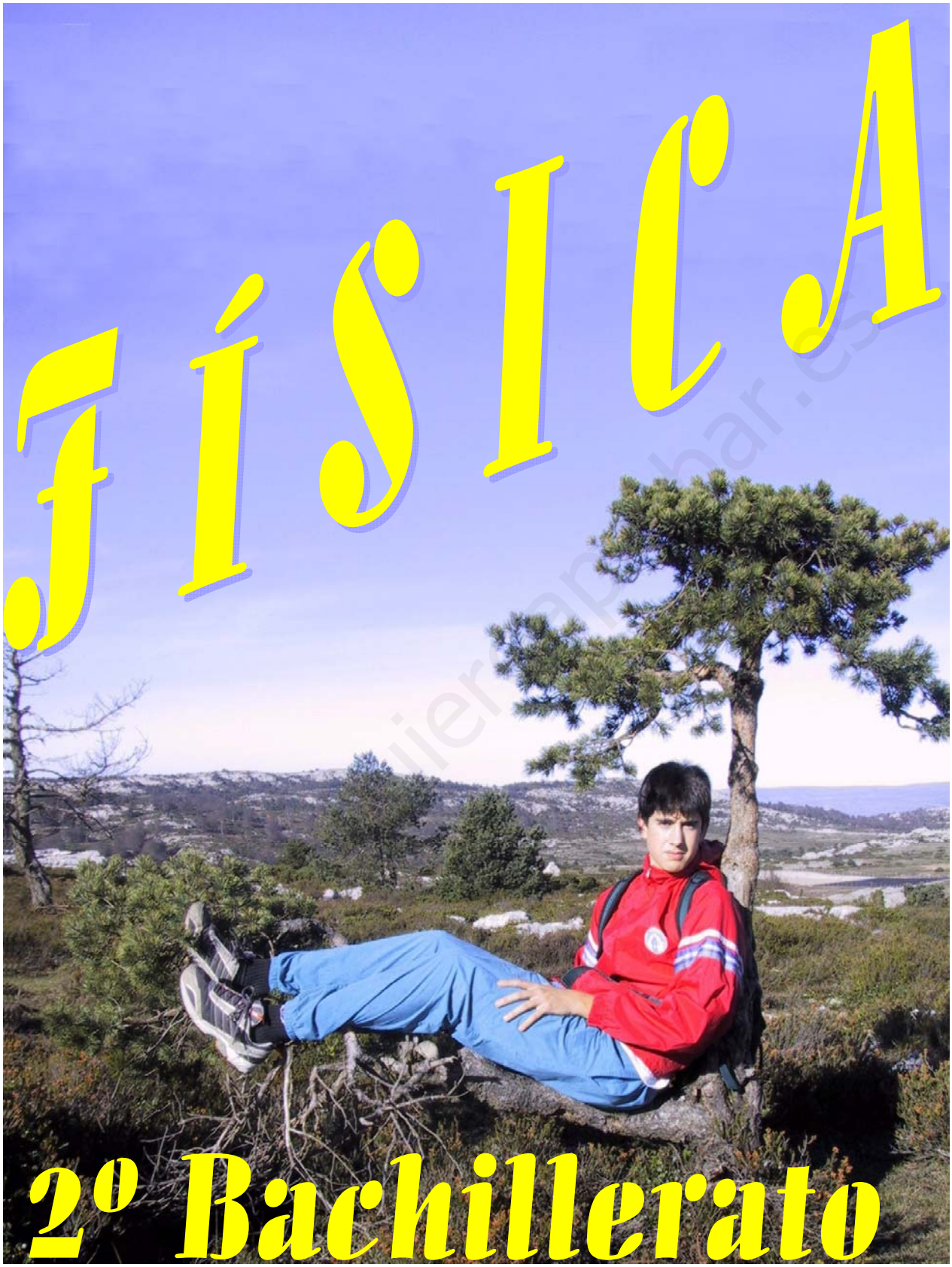
FÍSICA



2º Bachillerato

PLAN GENERAL

UNIDAD I.- MECÁNICA DEL PUNTO MATERIAL

- **Tema 1:** Elementos de Cálculo Vectorial
- **Tema 2:** Cinemática del Punto Material
- **Tema 3:** Dinámica del Punto Material

UNIDAD II.- VIBRACIONES Y ONDAS

- **Tema 4:** Oscilador armónico
- **Tema 5:** Fenómenos ondulatorios
- **Tema 6:** Sonido

UNIDAD III.- ÓPTICA

- **Tema 7:** Introducción
- **Tema 8:** Óptica geométrica I: Principios y representación
- **Tema 9:** Óptica geométrica II: Espejos y lentes.- Instrumentos
- **Tema 10:** Óptica física: Ondas luminosas

UNIDAD IV.- INTERACCIONES

- **Tema 11:** Interacción gravitatoria: campo gravitatorio
- **Tema 12:** Interacción electromagnética: campo eléctrico
- **Tema 13:** Interacción electromagnética: campo magnético
- **Tema 14:** Inducción magnética
- **Tema 15:** Ondas electromagnéticas

UNIDAD V.- INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA MODERNA

- **Tema 16:** Crisis de la Física Clásica
- **Tema 17:** Introducción a la Física del Núcleo
- **Tema 18:** Física de Partículas.

APÉNDICES

Pruebas de Acceso a la Universidad.- UPV

- por fechas
- por materias

www.yoquieroaprobar.es

PROGRAMA OFICIAL DE LA ASIGNATURA

(BOPV – viernes 27 de febrero de 2009)

Bloques de contenidos

Bloque 1.– Contenidos comunes.

– Criterios y pautas para el planteamiento de cuestiones y situaciones problemáticas de carácter científico, la formulación de hipótesis, la identificación de evidencias y pruebas científicas, la identificación y control de variables, el diseño experimental, la comunicación de resultados y la interpretación crítica de los mismos.

– Técnicas fundamentales para el trabajo experimental y normas de seguridad en los laboratorios.

– Normas para realizar trabajos en grupo de forma cooperativa, para organizar debates y participar en las discusiones que surjan sobre los temas elegidos.

– Criterios para la búsqueda, selección y organización de información científica en distintas fuentes y formatos, tanto impresos como digitales.

– Instrucciones para elaborar informes y monografías, en formato impreso y digital, sobre los temas científicos elegidos.

– Procedimientos para la captación, gestión y comunicación de datos experimentales asistida por ordenador.

– Actitudes propias del trabajo científico: rigor y precisión en el trabajo experimental, exactitud en la utilización del lenguaje científico, responsabilidad en las tareas de grupo, y esfuerzo y tenacidad en el trabajo personal.

– Reconocimiento de la dependencia vital del ser humano respecto de la naturaleza, de la problemática medioambiental y de la agotabilidad de los recursos y la asunción de los valores medioambientales, así como disposición favorable y prioritaria para actuar a favor del desarrollo sostenible.

– Superación de las visiones simplistas sobre la ciencia, de la visión estereotipada de las personas que se dedican a la actividad científica y de la descontextualización social e histórica de los conocimientos científicos.

– Reconocimiento de la contribución de la actividad e investigación científica a la cultura universal, al desarrollo del pensamiento humano y al bienestar de la sociedad.

Bloque 2.– Vibraciones y ondas.

– Movimiento oscilatorio: el movimiento vibratorio armónico simple. Estudio experimental de las oscilaciones del muelle.

– Movimiento ondulatorio. Clasificación y magnitudes características de las ondas. Ecuación de las ondas armónicas planas. Aspectos energéticos.

– Principio de Huygens. Reflexión y refracción. Estudio cualitativo de difracción, interferencias y polarización.

Ondas estacionarias.

– Ondas sonoras. Cualidades del sonido. Ondas sonoras estacionarias. Efecto Doppler. Contaminación acústica, sus fuentes y efectos.

– Aplicaciones de las ondas al desarrollo tecnológico y a la mejora de las condiciones de vida. Impacto en el medio ambiente.

Bloque 3.– Óptica.

– Dependencia de la velocidad de la luz con el medio.

– Algunos fenómenos producidos con el cambio de medio: reflexión, refracción, absorción y dispersión.

– Óptica geométrica: visión y formación de imágenes en espejos y lentes delgadas. Pequeñas experiencias con las mismas.

– Fenómenos de difracción, interferencias y polarización.
– Controversia histórica sobre la naturaleza de la luz. Modelos corpuscular y ondulatorio.
– Aplicaciones médicas y tecnológicas de la óptica.

Bloque 4.– Interacción gravitatoria.

– Ley de la gravitación universal: una revolución científica que modificó la visión del mundo.
– Ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Conservación del momento angular. Deducción de las leyes de Kepler.
– El trabajo de las fuerzas conservativas. Energía potencial gravitatoria. Conservación de la energía mecánica.
– El problema de las interacciones a distancia y su superación mediante el concepto de campo gravitatorio.
Magnitudes que lo caracterizan: intensidad y potencial gravitatorio.
– La gravedad terrestre y la determinación experimental de g. Movimiento de los satélites y cohetes.

Bloque 5.– Interacción electromagnética.

– Campo eléctrico. Magnitudes que lo caracterizan: intensidad de campo y potencial eléctrico.
– Relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Campos magnéticos creados por corrientes eléctricas: experiencia de Öersted. Fuerzas magnéticas: ley de Lorentz e interacciones magnéticas entre corrientes rectilíneas.
Experiencias con bobinas, imanes, motores, etc. Magnetismo natural. Analogías y diferencias entre campos gravitatorio, eléctrico y magnético.
– Inducción electromagnética: leyes de Faraday y Lenz. Producción de energía eléctrica, impactos y sostenibilidad.
Energía eléctrica de fuentes renovables.
– Aproximación histórica a la síntesis electromagnética de Maxwell.

Bloque 6.– Introducción a la Física moderna.

– La crisis de la Física clásica. Postulados de la Relatividad Especial. Repercusiones de la Teoría de la Relatividad.
– El efecto fotoeléctrico y los espectros discontinuos: insuficiencia de la Física clásica para explicarlos. La discontinuidad de la energía: el concepto de cuanto de Planck y Einstein. Hipótesis de De Broglie. Relaciones de indeterminación. Valoración del desarrollo científico y tecnológico que supuso la Física cuántica.
– Física nuclear. La energía de enlace. Radioactividad: tipos, repercusiones y aplicaciones. Reacciones nucleares de fisión y fusión, aplicaciones y riesgos.
– Aproximación al modelo estándar de partículas elementales y a las ideas actuales sobre el origen y evolución del Universo.

www.quieroaprobar.es

CONTENIDOS

Unidad I: Mecánica del Punto Material

Tema 1.- Elementos de Cálculo vectorial

+ Magnitudes vectoriales
+ Vectores: definiciones
+ Clases de vectores
+ Adición de vectores
+ Multiplicación por un número real
+ Propiedades
+ Consecuencias
+ Vectores en el espacio tridimensional: componentes cartesianas
+ Producto escalar de dos vectores
+ Producto vectorial de dos vectores
+ Derivada de un vector respecto de un escalar

Tema 2.- Cinemática del Punto Material

+ La Mecánica y sus partes
+ Posición
+ Velocidad
+ Aceleración: componentes intrínsecas
+ Movimiento rectilíneo: MRU, MRUA, MAS
+ Movimiento circular: MCU, MCUA

Tema 3.- Dinámica del Punto Material

+ Introducción
+ Momento lineal e impulso mecánico
+ Momento angular e impulso angular
+ Energía cinética y trabajo
+ Potencia mecánica
+ Campos escalares y vectoriales. Representación
+ Fuerzas conservativas.- Energía potencial
+ Energía mecánica.- Conservación
+ Ejemplos: Energía potencial gravitatoria y energía potencial de un resorte
+ Fuerzas no conservativas.- Fuerzas disipativas
+ Teorema de la energía mecánica
+ Campos de fuerzas: Intensidad de campo
+ Potencial
+ Gradiente de potencial
+ Flujo de un campo vectorial.- Teorema de Gauss

Unidad II: Vibraciones y Ondas

Tema 4.- Oscilador armónico

+ Fenómenos periódicos
+ Cinemática del movimiento vibratorio
+ Dinámica del movimiento vibratorio: Resorte elástico y péndulo simple

www.yoquieroaprobar.es

Tema 5.- Fenómenos ondulatorios
+ Propagación de una perturbación
+ Ondas armónicas
+ Superposición de ondas de igual frecuencia
+ Ondas estacionarias.- Aplicaciones a cuerdas vibrantes y tubos sonoros
+ Ondas en el espacio: conceptos
+ Energía de una onda
+ Principio de Huygens
+ Algunas propiedades de las ondas:
    - Reflexión y refracción.- Interferencias.- Difracción.- Polarización.

