac{-7}{\infty}=0$$

Ejemplo 19

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5})=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5})=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+5-2x-8}{10}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-3}{10}=+\infty$$

Ejemplo 20

$\lim\limits_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim\limits_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(8x-\sqrt{16x^2+x-3})(8x+\sqrt{16x^2+x-3})}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{64x^2-16x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Grado numerador > Grado denominador

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\infty$$

Ejemplo 21. Encuentra el valor de a que verifica

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\frac{1}{3}$ → Debemos calcular el límite e igualar a $\frac{1}{3}$ para obtener a

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+ax}-2x)(\sqrt{4x^2+ax}+2x)}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2+ax-4x^2}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\frac{a}{4}$ → Igualamos el valor del límite a $\frac{1}{3}$

$\frac{a}{4}=\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad a=\frac{4}{3}$

Ejemplo 22

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x \to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-1}{2}$

Ejemplo 23

$\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

$\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{(4+x^2+4x)(2+x)-8}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{x^3+6x^2+12x}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3+6x^2+12x}{x}=\lim_{x \to 0} x^2+6x+12=12$

Ejemplo 24. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$f(x)=\begin{Bmatrix} -2x+8 & si & x\le 3 \\ 3x-7 & si & x>3 \end{Bmatrix}$

$\exists f(3)=-2\cdot 3+8=2$

$\lim_{x \to 3^-} -2x+8=2$

$\lim_{x \to 3^+} 3x-7=2$

$\lim_{x \to 3^-} f(x)=\lim_{x \to 3^+} f(x)=2=L$

$f(3)=L=2$

La función es continua en $x=3$

Ejemplo 25. Estudia la continuidad de la función en $x=-1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\leq -1 \\ -x+2 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

$$\exists f(-1)=(-1)^2-4=-3$$

$$\lim_{x \to -1^-} x^2-4=-3$$

$$\lim_{x \to -1^+} -x+2=3$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x)=-3\neq 3=\lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=-1$

Ejemplo 26. Estudia la continuidad de la función en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$$

$$\exists f(2)=3$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x \to 2^-}(x+2)=4 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}=4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)=\lim_{x \to 2^+} f(x)=4=L$$

$$f(2)=3\neq 4=L$$

Discontinuidad evitable en $x=2$

Ejemplo 27. Estudia la continuidad de la función en $x=-2$ ***y en*** $x=3$

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-2 \\ -x^2+6 & si \quad -2\leq x\leq 3 \\ 1 & si \quad x>3 \end{cases}$$

$$\exists f(-2)=-(-2)^2+6=-4+6=2$$

$$\lim_{x \to -2^-} 2=2$$

$$\lim_{x \to -2^+} (-x^2+6)=2$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x)=\lim_{x \to -2^+} f(x)=2=L$$

$$f(-2)=2=L$$

Función continua en $x=-2$

$\exists f(3)=-(3)^2+6=-9+6=-3$

$\lim_{x \to 3^-} (-x^2+6)=-3$

$\lim_{x \to 3^+} 1=1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x)=-3\neq 1=\lim_{x \to 3^+} f(x)$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=3$

Ejemplo 28

$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0}=\infty$ → Estudiamos los límites laterales

$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

Ejemplo 29. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{3x}{2x-2} & si \quad x\neq\frac{1}{2} \\ k & si \quad x=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$\exists f(\frac{1}{2})=k$

$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{3x}{2x-2}=\frac{-3}{2}$ → $\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{3x}{2x-2}=\frac{-3}{2}$

$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} f(x)=\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} f(x)=\frac{-3}{2}=L$

Por continuidad → $f(\frac{1}{2})=k=L$ → $k=\frac{-3}{2}$