

Continuidad de funciones

Una función es continua en todo su dominio si es continua en todos los puntos que componen el dominio.

Una función es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Y la pregunta del millón: ¿Cuándo es una función continua en un punto $x=x_0$? Cuando se cumplen los tres criterios siguientes.

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x=x_0$ si:

1. Está definida la función en el punto $\rightarrow \exists f(x_0)$
2. Existen los dos límites laterales y son iguales $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
3. El valor de la función en el punto es igual al valor del límite en el punto $\rightarrow f(x_0) = L$

Ejemplo

¿Es continua $f(x)=4x+5$ en el punto $x_0=2$?

Apliquemos los tres criterios de continuidad de la función en un punto.

1. $\exists f(2)=13$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L = 13$
3. $f(2) = 13 = L$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=2$.

Ejemplo

¿Es continua $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto $x_0=1$?

Apliquemos los tres criterios.

1. $\exists f(1) = 1+1 = 2$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2-1) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = L = 2$
3. $f(1) = 2 = L$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=1$.