Tema 6.- Sonido
+ Naturaleza del sonido
+ Intensidad sonora y sonoridad
+ Algunas propiedades del sonido
+ Características del sonido
+ El efecto Doppler
+ Contaminación acústica

Unidad III: Óptica

Tema 7.- Naturaleza de la luz
+ Naturaleza de la luz: Teorías
+ Óptica
+ Velocidad de la luz

Tema 8.- Óptica geométrica I
+ Leyes generales.- Definiciones
+ Reflexión y refracción
+ Reflexión total
+ Láminas de caras planas.- El prisma óptico
+ Representación óptica.- Definiciones
+ Dióptrio esférico
+ Óptica paraxial

Tema 9.- Óptica geométrica II
+ Espejos
+ Lentes delgadas
+ Instrumentos ópticos, clasificación
+ El ojo humano
+ La cámara fotográfica
+ El aparato de proyección
+ La lupa
+ El microscopio
+ El anteojo astronómico
+ Los anteojos terrestres: catalejo, anteojo de Galileo, prismáticos
+ Los telescopios

www.yoquieroaprobar.es

Tema 10.- Óptica Física (ondas luminosas)
+ Interferencias luminosas
+ Difracción de la luz
+ Polarización de la luz
+ Dispersión de la luz
+ Aplicaciones de la Óptica: instrumentación, tecnologías modernas, ...

Unidad IV: Interacciones

Tema 11.- Interacción gravitatoria
+ Interacciones y Campos
+ Ley de la gravitación universal
+ Campo gravitatorio: Intensidad del campo y potencial
+ Campo gravitatorio: Ley de Gauss
+ Esfera gravitatoria: Campo y potencial
+ Esfera terrestre: Puntos próximos a la superficie
+ Movimiento en un campo gravitatorio: Leyes de Kepler
+ Movimiento en un campo gravitatorio: Planetas y satélites

Tema 12.- Interacción electromagnética: Campo eléctrico
+ Interacción eléctrica: Ley de Coulomb
+ Campo eléctrico: Intensidad del campo y potencial
+ Campo eléctrico: Ley de Gauss
+ Conductor en equilibrio electrostático
+ Teorema de Gauss: Otras aplicaciones
+ Campo eléctrico uniforme
+ Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el campo eléctrico.

Tema 13.- Interacción electromagnética: Campo magnético
+ Interacción magnética
+ Campo magnético
+ Acción del campo magnético sobre corrientes:
    - Fuerza sobre un elemento de corriente
    - Fuerza sobre una corriente rectilínea
    - Fuerza sobre una espira
    - Aplicaciones: trayectorias de las cargas, experimento de Thomson, espectrógrafo de masas, acelerador de partículas (el ciclotrón)
+ Campo magnético creado por corrientes
    - Campo magnético creado por una carga en movimiento
    - Campo magnético creado por un elemento de corriente
    - Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida
    - Campo magnético creado por una corriente circular en puntos del eje
+ Circulación del campo magnético: Ley d'Ampère
+ Fuerzas entre corrientes rectilíneas. Definición de amperio.
+ Magnetización de la materia
+ Analogías y diferencias entre los campos: gravitatorio, eléctrico y magnético.

www.yoquieroaprobar.es

Tema 14.- Inducción magnética
+ Flujo magnético
+ Leyes de la inducción magnética, de Faraday y Lenz: fem inducida.
+ Autoinducción
+ Circuitos acoplados: Inducción mutua
+ Generación y transporte de corrientes alternas
+ Fuentes de energía eléctrica

Tema 15.- Ondas electromagnéticas
+ Síntesis electromagnética de Maxwell
+ Ondas electromagnéticas.
+ Espectro electromagnético

Unidad V: Introducción a la Física Moderna

Tema 16.- Crisis de la Física Clásica
+ Experimento de Michelson-Morley: Postulados de la relatividad especial
+ Absorción de radiación del cuerpo negro: Teoría de Planck
+ Espectros discontinuos y átomo de Bohr
+ Efecto fotoeléctrico
+ Efecto Compton
+ Hipótesis de De Broglie: dualidad corpúsculo-onda.

Tema 17.- Introducción a la Física del Núcleo
+ Las interacciones fundamenteles.
+ Física del nucleo: definiciones
+ Energías de enlace y fuerzas nucleares
+ Radiactividad natural:
    - Partículas radiactivas.
    - Modos de desintegración
    - Series radiactivas
    - Ley de desintegración radiactiva
+ Radiactividad artificial:
    - Fisión nuclear: Reactores nucleares.- Bomba atómica
    - Fusión nuclear: Energía por fusión.- Bomba de hidrógeno
+ Energía nuclear: ventajas e inconvenientes

Tema 18.- Partículas elementales
+ Modelo Estándar de la Física de Partículas
+ Unificación de las Interacciones Fundamentales
+ Acerca del origen del Universo: Teoría del Big-Bang

APÉNDICES

+ Pruebas de Acceso a la Universidad.- UPV
    - por fechas
    - por materias

www.yoquieroaprobar.es

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (S.I.)

El Sistema Internacional de unidades (SI) está basado en el antiguo sistema métrico decimal. Se ha desarrollado posteriormente en una serie de conferencias y acuerdos internacionales que han tenido por objeto proporcionar un conjunto de unidades lógico y coherente para todas las medidas científicas, industriales y comerciales.
Se definen operacionalmente siete ***unidades básicas***.- Las demás unidades se denominan **unidades derivadas** porque se definen en función de estas unidades fundamentales. Por ejemplo, la unidad de velocidad es el m/s y la unidad de densidad es el kg/m^3.

Por el Real Decreto 27 Octubre 1989, Num. 1317/1989 (Mº Obras Públicas y Urbanismo) se establece el control metrológico CEE y se determinan como Unidades Legales de Medida las unidades básicas, suplementarias y derivadas del Sistema Internacional de Unidades (SI), adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas vigente en la Comunidad Económica Europea.

a) Unidades Básicas, en el SI:

Magnitud fundamental	*Unidad fundamental*	*Simbolo*	*Definición operacional*
Longitud	**metro**	**m**	1 metro es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1 / 299 792 458 de segundo.
Masa	**kilogramo**	**kg**	1 kilogramo es la masa del prototipo internacional del kilogramo (kilogramo patrón).
Tiempo	**segundo**	**s**	1 segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133.
Intensidad de corriente eléctrica	**amperio**	**A**	1 amperio es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de 1 metro uno de otro, en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a $2x10^{-7}$ newtons por metro de longitud.
Temperatura termodinámica	**kelvin**	**K**	1 kelvin es la fracción 1 / 273'16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Cantidad de sustancia	**mol**	**mol**	1 mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0'012 kg de carbono-12.

www.yoquieroaprobar.es

Intensidad luminosa	**candela**	**cd**	1 candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1 / 683 watt por estereorradián

b) Unidades Suplementarias, en el SI:

Magnitud	*Unidad*	*Simb.*	*Definición operacional*
Ángulo plano	**radián**	**rad**	1 radián es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio
Ángulo sólido	**estereorradián**	**sr**	1 estereorradián es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera.

c) Algunas unidades SI derivadas (de nombres especiales):

Magnitud	*Unidad*	*Simb.*	*Expresión en otras unidades*	*Expresión en unidades básicas*
Frecuencia	**hercio**	**Hz**	-	s^{-1}
Fuerza	**newton**	**N**	-	$m.kg.s^{-2}$
Presión, tensión	**pascal**	**Pa**	$N.m^{-2}$	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energía, trabajo, calor	**julio**	**J**	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Potencia, flujo radiante	**vatio**	**W**	$J.s^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}$
Carga eléctrica	**culombio**	**C**	-	s.A
Potencial eléctrico, fem	**voltio**	**V**	$W.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Resistencia eléctrica	**ohmio**	**Ω**	$V.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Conductancia eléctrica	**siemens**	**S**	$A.V^{-1}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
Capacidad eléctrica	**faradio**	**F**	$C.V^{-1}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
Flujo magnético	**weber**	**Wb**	V.s	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
Inducción magnética	**tesla**	**T**	$Wb.m^{-2}$	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
Inductancia	**henrio**	**H**	$Wb.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
Flujo luminoso	**lumen**	**lm**	-	cd.sr
Iluminancia	**lux**	**lx**	$lm.m^{-2}$	m^{-2}. cd.sr
Actividad radiactiva	**becquerel**	**Bq**	-	s^{-1}

PREFIJOS para la formación de MÚLTIPLOS y SUBMÚLTIPLOS de las unidades S.I.:

Los prefijos de la tabla inferior pueden combinarse con cualquier unidad SI para obtener múltiplos o submúltiplos de las mismas. Cada prefijo indica la multiplicación de la unidad SI por una potencia especificada de 10. La tabla siguiente presenta nombres y factores de conversión de dichos prefijos:

Pref.	*Simb.*	*Factor*		*Pref.*	*Simb.*	*Factor*
deci-	**d**	10^{-1}		**deca-**	**da**	10^{1}
centi-	**c**	10^{-2}		**hecto-**	**h**	10^{2}
mili-	**m**	10^{-3}		**kilo-**	**k**	10^{3}
micro-	**μ**	10^{-6}		**mega-**	**M**	10^{6}
nano-	**n**	10^{-9}		**giga-**	**G**	10^{9}
pico-	**p**	10^{-12}		**tera-**	**T**	10^{12}
femto-	**f**	10^{-15}		**peta-**	**P**	10^{15}
atto-	**a**	10^{-18}		**exa-**	**E**	10^{18}

CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTALES

Los datos han sido extraídos de REVIEW OF PARTICLE PROPERTIES, Phys. Rev. D 50 (Particles and Fields) 1173-1826 (1994).
Cuando no se incluyen errores, los dígitos consignados (salvo tal vez el último) son significativos.
Los valores de la velocidad c, la permitividad ε_0 y la permeabilidad μ_0 son números exactos.

