FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

A veces, usamos funciones cuya fórmula es diferente según los valores de x.

Ejemplo 1

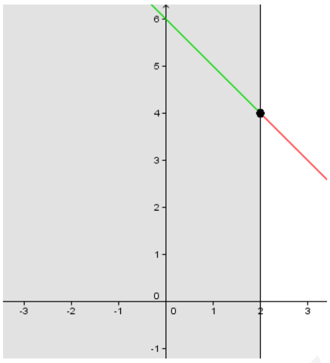
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ -x+6 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La actuación de esta función es como sigue. Cuando vamos a calcular la imagen de un x, comprobamos si es menor que 2, en cuyo caso uso la fórmula $y = x^2$, o si es mayor o igual que 2, donde usaríamos $y = -x + 6$. Así, una tabla de valores sería:

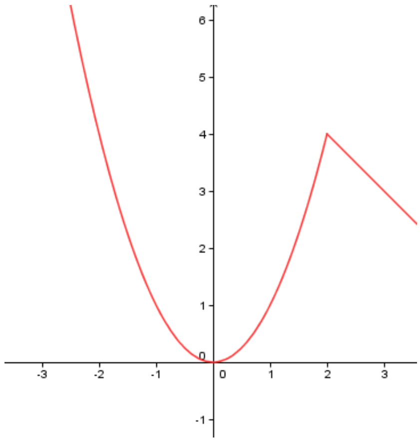
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	3	2

Al trazar la gráfica, dibujamos, en primer lugar, la de $y = x^2$ de la forma habitual, es decir, como lo haríamos si ésta fuera la única función que nos han dado. Pero nos limitamos a considerar sólo el trozo de gráfica que corresponde a aquellos valores para los que es válida: $x < 2 \iff x \in (-\infty, 2)$. Así, nos quedaremos únicamente con el trozo rojo de la gráfica, desechando el verde.

Nótese, además, que cuando $x = 2$, no corresponde usar la fórmula $y = x^2$, sino $y = -x + 6$, por lo que la imagen de $x = 2$ se ha dejado vacía, representando esto en la gráfica como un "punto exageradamente gordo vacío".

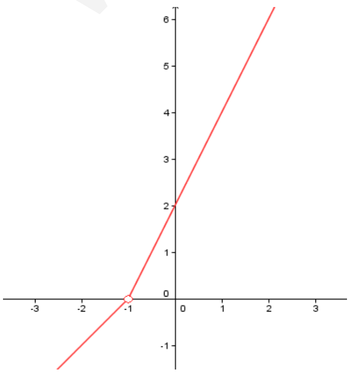


Análogamente, dibujamos la gráfica de $y = -x + 6$, quedándonos sólo con el trozo que corresponde a los valores de x para los que está definida, esto es: $x \geq 2 \iff x \in [2, +\infty)$, o sea, el trozo rojo, desechando el verde. En este caso, destacamos que la imagen de $x = 2$ sí corresponde a este trozo de gráfica mediante un "punto gordo relleno".



Ambos resultados deben combinarse sobre el mismo gráfico para obtener la gráfica definitiva de $f(x)$, que tenemos a nuestra derecha. Observar que el *punto gordo relleno* de uno de los trozos se superpone al *punto gordo vacío* del otro, por lo que la gráfica resulta una línea **continua**, sin ninguna interrupción.

Ejemplo 2

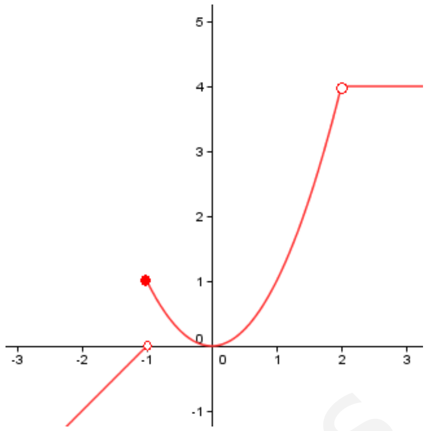


$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x < -1 \\ 2x+2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

Utilizando el mismo razonamiento, obtenemos la gráfica adjunta. Observar que, en este caso, $x = -1$ no tiene imagen, porque la función no está definida en el caso de que x tome dicho valor. Destacamos tal circunstancia en la gráfica mediante un *punto grueso vacío*. En tal caso, la gráfica **no es continua**, puesto que presenta una interrupción en su trazado al pasar por dicho punto, de coordenadas $(-1, 0)$.

Ejemplo 3

$$h(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x<-1 \\ x^2 & si \quad -1\le x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$



La gráfica sería la adjunta. Observar cómo se han destacado con puntos rellenos o vacíos si los extremos de cada tramo tienen imagen o no la tienen.

Esta gráfica presenta, en su trazado, recorriéndolo siempre de izquierda a derecha, presenta una **discontinuidad al pasar por** $x = -1$, donde da un **salto** vertical, y **al pasar por** $x = 2$, puesto que ahí tiene un **hueco**, de coordenadas $(2, 4)$. En el resto, la gráfica es **continua**.