Magnitud	*Símbolo*	*Valor*
Velocidad de la luz en el vacío	**c**	299 792 458 m/s
Constante de Planck	**h**	6'62608 x 10^{-34} J.s
Constante reducida de Planck	**$\hbar = h/2\pi$**	1'054573 x 10^{-34} J.s
Constante de Boltzmann	**k_B**	1'38066 x 10^{-23} $J.K^{-1}$
Constante de Avogadro	**N_A**	6'02214 x 10^{23} mol^{-1}
Constante de los gases ideales	**R**	8'3145 $J.mol^{-1}.K^{-1}$ = 0'082058 $atm.l.mol^{-1}.K^{-1}$
Volumen molar, gas ideal en c.n.	**V_0**	22'414 x 10^{-3} $m^3.mol^{-1}$
Unidad de masa atómica	**u**	1'66054 x 10^{-27} kg
Carga elemental	**e**	1'602177 x 10^{-19} C
Masa del electrón	**m_e**	9'10939 x 10^{-31} kg = 5'48580 x 10^{-4} u
Masa del protón	**m_p**	1'67262 x 10^{-27} kg = 1'0072765 u
Masa del neutrón	**m_n**	1'67493 x 10^{-27} kg = 1'0086649 u
Carga específica del electrón	**e/m_e**	1'75882 x 10^{11} C/kg
Permitividad del vacío	**ε_0**	8'854187817... x 10^{-12} $F.m^{-1}$
Permeabilidad del vacío	**μ_0**	$4\pi.10^{-7}$ $N.A^{-2}$ = 12'56637961... x 10^{-7} $N.A^{-2}$
Constante de Coulomb	**$k = 1/4\pi\varepsilon_0$**	$10^{-7}c^2$ $N.A^{-2}$ = 8'98755178...x 10^9 $N.m^2\ C^{-2}$
Constante de Rydberg	**R_∞**	1'09737 x 10^7 m^{-1}
Constante de gravitación universal	**G**	6'673 x 10^{-11} $N.m^2.kg^{-2}$
Aceleración estándar gravedad	**g**	9'80665 $m.s^{-2}$
Radio de Bohr	**a_0**	5'29177 x 10^{-11} m
Magnetón de Bohr	**μ_B**	9'27408 x 10^{-24} $J.T^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	**σ**	5'6703 x 10^{-8} $W.m^{-2}.K^{-4}$

www.yoquieroaprobar.es

FÍSICA

2º Bachillerato
. Ciencias de la Naturaleza
. Tecnología

UNIDAD I :

Mecánica del Punto Material

TEMA 1.-
Elementos de Cálculo Vectorial

TEMA 2.-
Cinemática del Punto Material

TEMA 3.-
Dinámica del Punto Material

Valentín Laconcha Abecia, S.M.
Doctor en C. Físicas

T E M A 1.-

ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

SUMARIO:

1.1.- Magnitudes vectoriales
1.2.- Vectores: definiciones
1.3.- Clases de vectores
1.4.- Adición de vectores
1.5.- Multiplicación por un número real
1.6.- Propiedades
1.7.- Consecuencias
1.8.- Vectores en el espacio tridimensional: componentes cartesianas
1.9.- Producto escalar de dos vectores
1.10.- Producto vectorial de dos vectores
1.11.- Derivada de un vector respecto de un escalar

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

www.yoquieroaprobar.es

1.- MAGNITUDES VECTORIALES

En general, las magnitudes físicas se pueden clasifican en **escalares** y **vectoriales**, según los datos que se precisen para definirlas y para medirlas.

Magnitudes escalares: Muchas cantidades físicas quedan completamente definidas cuando para su medida se les asigna un número real que expresa su intensidad respecto de alguna unidad conveniente, de su misma naturaleza, con la que se las compara. Se denominan magnitudes escalares.

Ej.: longitud de una varilla, d = 2'35 metros; duración de una canción, t = 3'28 minutos.

Magnitudes vectoriales: Otras cantidades físicas requieren para su determinación dar:

+ un número real que exprese su comparación con una unidad adoptada (como en las magnitudes escalares). Se le denomina *módulo o intensidad* de la magnitud vectorial. Ej.: la velocidad de una moto es 108 km/h

+ datos que especifiquen su *dirección* y *sentido*. Ej.: la velocidad de la moto anterior está dirigida de norte a sur (dirección), hacia el sur (sentido).

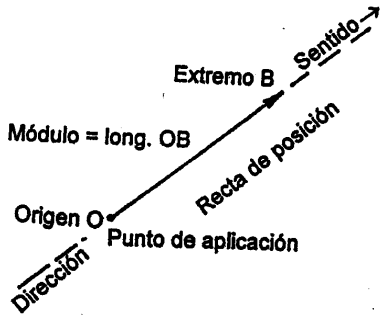
En el estudio de las *magnitudes escalares*, el físico hace uso del formalismo matemático que le proporciona el *Álgebra de los números reales*.

En cambio, para el estudio de las *magnitudes vectoriales* acude al *Álgebra vectorial*, ciencia que toma como elemento básico el **vector**, ente matemático que consta de módulo o intensidad, dirección y sentido (como veremos). La Física aprovecha esta Álgebra para representar y operar con las diversas magnitudes vectoriales: fuerzas, velocidades, aceleraciones, ...

2.- VECTORES: DEFINICIONES

Vector: es un *segmento orientado*. Por tanto, consta al menos de un *módulo* o intensidad (longitud del segmento), de una *dirección* y de un *sentido*. Se expresa mediante una o varias letras, superponiéndoles una flechita, o escribiéndolas en *negrita*:

$\vec{a}$ **a** $\overrightarrow{OB}$

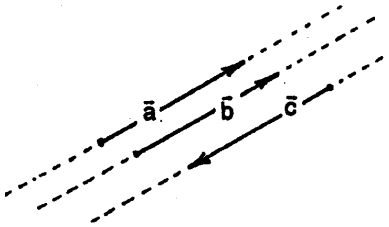


Su módulo se expresa así:

a $|\vec{a}|$ $|\mathbf{a}|$ OB Mod($\vec{a}$)

Vectores iguales: $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales sii tienen igual módulo, dirección y sentido. Se expresa así: $\vec{a} = \vec{b}$
(sii quiere decir "si y sólo si").

Vectores opuestos: $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son opuestos sii tienen igual módulo y dirección, pero son de sentido contrario.



Versor o **vector unitario**, o vector unidad: es aquél cuyo módulo es 1. Se expresa de diferentes formas; por ejemplo, el vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{a}$ puede escribirse: $\vec{u}_a$, o bien $\hat{a}$.

www.yoquieroaprobar.es

Por definición pues se tendrá: $|\vec{u}_a| = |\hat{a}| = 1$

Vector nulo, $\vec{0}$. El vector $\vec{0}$ es nulo sii $|\vec{0}| = 0$

3.- CLASES DE VECTORES

En Física, según la magnitud que representen, los vectores pueden ser:

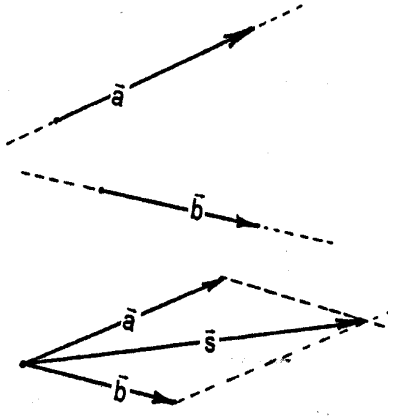
- **libres**: Para definirlos bastan los tres elementos anteriormente citados: *módulo*, *dirección* y *sentido*. Su punto de aplicación se sitúa en cualquier punto del espacio. Por tanto, un vector libre no varía cuando se traslada en el espacio paralelamente a sí mismo.

- **deslizantes** o **cursores**: el vector requiere para su definición, además de determinar su *módulo*, *dirección* y *sentido*, su *recta de posición*. Por tanto, un cursor puede deslizarse por su recta de posición; pero no puede salir de ella, pues resultaría otro vector diferente.

- **fijos** o **ligados** a un punto: tienen su *punto de aplicación* definido. Por consiguiente, no pueden ser desplazados de su posición en el espacio.

Dos vectores cualesquiera (libres, cursores o fijos) que tienen igual módulo, dirección y sentido se denominan **equipolentes**.

4.- ADICIÓN DE VECTORES



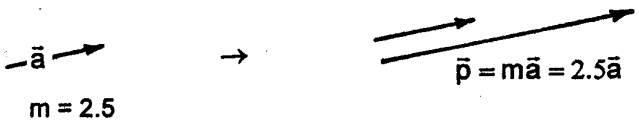
Def.: Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se define su **suma** $\vec{s}$, y se expresa $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, como un vector establecido así:

+ se llevan $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a coincidir sus orígenes.
+ se construye el paralelogramo que determinan.
+ el vector diagonal, de origen común, es el vector suma $\vec{s}$.

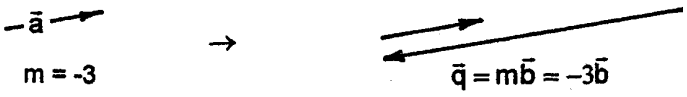
5.- MULTIPLICACIÓN POR UN Nº REAL

Def.: Dado el vector $\vec{a}$ y el nº real m, se define el **producto** de $\vec{a}$ por m, y lo expresamos $\vec{p} = m\,\vec{a}$, como un vector establecido así:

+ su módulo es $p = |m|\,a$
+ su dirección es la del vector $\vec{a}$
+ su sentido es el de $\vec{a}$ si $m > 0$,
  u opuesto al de $\vec{a}$ si $m < 0$



Ejemplos: véanse las figuras adjuntas



www.yoquieroaprobar.es

6.- PROPIEDADES

Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y los números reales m y n, se verifican las propiedades:

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c) $m\vec{a} = \vec{a}m$ d) $m(n\vec{a}) = (m\,n)\vec{a}$

e) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ f) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

7.- CONSECUENCIAS:

i) **Vector opuesto**: Dado $\vec{a}$, el vector $-\vec{a}$ es el anteriormente definido como vector opuesto al $\vec{a}$. En efecto,

$$-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$$

ii) **Resta** de dos vectores: la **diferencia** $\vec{d}$ de dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es el vector **suma** de $\vec{a}$ más el opuesto al $\vec{b}$:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

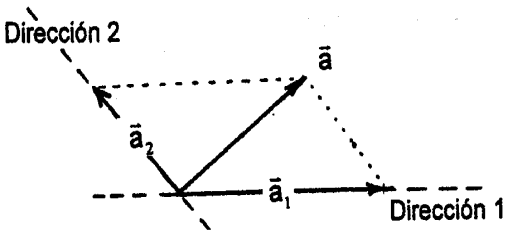
iii) Todo vector $\vec{a}$ puede expresarse como producto de su módulo "a" por el versor $\hat{a}$ que indica su dirección y sentido:

$$\vec{a} = a\,\hat{a}$$

iv) **Descomposición** de un vector en dos direcciones coplanarias con él. Dados el vector $\vec{a}$ y las dos direcciones, 1 y 2, que forman un plano con él (coplanarias), se trata de encontrar dos vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$, situados respectivamente en las direcciones dadas, tales que

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

A estos vectores se les denomina "componentes" de $\vec{a}$ según dichas direcciones.



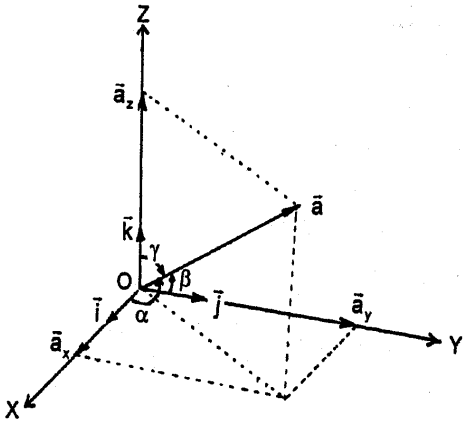
8.- VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL: COMPONENTES CARTESIANAS

A) **Componentes cartesianas**:

Sea el referencial cartesiano OXYZ, en el espacio tridimensional. Elijamos tres versores según los sentidos positivos de los tres ejes coordenados: $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.

Todo vector libre $\vec{a}$ se puede descomponer así:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$



www.yoquieroaprobar.es

Puesto que $\vec{a}_x = a_x\hat{i}$, $\vec{a}_y = a_y\hat{j}$, $\vec{a}_z = a_z\hat{k}$ la anterior expresión puede escribirse:

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}}$$

o formalmente también así: $\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)}$

a_x, a_y y a_z se denominan *componentes cartesianas* del vector $\vec{a}$; son números reales, positivos o negativos. Por aplicación del teorema de Pitágoras se puede ver fácilmente que el módulo del vector $\vec{a}$ y sus tres componentes verifican:

$$\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{o bien} \quad \boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (1)$$

Ej.: El módulo del vector $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} = (-2, 3, 0)$ es $a = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

B) **<u>Suma</u>** y **<u>producto por un nº real</u>:**

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

$$m\,\vec{a} = m\,a_x\hat{i} + m\,a_y\hat{j} + m\,a_z\hat{k}$$

- *Cada componente del vector **<u>suma</u>** es la suma de las componentes correspondientes de dichos vectores.*

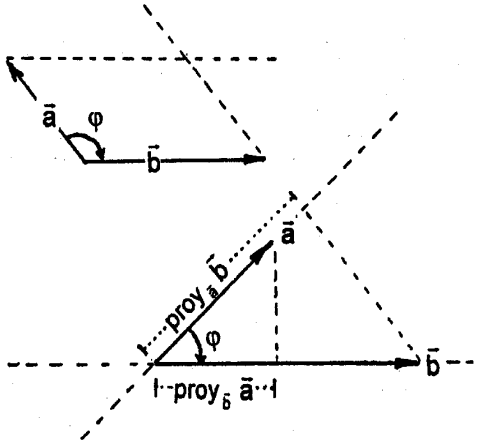
- *Cada componente del vector **<u>producto por un nº real</u>** es el producto del nº real por la correspondiente componente del vector.*

Ej.: $\vec{a} = (0, -2, 1)$ $\vec{b} = (3, -3, -1)$ $m = -2$ $\Rightarrow$ $\vec{a} + \vec{b} = (3, -5, 0)$ $m\vec{a} = (0, 4, -2)$

9.- PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Def.: Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, su **<u>producto escalar</u>** se define por el *<u>nº real</u>* que se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Se expresa así:

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = a\,.\,b\,.\cos\varphi} \qquad (2)$$



El producto escalar verifica las siguientes propiedades:

i) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$ pues $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

ii) $\vec{a}\,.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$

iii) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = a\,.\,\text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = b.\,\text{proy}_{\vec{b}}\,\vec{a}$

ya que $\text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = b.\cos\varphi$ y $\text{proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = a.\cos\varphi$

www.yoquieroaprobar.es

Así pues, *el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

iv) En coordenadas cartesianas:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}).(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_xb_x\,\hat{i}.\hat{i} + a_xb_y\,\hat{i}.\hat{j} + a_xb_z\,\hat{i}.\hat{k}$$
$$+ a_yb_x\,\hat{j}.\hat{i} + a_yb_y\,\hat{j}.\hat{j} + a_yb_z\,\hat{j}.\hat{k} + a_zb_x\,\hat{k}.\hat{i} + a_zb_y\,\hat{k}.\hat{j} + a_zb_z\,\hat{k}.\hat{k}$$

Puesto que $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ y $\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 0$, resulta:

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \qquad (3)$$

v) Ángulo determinado por dos vectores. De la definición de producto escalar se deduce que:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}} \qquad (4)$$

vi) Condición de perpendicularidad de dos vectores: Dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son perpendiculares sii su producto escalar es nulo.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{sii} \quad \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

En función de las componentes de los vectores:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{sii} \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0} \qquad (5)$$

Ej. 1º: Dados los vectores $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, su producto escalar es:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (-2)x2 + 0x3 + (-1)x0 = -4$$

Como a = $\sqrt{5}$ y b = $\sqrt{13}$, el coseno del ángulo que forman ambos vectores es:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = -0.49619$$ y el ángulo φ = 119'7449º = 119º 44' 42''

Ej. 2º: Dados los vectores $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2m\vec{k}$, ¿cuál debe ser el valor de m para que ambos vectores sean perpendiculares?

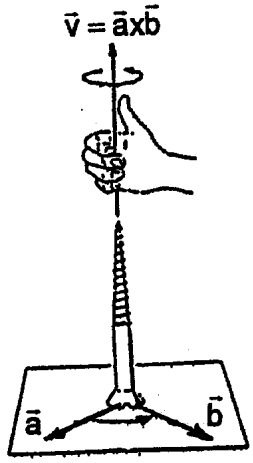
$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ es decir (-2)x1 + 0x3+(-1)x(-2m) = 0 o sea -2 + 2m = 0
$\Rightarrow$ m = 1

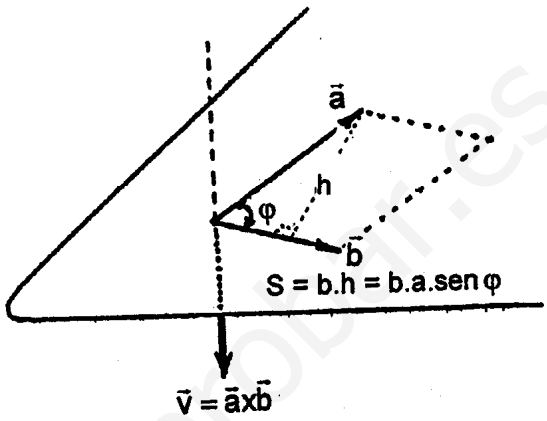
www.yoquieroaprobar.es

10.- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Def.: Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se define su **producto vectorial** como un vector $\vec{v}$

- cuyo **módulo** es $v = a.b.\text{sen}\,\varphi$ siendo φ el ángulo formado por ambos vectores,
- cuya **dirección** es normal al plano determinado por ambos vectores,
- cuyo **sentido** es el de avance de un tornillo que gira del primer vector al segundo por el camino más corto.





Se expresa así: $\boxed{\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}}$ y su módulo así: $\boxed{v = a \,.\, b \,.\, \text{sen}\,\varphi}$ (6)

Se puede comprobar que:

i) El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores. En efecto (ver figura), llamando S al área del paralelogramo: $S = b.h = b.a.\text{sen}\,\varphi$

ii) El producto vectorial es **anticonmutativo:** $\vec{b} \times \vec{a} = -\,\vec{a} \times \vec{b}$

iii) Condición de **paralelismo** de dos vectores: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \,||\, \vec{b}$

iv) Ley distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

v) Ley asociativa respecto de los escalares: $m\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$

vi) El producto vectorial **no es asociativo**: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

vii) En términos de sus componentes cartesianas, la expresión del producto vectorial es:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_xb_x(\hat{i}\times\hat{i}) + a_xb_y(\hat{i}\times\hat{j}) + a_xb_z(\hat{i}\times\hat{k})$$
$$+ a_yb_x(\hat{j}\times\hat{i}) + a_yb_y(\hat{j}\times\hat{j}) + a_yb_z(\hat{j}\times\hat{k}) + a_zb_x(\hat{k}\times\hat{i}) + a_zb_y(\hat{k}\times\hat{j}) + a_zb_z(\hat{k}\times\hat{k})$$

Puesto que $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$ y $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$ $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$ resulta:

www.yoquieroaprobar.es

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}} \quad (7)$$

viii) Condición de paralelismo de dos vectores, en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \qquad \text{O sea,} \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} a_y b_z - a_z b_y = 0 \\ a_z b_x - a_x b_z = 0 \\ a_x b_y - a_y b_x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{a} \,||\, \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}} \quad (8)$$

Así pues, *dos vectores son paralelos entre sí cuando sus componentes cartesianas respectivas son proporcionales.*

Ej. 1º: Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = -2\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$$

Ej. 2º: Dados $\vec{a}$ = (3, -2, -1) y $\vec{c}$ = (2m, 6, 3), probar que para que ambos vectores sean paralelos debe verificarse que m = - 4'5 . Y para que sean perpendiculares, m = 2'5. En efecto:

+ Paralelos: 3/2m = -2/6 = -1/3 $\Rightarrow$ m = - 4,5

+ Perpendiculares: 3x2m + (-2)x6 + (-1)x3 = 0 $\Rightarrow$ m = 2,5

11.- DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO DE UN ESCALAR

Sea $\vec{a}$ un vector cuyas componentes son funciones continuas de un parámetro escalar t. Dicho vector se expresa como $\vec{a}(t)$ y representa una *<u>función vectorial de variable escalar</u>*.

$$\vec{a}\,(t) = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

donde en general las tres componentes son función de la variable: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$

La **<u>derivada</u>** del vector $\vec{a}$ respecto de dicho parámetro escalar t es:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\,\hat{i} + \frac{da_y}{dt}\,\hat{j} + \frac{da_z}{dt}\,\hat{k}$$

www.yoquieroaprobar.es

Las principales reglas de derivación, suponiendo que $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ y $f(t)$ son funciones del parámetro escalar t, son:

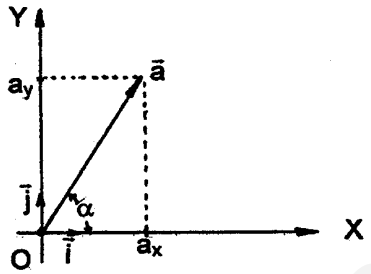
$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(f\,\vec{a}) = \frac{df}{dt}.\vec{a} + f.\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,.\,\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}.\vec{b} + \vec{a}.\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Calcula las componentes cartesianas del vector $\vec{a}$ que tiene por origen el origen de coordenadas, de módulo 5 unidades, y que forma un ángulo de 53º 7' 48" con el eje de abscisas.



Las componentes del vector pedido son:

$a_x = a.\cos\alpha = 5.\cos 53º7'48'' = 3$

$a_y = a.\text{sen}\,\alpha = 5.\text{sen } 53º7'48'' = 4$

La expresión del vector en componentes es :

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

2.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$, calcula su suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, su diferencia $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, y el vector unitario $\vec{u}_a$ en la dirección y sentido de $\vec{a}$.

La suma es: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (2 - 5)\vec{i} + (1 + 3)\vec{j} + (-2 - 6)\vec{k} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$

La diferencia es: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2 + 5)\vec{i} + (1 - 3)\vec{j} + (-2 + 6)\vec{k} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

El módulo del vector $\vec{a}$ es: $a = \sqrt{4+1+4} = 3$

El vector unitario $\vec{u}_a$ es: $\vec{u}_a = \dfrac{\vec{a}}{a} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{3}\vec{j} - \dfrac{2}{3}\vec{k}$

3.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, calcula el ángulo que forman entre ellos.

Los módulos de los vectores son: $a = \sqrt{4+1+4} = 3$ y $b = \sqrt{36+4+9} = 7$

El producto escalar de los vectores es: $\vec{a}.\vec{b} = 2x6 + (-1)x(-2) + (-2)x3 = 12 + 2 - 6 = 8$

Como $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b} = \dfrac{8}{3x7} = 0.381$, el ángulo α vale: $\alpha = 67.6073º = 67º\ 36'\ 26''$

4.- a) ¿Qué fuerza magnética $\vec{F}_m$ se ejerce sobre una carga eléctrica de $6\ \mu C$ que se mueve con una velocidad $\vec{v} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})x10^4 m/s$ en el seno de un campo magnético $\vec{B} = (3\vec{j} - 2\vec{k})x10^{-3}$ teslas? Se verifica que $\vec{F}_m = q(\vec{v}\,x\vec{B})$.

b) ¿Cuánto debe valer el campo eléctrico $\vec{E}$ para que la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ ejercida sobre dicha carga anule la fuerza magnética $\vec{F}_m$?

a) La fuerza magnética se halla verificando el producto vectorial que la define:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v}x\vec{B}) = 6x10^{-6}x10^4x10^{-3}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (9\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k})6x10^{-5} \text{ newtons}$$

b) La fuerza eléctrica y el campo eléctrico verifican: $\vec{F}_e = q.\vec{E}$

Según el enunciado b), se debe cumplir que: $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$

Por tanto: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}_e}{q} = -\dfrac{\vec{F}_m}{q} = -\dfrac{(9\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}).6x10^{-5}}{6x10^{-6}} = (-90\hat{i} - 40\hat{j} - 60\hat{k})$ newtons/culombio

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Calcula en el plano OXY las componentes cartesianas del vector $\vec{a}$ que tiene por origen el origen de coordenadas, de módulo 7 unidades, y que forma un ángulo de 128º 5' 25'' con el eje de abscisas. ***R.: a_x = - 4,32 a_y = 5,51***

2.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k}$ y $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, calcula su suma $\vec{s}$, su diferencia $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, así como los vectores unitarios $\hat{a}$ y $\hat{b}$.
R.: $\vec{s}$ = (-3,-1,2) $\vec{d}$ = (7,-7,16) $\hat{a}$ = (0.199, - 0.398, 0.896) $\hat{b}$ = (-0.549, 0.329, - 0.768)