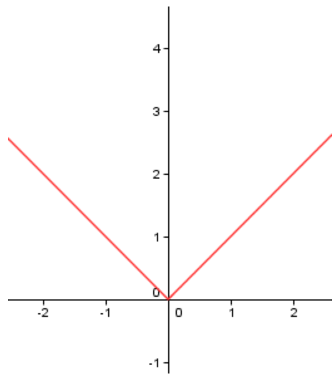
Ejemplo 4

La siguiente:

$$h(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\le -1 \\ x^2 & si \quad -1\le x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

es una función mal definida, porque $x = -1$ tendría dos imágenes distintas, y sabemos que esto no puede darse en una "*función*".

Ejemplo 5

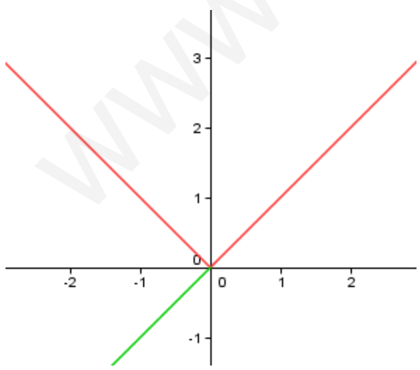


Algunas funciones pueden expresarse como si estuvieran definidas a trozos. Es el caso de los valores absolutos. Así, la función $y = |x|$ equivale a:

$$y=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Observar, además, que el caso $x = 0$ podríamos haberlo considerado tanto arriba como abajo, con idéntico resultado. Lo que no debe hacerse es considerarlo en ambos.

La gráfica es **continua**, puesto que no tiene ninguna interrupción en su trazado, recorrida de izquierda a derecha, como siempre.

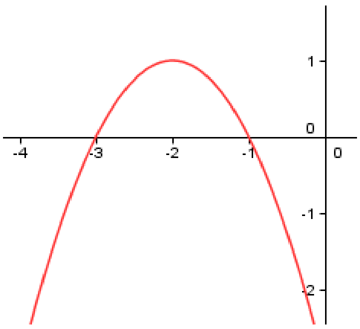


En general, las funciones *valores absolutos de una expresión* se pueden dibujar muy fácilmente trazando la gráfica de la función como si no tuviera *valor absoluto* y cambiando los trozos que queden bajo el eje OX por sus simétricos respecto a dicho eje. Por ejemplo, en este caso, dibujaríamos $y = x$ cambiando el trozo que queda bajo el eje OX, trazado en verde, por su simétrico correspondiente sobre el eje OX (en rojo, a la izquierda de OY).

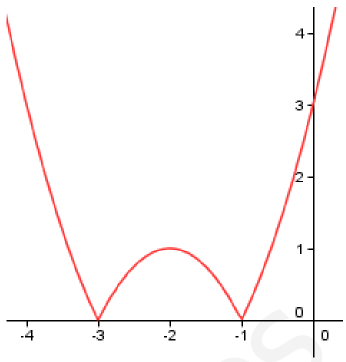
Ejemplo 6

Dibujemos la gráfica de $y = |-x^2 - 4x - 3|$.

Dibujamos esta función, sin valor absoluto: $y = -x^2 - 4x - 3$. Es una parábola cóncava, porque el coeficiente de x^2 es negativo, y corta al eje OX en $x = -3$ y en $x = -1$. Se obtiene, así, de forma aproximada, la gráfica que está dibujada a continuación, en la zona izquierda.



Según lo comentado antes, trazando los simétricos respecto al eje OX de los trozos de gráfica que quedan bajo el mismo, la gráfica de la función con valor absoluto es la de la derecha.



Pero para ciertos razonamientos, nos interesa transformar la expresión en su equivalente como función definida a trozos. Para ello, recurrimos a la definición de valor absoluto de una expresión:

$$|z| = \begin{cases} -z & si \quad z < 0 \\ z & si \quad z \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto, sustituyendo z por lo que nos interesa:

$$y = |-x^2 - 4x - 3| = \begin{cases} -(-x^2 - 4x - 3) & si \quad -x^2 - 4x - 3 < 0 \\ -x^2 - 4x - 3 & si \quad -x^2 - 4x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Esto requiere resolver inecuaciones polinómicas de segundo grado. Esto puede hacerse mirando la gráfica de $y = -x^2 - 4x - 3$ y observando para qué valores de x está por encima o por debajo del eje OX). Como consecuencia, lo anterior equivale a:

$$y = |-x^2 - 4x - 3| = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & si \quad x < -3 \text{ ó } x > -1 \\ -x^2 - 4x - 3 & si \quad -3 \leq x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & si \quad x < -3 \\ -x^2 - 4x - 3 & si \quad -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 4x + 3 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

En el caso de esta función de segundo grado cuya gráfica es muy fácil de obtener, se podría haber razonado sobre la misma y obtener este último resultado. Si la gráfica no fuera conocida, éste sería el razonamiento general.