3.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{b} = -5\vec{i} - 7\vec{k}$, calcula su producto escalar y el ángulo que forman. Calcula asimismo su producto vectorial $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ y el versor $\hat{v}$.
R.: $\vec{a}\vec{b}$ = -10 φ = 108,8089º = 108º 48' 32'' $\vec{v}$ = 21$\hat{i}$ + 14$\hat{j}$ - 15$\hat{k}$
$\hat{v}$ = 0.715$\hat{i}$ + 0.477$\hat{j}$ - 0.511$\hat{k}$

4.- ¿Para qué valores de m los vectores $\vec{a} = m\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{b} = -5m\vec{i} + 3m\vec{j} + 5\vec{k}$ son perpendiculares? ***R.: m_1 = 0,562 m_2 = -3,562***

5.- Un cuerpo de 2 kg de masa se halla en el punto P(- 2, 1, 0) con una velocidad $\vec{v}$ = (0, 2, - 5). Su momento angular $\vec{L}$ respecto del origen se define así: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ siendo $\vec{r}$ el vector de posición del cuerpo. Calcula dicho momento angular.
R.: $\vec{L}$ = -2(5$\hat{i}$ + 10$\hat{j}$ + 4$\hat{k}$) kg.m^2.s^{-1}

6.- ¿Qué trabajo W_{AB} realiza la fuerza $\vec{f}$ = (2, 5, -1) al llevar un punto material desde la posición A(2, 0, -1) hasta B(0, 2, -2), a lo largo de la recta AB? (Las unidades están expresadas en el sistema internacional). ***R.: W_{AB} = 7 julios***

7.- Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen un origen común en el punto P(-2, 2, 1) y sus extremos están situados en los puntos A(3, 2, 1) y B(2, -4, -2), respectivamente. Determinar el área del triángulo PAB, utilizando criterios vectoriales. Tómense longitudes en metros. ***R.: 16'77 m^2***

www.yoquieroaprobar.es

T E M A 2.-

CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

SUMARIO:

2.1.- La Mecánica y sus partes
2.2.- Posición
2.3.- Velocidad
2.4.- Aceleración: componentes intrínsecas
2.5.- Movimiento rectilíneo: MRU, MRUA, MAS
2.6.- Movimiento circular: MCU, MCUA

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

1.- LA MECÁNICA Y SUS PARTES

Existe la costumbre de dividir el estudio de la Mecánica en tres partes:

+ ***Cinemática***: es una descripción geométrica del movimiento
+ ***Dinámica***: estudia el movimiento de un sistema material sometido a acciones determinadas.
+ ***Estática***: estudia las condiciones de equilibrio de un sistema material.

En el presente tema vamos a detenernos en la **CINEMÁTICA**, parte de la **Mecánica** que estudia el movimiento de los cuerpos prescindiendo de las causas que lo provocan.

Conviene iniciar el estudio del movimiento por el de una *partícula material*, o *punto material* (p.m.). Denominamos así a un cuerpo material, de cuyo tamaño y forma se hace caso omiso, así como de las posibles rotaciones o desplazamientos de sus partes. Por tanto, es considerado como un punto móvil con una cierta masa.

Sistema referencial: Todos los movimientos han de ser descritos en relación a un sistema de referencia, dado por un punto O del espacio y un sistema de coordenadas centrado en él.
El sistema de coordenadas cartesianas, OXYZ, es un ejemplo de sistema referencial.

2.- POSICIÓN

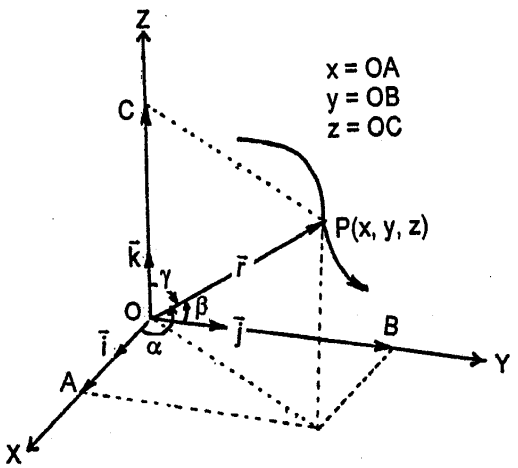
Dado un sistema referencial OXYZ, en el espacio tridimensional, la **posición** P de un punto material puede expresarse:

+ o bien por **sus coordenadas cartesianas**:

$$P(x, y, z)$$

+ o bien por su **vector de posición**, $\vec{r}$. El vector de posición de un p.m. P es el vector cuyo origen está situado en el origen del referencial, O(0, 0, 0) y su extremo en la posición del punto material, P(x, y, z):

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$$



Por ello, este vector de posición se relaciona con las coordenadas del p.m. P(x, y, z) así:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Decimos que el p.m. se mueve respecto del sistema referencial OXYZ cuando ocupa diferentes posiciones a medida que transcurre el tiempo. El vector de posición, entonces, varía con el tiempo, pudiéndose escribir en general como función de dicho parámetro tiempo, t.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

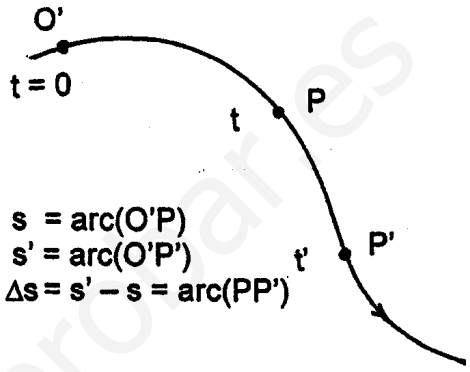
Se llama **trayectoria** del p.m., en su movimiento, al conjunto de posiciones que adopta dicho punto en el espacio, al transcurrir el tiempo. Es en general una línea curva. Viene expresada

en forma paramétrica por la terna de funciones: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ (forma paramétrica general de expresar una curva en el espacio; el parámetro es, en este caso, el tiempo t).

A) Posición de un móvil en su trayectoria

Supongamos un cuerpo material móvil sobre la trayectoria de figura.

Comencemos a contar el tiempo cuando el móvil pasa por O' (posición inicial, t = 0).



La posición P del móvil sobre dicha trayectoria en el instante t queda determinada por el arco O'P, tomado sobre la trayectoria, que llamaremos s.

s = arc O'P

es la posición del móvil en el instante t.

En otro instante posterior t', supongamos que el móvil se halla, sobre la trayectoria, en el punto P'. La nueva posición vendrá dada por

s' = arco O'P'

En general pues, *el arco s determina la posición del móvil sobre la trayectoria dada*, *en todo instante*, *respecto del origen O'.* Este arco s es pues función del tiempo, pudiéndose escribir:

s = s(t)

Esta ecuación se denomina "***ley horaria***" del movimiento, porque determina la *posición del móvil sobre su trayectoria en todo instante*.

En el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$, el móvil se ha desplazado desde P a P', es decir, un arco sobre la trayectoria

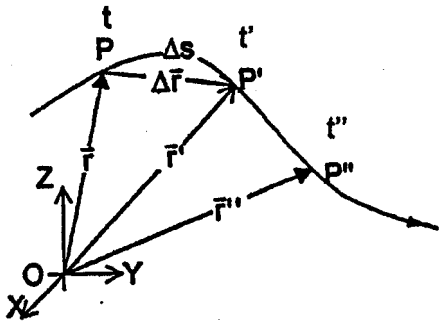
Δs = arco PP' = arco O'P' – arco O'P = s' – s

A este arco se le denomina **desplazamiento sobre la trayectoria** del móvil en el intervalo temporal $\Delta t = t' - t$.

B) Posición de un móvil en el espacio

Al recorrer un móvil los puntos de su trayectoria, el vector de posición $\vec{r}$ y las coordenadas de dicho cuerpo móvil x, y, z varían con el tiempo.

Por lo tanto: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$



(En el dibujo se representan las posiciones P, P', P'' del cuerpo móvil en tres instantes sucesivos t, t', t''. El vector de posición en esos instantes es $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, respectivamente).

Vector desplazamiento: Sean P y P' dos posiciones sucesivas del móvil, en los instantes t y t', respectivamente. Sean $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ los vectores de posición correspondientes.
El vector $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}\,' - \vec{r}$ se denomina ***vector desplazamiento*** en el intervalo $\Delta t = t' - t$.

En ese intervalo de tiempo pues,
el **desplazamiento sobre la trayectoria** del móvil es el arco de trayectoria PP' $\Delta s = s' - s$
y el **vector desplazamiento** es $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}\,' - \vec{r}$

Evidentemente, la longitud del arco Δs, recorrido en el intervalo Δt, es mayor o igual al módulo del vector desplazamiento: $|\Delta s| \geq |\Delta\vec{r}\,|$

3.- VELOCIDAD

A) Se define **velocidad media** de un cuerpo móvil en un intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ como el cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ y dicho intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}}{t' - t}}$$

Asimismo, se define **rapidez media** del móvil (o celeridad media) en ese intervalo:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s' - s}{t' - t}}$$

donde evidentemente es $\Delta s = s' - s$ = arc PP'

B) Si hacemos tender a cero el intervalo temporal, $\Delta t \to 0$ (es decir, consideramos dos instantes muy próximos, t y t', tan próximos como queramos), entonces el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el desplazamiento sobre la trayectoria, Δs, también tenderán a cero, $\Delta\vec{r} \to 0$ y $\Delta s \to 0$ (puesto que el punto P' se sitúa tan próximo a P como queramos). Pero los cocientes $\Delta\vec{r}/\Delta t$ y $\Delta s/\Delta t$ tienden al valor de las derivadas de $\vec{r}$ (t) y de s(t), respectivamente, en el instante t.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

A estos valores se les denomina precisamente:

Velocidad (instantánea) del móvil, en el instante t:

$$\boxed{\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

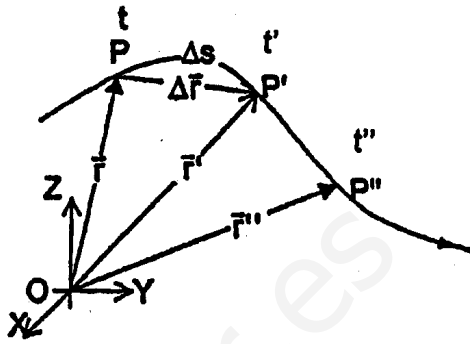
Rapidez (instantánea) del móvil, en el instante t (a veces, "celeridad"):

$$\boxed{v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

www.yoquieroaprobar.es

Obsérvese que la rapidez de un móvil en un determinado instante es un *escalar* que mide la intensidad de su velocidad (p.ej., v = 95 km/h). La velocidad en cambio es un *vector*; señala, además de la intensidad de la velocidad, su dirección y sentido.

C) Estudiemos, a continuación, este **vector velocidad:**

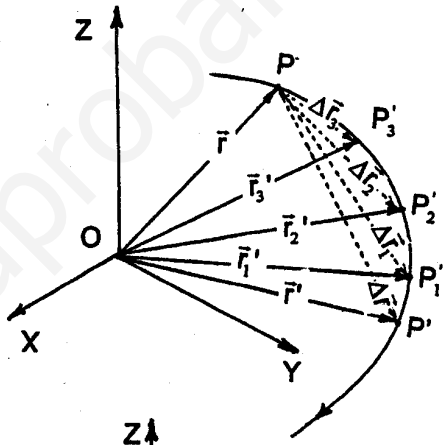


i) *su módulo:*

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

porque, cuando $\Delta t \to 0$, el arco Δs = arc PP' y la cuerda $|\Delta \vec{r}| = \overline{PP'}$ tienden a confundirse en longitud. Por tanto, ***el módulo del vector velocidad coincide con la rapidez:***

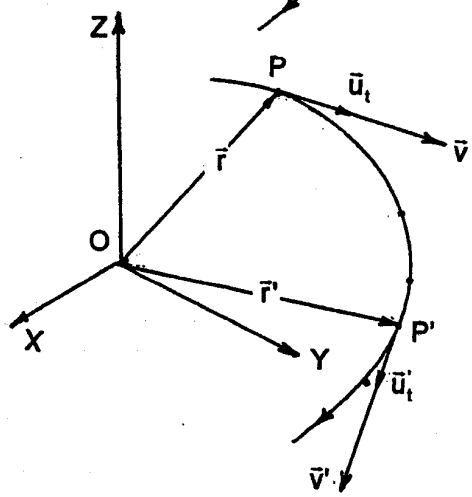
$$|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt}$$



ii) *su dirección y sentido:* Si sobre la trayectoria tomamos los puntos P'_1 , P'_2 , P'_3 , ... cada vez más cercanos al punto P, los tiempos empleados en llegar a ellos desde P, Δt_1, Δt_2, Δt_3, ... son cada vez menores, y los vectores desplazamiento $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$, ... tendrán su extremo en puntos cada vez más cercanos a P.

Los segmentos PP'_1, PP'_2, PP'_3,.... son secantes a la trayectoria. Al tomar P' cada vez más cercano a P, en el límite, PP' tocará a la curva trayectoria sólo en el punto P, es decir, será *tangente* a ella. Así será también el vector desplazamiento, infinitamente pequeño. Y lo mismo ocurrirá, en el límite, con el vector $\Delta \vec{r}/\Delta t$.

Por lo tanto, ***la dirección y sentido de la velocidad es tangente a la trayectoria en el sentido del avance del móvil.***



Si expresamos esta *dirección tangencial* en el sentido de avance mediante un versor $\hat{u}_t$ que la indique, *versor tangente*, podemos escribir:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_t}$$

D) En ***coordenadas cartesianas***: Refiriéndonos a un sistema de referencia cartesiano OXYZ , se tiene en los instantes t y t':

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad y \qquad \vec{r}\,' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

Por tanto, $\Delta \vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (x' - x)\hat{i} + (y' - y)\hat{j} + (z' - z)\hat{k} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$

www.yoquieroaprobar.es

Dividiendo por Δt y haciendo tender $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \lim \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Así pues, el vector velocidad tiene como componentes cartesianas las derivadas de las componentes del vector de posición

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

y el módulo de la velocidad, es decir la rapidez, viene dada por:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

<u>Problema de aplicación</u>: La masa de un cuerpo es 2 kg. Su momento angular viene dado por la fórmula $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. Si su vector de posición es $\vec{r}(t) = (t+1)\hat{i} + (t^2 - 1)\hat{j} - 2\hat{k}$, hallar la posición del cuerpo en los instantes t = 0 s y t = 2 s, así como las velocidades y rapideces en dichos instantes. Calcular, por fin, los momentos angulares del cuerpo en dichos dos instantes.

Respuestas: $P_0(1, -1, -2)$ $P_2(3, 3, -2)$ $\vec{r}(0) = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ $\vec{r}(2) = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \hat{i} + 2t\hat{j}$$

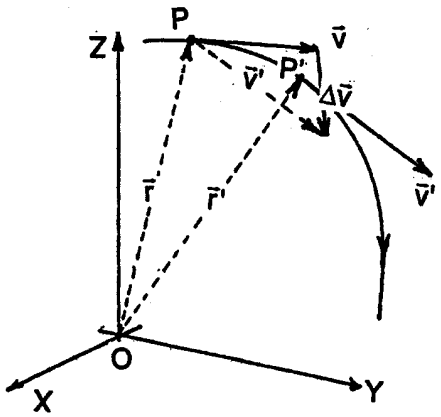
$\vec{v}(0) = \hat{i}$ $v(0) = 1$ m/s $\vec{v}(2) = 1 + 4\hat{j}$ $v(2) = \sqrt{17} = 4'12$ m/s

$\vec{L}(0) = m[\vec{r}(0) \times \vec{v}(0)] = 2[(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \times \hat{i} = -4\hat{j} + 2\hat{k}$ L(0) = $2\sqrt{5}$ = 4'47 kg.m ^{2}/s

$$\vec{L}(2) = m[\vec{r}(2) \times \vec{v}(2)] = 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(8\hat{i} - 2\hat{j} + 9\hat{k}) = 16\hat{i} - 4\hat{j} + 18\hat{k}$$

$L(2) = \sqrt{596} = 24'41$ kg.m^2/s

4.- ACELERACIÓN



A) Consideremos un móvil en su trayectoria. (Para un estudio más sencillo, supondremos que la trayectoria es plana, en el plano YZ, por ejemplo). Sean P y P' sus posiciones en dos instantes sucesivos t y t', respectivamente. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ sus velocidades en ambos instantes. En general, la diferencia de velocidades $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ no es nula. Véase en la figura el vector $\Delta\vec{v}$, obtenido geométricamente trasladando $\vec{v}'$ paralelamente a sí mismo a coincidir su origen con el de $\vec{v}$, ambos en P.

Se define la **<u>aceleración media</u>** del móvil en el intervalo $\Delta t = t' - t$ como el cociente:

$$\boxed{\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t}}$$

B) Pues bien, si el intervalo temporal Δt tiende a cero (o sea, el punto P' es muy próximo, infinitamente próximo a P), entonces el valor vectorial que toma la aceleración media define la **aceleración** (instantánea) del móvil en el punto P, en el instante t.

$$\boxed{\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Por lo tanto, la aceleración $\vec{a}$ se obtiene por derivación de la velocidad $\vec{v}(t)$. Como ésta se obtiene a su vez por derivación del vector de posición $\vec{r}$, resulta pues que la aceleración viene dada por la segunda derivada del vector de posición.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

C) En coordenadas cartesianas hemos visto que:

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}\,(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Si llamamos ahora a las componentes cartesianas de la aceleración a_x , a_y y a_z , podemos escribir:

$$\vec{a}\,(t) = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Resumiendo, pues:

Posición $\vec{r}(t)$	***Velocidad*** $\vec{v}(t)$	***Aceleración*** $\vec{a}(t)$
$x(t)$	$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
$y(t)$	$v_y(t) = \frac{dy}{dt}$	$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
$z(t)$	$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$	$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$

D) Componentes intrínsecas de la aceleración:

Cuando un móvil describe una trayectoria curva, presenta en cada punto una aceleración $\vec{a}$. Esta aceleración se puede descomponer en dos direcciones, tangencial a la trayectoria y normal o perpendicular a ella, dando lugar a dos componentes: tangencial $\vec{a}_t$ y normal o centrípeta $\vec{a}_n$, de modo que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

+ aceleración tangencial: es debida a que el *módulo* de la velocidad (o sea, la rapidez) varía con el tiempo (por ejemplo, el móvil pasa de ir a 20 m/s a ir a 27 m/s).

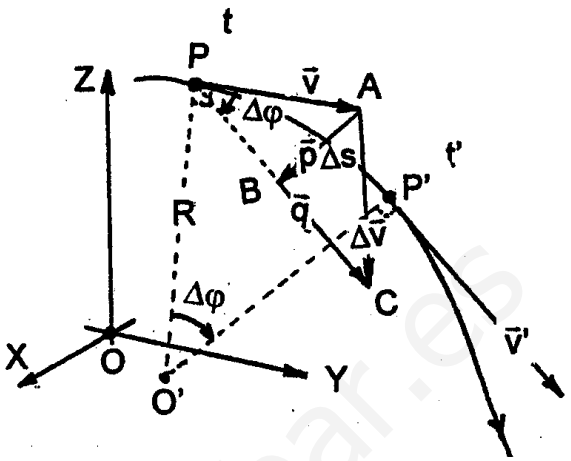
+ aceleración normal o centrípeta: es debida a que la velocidad varía en *dirección y sentido* (trayectoria curva).

www.yoquieroaprobar.es

Para llegar a entender la naturaleza de estas dos componentes, estudiémoslas en el caso de un movimiento plano (dos dimensiones); las conclusiones que resultan de este estudio no pierden su generalidad al aplicarlas al espacio tridimensional, con pocas concreciones más.

Sean P y P' las posiciones de un móvil en los instantes sucesivos t y t' = t + Δt. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ las velocidades respectivas.

Estúdiense la geometría del dibujo, su construcción, y las relaciones siguientes:



$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$

Δs = arc(PP')

$\Delta\varphi$ = ang(PO'P') = ang(CPA)

$|\vec{p}|$ = v sen($\Delta\varphi$)

$|\vec{q}|$ = PC - PB = v' - v cos($\Delta\varphi$)

La primera de estas relaciones nos permite escribir:

$$\vec{a} = \lim \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{p}}{\Delta t} + \lim \frac{\vec{q}}{\Delta t}$$

Estudiemos a continuación cada uno de estos dos límites.

i) $\boxed{\lim \frac{\vec{p}}{\Delta t}}$

a) *Su módulo:*

$$\left| \lim \frac{\vec{p}}{\Delta t} \right| = \lim \frac{|\vec{p}|}{\Delta t} = \lim \frac{v\,\text{sen}(\Delta\varphi)}{\Delta t} = v \lim \frac{\text{sen}(\Delta\varphi)}{\Delta t} = v \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= v \lim \frac{\Delta s/R}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}\, v = \frac{v^2}{R}$$

Razonando los pasos anteriores: Cuando $\Delta t \to 0$:

+ $\Delta\varphi$ tiende a cero; para ángulos muy pequeños, su seno coincide con su valor (en radianes): $\text{sen}(\Delta\varphi) \to \Delta\varphi$

+ Δs = arc(PP') se confunde con un arco de circunferencia. En él, $\Delta\varphi = \Delta s/R$ donde R es el "radio de curvatura" de la trayectoria, en P.

+ lim ($\Delta s/\Delta t$) = v.

b) *Su dirección y sentido:*

Cuando $\Delta t \to 0$, P' se sitúa infinitamente próximo a P. Entonces $\vec{p}$ es un vector perpendicular a $\vec{v}$, dirigido hacia O', el centro de curvatura de la trayectoria en P. Por tanto, éstos serán también la dirección y sentido del vector $\lim(\vec{p}/\Delta t)$: normal a la trayectoria, en el sentido de la concavidad. Por eso a esta componente se le denomina **aceleración normal** o centrípeta, $\vec{a}_n$.

Si llamamos $\hat{u}_n$ al versor en dicha dirección y sentido, podemos escribir:

$$\vec{a}_n = \lim \frac{\vec{p}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\, \hat{u}_n$$

www.yoquieroaprobar.es

ii) $\boxed{\lim \frac{\vec{q}}{\Delta t}}$

a) *Su módulo:*

$$\left|\lim \frac{\vec{q}}{\Delta t}\right| = \lim \frac{|\vec{q}|}{\Delta t} = \lim \frac{v' - v\cos(\Delta\varphi)}{\Delta t} = \lim \frac{v' - v}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

En efecto, cuando $\Delta t \to 0$, $|\vec{q}| = v' - v\cos(\Delta\varphi) \approx v' - v = \Delta v$, ya que $\cos(\Delta\varphi) \approx 1$ al tender Δt a cero.

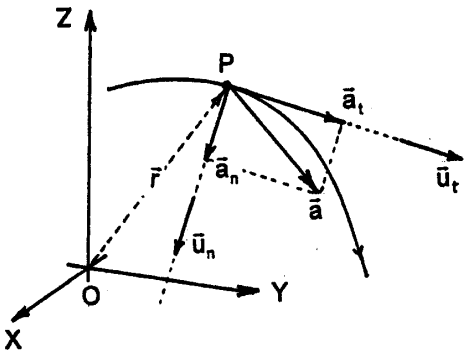
b) *Su dirección y sentido:*

Cuando $\Delta t \to 0$, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ tienden a ser vectores paralelos. Al ser $\vec{q}$ paralelo a $\vec{v}'$, tenderá a serlo a $\vec{v}$, y por tanto paralelo a la trayectoria en P; es decir en la dirección tangente a la misma, (y en el sentido de avance del móvil, en nuestro ejemplo gráfico). Por consiguiente, la dirección y sentido de lim($\vec{q}/\Delta t$), que coincide con los de $\vec{q}$, es tangencial, (en el sentido de avance, en nuestro ejemplo). Por eso a esta componente se la denomina **aceleración tangencial**, $\vec{a}_t$.

Si llamamos $\hat{u}_t$ al versor en dicha dirección y sentido de avance,

podemos escribir: $$\vec{a}_t = \lim \frac{\vec{q}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t$$

Recapitulando: Cuando un móvil sigue una trayectoria curva experimenta, en general, dos aceleraciones:



+ aceleración tangencial, si al desplazarse el móvil varía su rapidez (creciendo o decreciendo). Su valor es: $a_t = \frac{dv}{dt}$

+ aceleración normal, o centrípeta, si al desplazarse debe curvar su trayectoria (variando su dirección y sentido). Su valor es: $a_n = \frac{v^2}{R}$

Como ambas componentes son perpendiculares entre sí, resultan las fórmulas siguientes, para la **aceleración total** $\vec{a}$ (estudiar la figura):

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_n \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

Problema de aplicación: Con los datos del problema anterior (pg. 28), hallar la fuerza que actúa sobre el cuerpo, $\vec{F} = m\vec{a}$, en el instante t = 0, así como el momento de la fuerza respecto del origen, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, en ese instante.

Respuestas: $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{j} \Rightarrow \vec{F} = 2.2\hat{j} = 4\hat{j}$ y $F = 4$ newtons, en todo instante.

$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F} = [(t+1)\hat{i} + (t^2 - 1)\hat{j} - 2\hat{k}] \times 2\hat{j} = 8\hat{i} + 4(t+1)\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{M}(0) = 8\hat{i} + 4\hat{k}$ M(0) = 8'94 N.m

5.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Un móvil posee un **movimiento rectilíneo** cuando su trayectoria es una línea recta. Ello implica que el radio de curvatura es infinito.

$$R = \infty$$

Por tanto, la aceleración normal es nula: $a_n = v^2 / R = 0$.

Y la aceleración tangencial vale: $a_t = dv / dt$

Así pues, la aceleración total sólo tiene la componente tangencial. O de otro modo, en el movimiento rectilíneo la **aceleración** es:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Estudiaremos a continuación, como casos más importantes, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU), el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), y el movimiento armónico simple (MAS).

a) Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

- Un móvil posee un **movimiento rectilíneo uniforme** cuando su aceleración es **nula**.

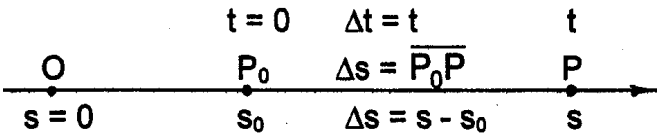
$$a = 0$$

- En este caso, el móvil tiene velocidad constante:

$$v \text{ constante}$$

  - en módulo: en efecto, si a = dv/dt = 0, la función primitiva de la aceleración, que es la velocidad, debe ser constante.
  - en dirección y sentido, pues la trayectoria es recta.

- Si en el instante t = 0 el móvil pasa por el punto P_0, tal que $s_0 = \overline{OP}_0$, y al cabo de un tiempo t llega con velocidad constante v al punto P, tal que $s = \overline{OP}$, se verificará:



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - 0} = \frac{s - s_0}{t} \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + v\,t$$

Esta expresión da la posición del móvil, en todo instante, respecto al origen referencial O.

b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

- Un móvil posee un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** cuando su **aceleración** es constante:

$$a \text{ constante}$$

www.yoquieroaprobar.es

• La **velocidad** puede obtenerse por integración de la función aceleración:

$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \int dv = \int a\,dt + C = a\int dt + C \rightarrow v = a\,t + C$

Si en el instante t = 0 la velocidad del móvil es v_0 (velocidad inicial), podemos calcular el valor de C, sustituyendo en la anterior relación: $v_0 = a.0 + C \rightarrow v_0 = C$ y por tanto la ecuación de la velocidad puede ser escrita así:

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

• La **posición** del móvil puede ser obtenida a partir de la relación $v = \frac{ds}{dt}$:

$ds = v\,dt = (v_0 + a\,t)\,dt \rightarrow \int ds = \int(v_0 + a\,t)\,dt = v_0\int dt + a\int t dt \rightarrow s = v_0\,t + ½\,a\,t^2 + C'$

Supongamos además que en el instante inicial, t = 0, el móvil se halla en la posición s_0 (posición inicial). Sustituyendo este valor en la expresión anterior, resulta:

$s_0 = v_0.0 + ½\,a\,0^2 + C'$ o sea $s_0 = C'$, que permite escribir dicha expresión así:

$$\boxed{s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2}$$

Esta relación permite conocer la posición s del móvil en todo instante t.

• Si en las ecuaciones: $v = v_0 + a\,t$ y $s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$ eliminamos el parámetro tiempo t, podremos expresar la posición s del móvil en función de la velocidad que posee en dicha posición. Para ello, se despeja t en la primera y se sustituye su valor en la segunda; resulta:

$t = \frac{v - v_0}{a}$ $\qquad s = s_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$

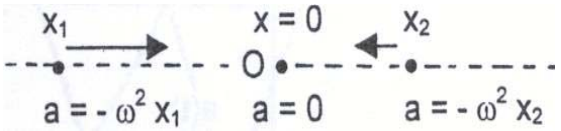
Operando, resulta: $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(s - s_0)}$

c) Movimiento vibratorio armónico simple (MAS)

• Un móvil posee un **movimiento armónico simple** cuando su trayectoria es rectilínea y su aceleración es:

$$\boxed{a = -\,\omega^2\,x}$$

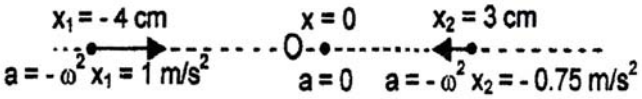
donde ω^2 es una constante, lógicamente positiva.



Obsérvese que la aceleración *no es constante*, sino que depende de la posición del móvil respecto de O, centro del movimiento. Además esta aceleración está dirigida en todo instante hacia dicho centro O.

Ejemplo: Hallar la aceleración de un móvil dotado de un MAS tal que ω = 5 rd/s, en puntos de su trayectoria, x_1= - 4 cm y x_2 = 3 cm.

Para x_1 = - 4 cm: a_1 = - 25 . (-0'04) = 1 m/s^2
Para x_2 = 3 cm: a_1 = - 25 . 0'03 = - 0'75 m/s^2



• La **posición** x, en todo instante t, de un móvil dotado de un MAS viene dada por la expresión:

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

En esta ecuación llamamos:

. x(t) **Posición** del móvil en todo instante. Se la llama generalmente **elongación** del móvil. En el Sistema Internacional, se mide en m.

. A **Amplitud** del movimiento. Es constante, y se mide en m. Representa el máximo valor de la elongación, o máxima distancia a la que el móvil puede encontrarse del centro O.
En efecto, cuando sen($\omega t + \varphi_0$) = ± 1 entonces x = ± A.

. $\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ **Fase** del movimiento. Es un ángulo creciente con el tiempo. Se mide en radianes.

. ω **Pulsación** o **frecuencia angular** del movimiento. Es una constante característica del movimiento. Tiene dimensiones de velocidad angular, por lo que se mide en rd/s.

. φ_0 **Fase inicial** o **constante de fase** del movimiento. Es también constante. Corresponde al valor de la fase para t = 0; es decir, $\phi(0) = \varphi_0$

• La **velocidad** del móvil, en cualquier instante t, v(t), se obtiene por derivación de la elongación x(t), pues v = dx/dt. Resulta:

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

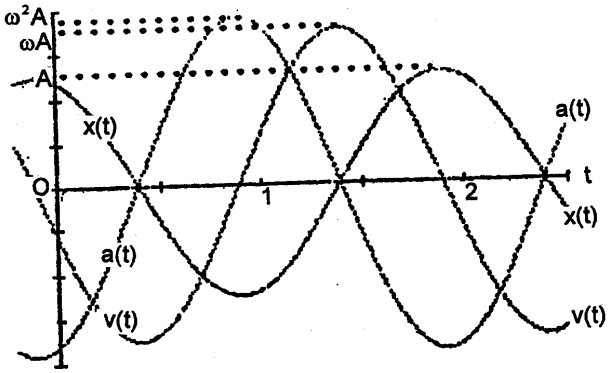
• La **aceleración** a(t) se deduce mediante nueva derivación, ya que a = dv/dt. Resulta:

$$a(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Teniendo presente la expresión de x(t), se puede escribir:

$$a(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

con lo que hemos comprobado que efectivamente la ecuación de la posición x(t), satisface la definición de MAS dada al principio.



• *Ejercicio:* Compruébese cómo el MAS es un movimiento de vaivén, con posiciones extremas x = ± A, en las que el móvil se detiene (v = 0), invirtiendo el sentido del movimiento; en estos puntos de máxima separación del centro O, la velocidad es nula pero la aceleración adquiere valores máximos ($a = \pm \omega^2 A$), siempre dirigida hacia dicho centro.

x = - A		x = 0		x = A
v = 0	→	v = ω A	→	v = 0
v = 0	←	v = - ω A	←	v = 0
$a = \omega^2 A$	→	a = 0	←	$a = -\omega^2 A$

$\omega t + \varphi$	x	v	a
0	0	ω A	0
π/2	A	0	$-\omega^2 A$
π	0	- ω A	0
3π/2	- A	0	$\omega^2 A$
2π	0	ω A	0

www.yoquieroaprobar.es

• Puesto que las funciones seno y coseno son cíclicas, el movimiento es evidentemente **periódico**. El **periodo** T es el tiempo que transcurre entre dos instantes t_1 y t_2 consecutivos cuyas fases $\phi_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ y $\phi_2 = \omega t_2 + \varphi_0$ difieren en 2π. O sea:

$$T \equiv t_2 - t_1 \quad \text{es tal que} \quad \Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 = 2\pi$$

Por consiguiente:

$$(\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = 2\pi$$

$$\omega (t_2 - t_1) = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al inverso del periodo se le denomina **frecuencia** del MAS. O sea, f = 1/T. Se mide en hercios (Hz) o ciclos/s. Las relaciones entre el periodo T, la frecuencia f y la pulsación ω de un MAS son:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

6.- MOVIMIENTO CIRCULAR

• Un móvil posee un **movimiento circular** cuando su trayectoria es una circunferencia. El radio de curvatura de la trayectoria es, por tanto, constante:

$$\boxed{R \text{ constante}}$$

• En tal caso, (siguiendo la figura siguiente), supongamos al móvil, en el instante t, situado en P_0; sea pues su posición inicial s_0 = arcAP_0 respecto del origen de arcos. Si en un instante t posterior, es P su nueva posición, determinada por el arco s = arcAP, entonces, como en el caso general:

$$s(t) \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

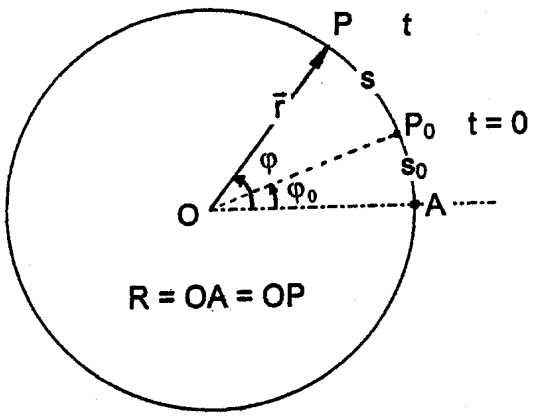
• Hay otro modo de estudiar el movimiento sobre la circunferencia. El vector de posición $\vec{r}$ es de módulo constante, $|\vec{r}| = R$; se le llama *radiovector.* Éste, al seguir el movimiento del cuerpo, va describiendo con AO un ángulo φ variable.

Este ángulo sirve para determinar la posición del móvil sobre la trayectoria circular; por eso se le denomina **posición angular**. Se mide en radianes.

• La posición angular varía con el tiempo, $\varphi(t)$. Su derivada define la **velocidad angular** del móvil, ω:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

Se expresa en radianes por segundo, rd/s.



• Esta velocidad angular, a su vez, puede variar con el tiempo, $\omega(t)$. Su derivada define la **aceleración angular**, α:

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Se expresa en rd/s^2.

www.yoquieroaprobar.es

• Puesto que en la circunferencia, $s = R\,\varphi$, siendo el ángulo φ medido en radianes, se tienen las siguientes relaciones:

Posición lineal:	$s(t)$	Posición angular:	$\varphi(t)$	Relación:	$s = R\,\varphi$
Velocidad lineal:	$v(t) = ds/dt$	Velocidad angular:	$\omega(t) = d\varphi/dt$	Relación:	$v = R\,\omega$
Acel. tangencial:	$a_t = dv/dt$	Acel. angular:	$\alpha(t) = d\omega/dt$	Relación:	$a_t = R\,\alpha$
Acel. normal:	$a_n = v^2/R$			Relación:	$a_n = R\,\omega^2$

a) Movimiento circular uniforme (MCU)

Un movimiento circular es **uniforme** cuando la **aceleración angular** es nula:

$$\alpha = 0$$

Entonces, la **velocidad angular** es constante:

$$\omega \text{ constante}$$

La **posición angular** viene expresada así:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\, t$$

La aceleración tangencial es nula:

$$a_t = R\,\alpha = 0.$$

La aceleración normal es constante:

$$a_n = R\,\omega^2.$$

Por tanto, la **aceleración total** del movimiento es una aceleración normal o centrípeta y constante: $a = R\,\omega^2$

b) Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)

Un movimiento circular es **uniformemente acelerado** cuando la **aceleración angular** es constante: α constante

De modo análogo a los resultados obtenidos al estudiar el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se obtiene para la **velocidad angular** y para la **posición angular** (integraciones sucesivas de $\alpha = d\omega/dt$ y de $\omega = d\varphi/dt$ con las condiciones iniciales: ω_0, velocidad angular inicial y φ_0. posición angular inicial):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2$$

De estas dos últimas ecuaciones, por eliminación del tiempo t, se obtiene esta otra ecuación, de gran eficacia en la resolución de problemas:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$$

Las **componentes intrínsecas de la aceleración** son entonces:

$a_t = R\,\alpha$ constante $\qquad a_n = R\,\omega^2$ dependiente del tiempo.

y la **aceleración total**:

$$\vec{a} = R\,\alpha\,\hat{u}_t + R\,\omega^2\,\hat{u}_n \qquad a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- La posición de una partícula que se desplaza en línea recta es: $x(t) = t^3 - 2t + 5$ metros. Determina la posición, velocidad y aceleración en el instante t = 2 segundos.

Las funciones del movimiento son

. posición $x(t) = t^3 - 2t + 5$

. velocidad $v(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2$

. aceleración $a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t$

En el instante t = 2 s: $x(2) = 2^3 - 2x2 + 5 =$ ***9 m***
$v(2) = 3x2^2 - 2 =$ ***10 m/s***
$a(2) = 6x2 =$ ***12 m/s²***

2.- El vector de posición de una partícula es $\vec{r}(t) = (4t^2 - 1)\hat{i} + (t^2 + 3)\hat{j}$ metros. Deduce las expresiones de los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$. Calcula la posición, la velocidad y la aceleración en el instante t = 1 s. Deduce la ecuación de la trayectoria, y dibújala. Halla la ecuación de la rapidez v(t) y su valor en t = 1 s.

La posición del móvil en todo instante viene dada por el vector de posición; o bien por las ecuaciones, en función del tiempo: $x(t) = 4t^2 - 1$ $y(t) = t^2 + 3$

En el instante t = 1 s, $x(1) = 3$ $y(1) = 4$ $\Rightarrow$ el móvil se encuentra en ***P(3, 4).***

La velocidad en todo instante viene dada por la función $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{8t.\vec{i} + 2t.\vec{j}}$ ***m/s***

En el instante t = 1 s, $\vec{v}(1) = \mathbf{8.\vec{i} + 2.\vec{j}}$ ***m/s***

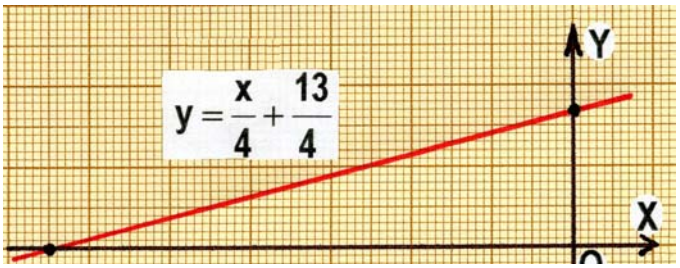
La rapidez en todo instante viene dada por $v(t) = \sqrt{(8t)^2 + (2t)^2} \Rightarrow v(t) = \mathbf{2\sqrt{17}\ t}$

En el instante t = 1 s, $v(1) = 2\sqrt{17}.1 = 2\sqrt{17}$ m/s $\cong$ ***8.246 m/s***

La aceleración en todo instante viene dada por $\vec{a}(t) = \mathbf{8.\vec{i} + 2.\vec{j}}$ m/s², que al resultar constante es el valor de la aceleración en el instante t = 1 s : $\vec{a}(1) = \mathbf{8.\vec{i} + 2\vec{j}}$ ***m/s²*** . El módulo de esta aceleración es a = $\sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$ m/s² $\cong$ ***8.246 m/s².***

Ecuación de la trayectoria: se elimina t en las ecuaciones: $x(t) = 4t^2 - 1$ e $y(t) = t^2 + 3$ Despejando t^2 en una y sustituyéndola en la otra. Resulta:

$$y = \frac{x}{4} + \frac{13}{4}$$



3.- Una partícula está animada con una velocidad $\vec{v} = 2t.\vec{i} + 2.\vec{j}$ m/s . Calcula las aceleraciones tangencial y normal, así como el radio de curvatura, en el instante t = 2 s. Halla el vector de posición y la ecuación de la trayectoria, sabiendo que el móvil, en el instante t = 0 s, se encuentra en P_0(-1, 5).

La aceleración es $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2.\vec{i}$ $\Rightarrow$ a = 2 m/s^2

La rapidez, o módulo de la velocidad es: v(t) = $\sqrt{(2t)^2 + 2^2} = 2\sqrt{t^2+1}$

La aceleración tangencial es: $a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ $\Rightarrow$ $a_t(2) = \frac{4}{\sqrt{5}} \cong$ ***1.789 m/s²***

La aceleración normal es: $a_n(t) = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{4 - \frac{4t^2}{t^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}$ $\Rightarrow$ $a_n(2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cong$ ***0.894 m/s²***

El radio de curvatura es: $R(t) = \frac{v^2}{a_n(t)} = \frac{4(t^2+1)}{2/\sqrt{t^2+1}} = 2(t^2+1)^{3/2}$ $\Rightarrow$ $R(2) = 10\sqrt{5} \cong$ ***22.361 m***

Para calcular el vector de posición, téngase en cuenta que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\Rightarrow$ $d\vec{r} = \vec{v}.dt = (2t.\vec{i} + 2.\vec{j})dt$

$\Rightarrow$ $d\vec{r} = \vec{i}.2t.dt + \vec{j}.2.dt$ $\Rightarrow$ $\vec{r}(t) = \vec{i}.\int 2t.dt + \vec{j}\int 2.dt + \vec{C} = t^2.\vec{i} + 2t.\vec{j} + \vec{C}$

La condición de que para t = 0 el móvil está en P_0(-1, 5) $\Rightarrow$ $\vec{r}(0) = -\vec{i} + 5.\vec{j}$

Pero para t =0, $\vec{r}(0) = 0^2.\vec{i} + 2x0.\vec{j} + \vec{C} = \vec{C}$

$\Rightarrow$ $\vec{C} = -\vec{i} + 5.\vec{j}$

$\Rightarrow$ $\vec{r}(t) = t^2.\vec{i} + 2t.\vec{j} - \vec{i} + 5.\vec{j} = (t^2 - 1)\vec{i} + (2t+5)\vec{j}$

$\Rightarrow$ el vector de posición es: $\vec{r} = (t^2 - 1)\vec{i} + (2t+5)\vec{j}$

La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo t en el sistema $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 2t + 5 \end{cases}$ resultando: ***4x = y² – 10y +21***, que es una parábola.

4.- Deduce las ecuaciones del movimiento para una partícula que se mueve en línea recta, sabiendo que: a) la aceleración es a = 2 m/s²; b) en el instante t = 2 s, pasa por el origen de coordenadas; c) en ese mismo instante su velocidad es 3 m/s.

Elegimos como trayectoria del movimiento el eje OX. Dado que $a = \frac{dv}{dt}$, entonces dv = a dt = 2.dt

$\Rightarrow$ v = $\int 2.dt + C_1$ $\Rightarrow$ v(t) = 2t + C_1 . Como v(2) = 3 (pues, para t = 2, v = 3 m/s) y por otro lado v(2) = 2x2 + C_1 = 4 + C_1, resulta que C_1 = -1 .

$\Rightarrow$ ***v = 2t – 1 m/s***

Dado que v = $\frac{dx}{dt}$, entonces dx = v.dt = (2t –1) dt = 2t.dt - dt $\Rightarrow$ x = $\int v.dt + C_2$ = $\int 2t.dt - \int dt + C_2$ = t² - t + C_2 . Ya que x(2) = 0 (pues, para t = 2, el móvil pasa por el origen), y por otro lado x(2) = 2² –2 + C_2 = 2 + C_2, resulta pues que C_2 = – 2

$\Rightarrow$ ***x = t² – t – 2 m***

www.yoquieroaprobar.es

5.- Una partícula está animada de un MAS de 10 cm de amplitud. Si la partícula realiza 50 vibraciones por segundo, calcula el periodo del movimiento y la pulsación. Escribe la ecuación del movimiento y calcula la velocidad máxima y la aceleración máxima.

El movimiento armónico de una partícula viene determinado por la ecuación x(t) = A sen($\omega t + \varphi$), donde es la amplitud, ω es la pulsación o frecuencia angular, y φ es la fase inicial.
En nuestro problema, A = 0.1 m; f = 50 Hz; suponemos que φ = 0.

El periodo, T = $\frac{1}{f} = \frac{1}{50} =$ ***0.02 s*** La pulsación, $\omega = 2\pi f =$ ***100 π rd/s***

Ecuación del movimiento: ***x(t) = 0.1 sen(100πt)***

Velocidad del movimiento: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A.\cos(\omega t + \varphi)$

Velocidad máxima $v_{max} = \omega A = 100\pi x0.1 = 10\pi$ m/s $\cong$ ***31'42 m/s***

Aceleración del movimiento $a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A.\text{sen}(\omega t + \varphi)$

Aceleración máxima $a_{max} = \omega^2 A = (100\pi)^2 x0.1 = 1000\pi^2$ m/s^2 $\cong$ ***9870 m/s^2***

6.- La ecuación de un movimiento armónico simple es x(t) = 20.sen(6πt + φ) cm, donde φ = 60º. ¿Cuál es el valor de la amplitud, la pulsación, el periodo y la frecuencia? ¿Qué valor presenta la elongación en el instante t = 0.1 s? ¿Y la velocidad, en el instante t = 0.5 s?

Amplitud, A = 20 cm = ***0'2 m*** Pulsación, ω = ***6 π rd/s*** Fase inicial, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rd

Periodo, T = $\frac{2\pi}{\omega} =$ ***0'33 s*** Frecuencia, f = $\frac{1}{T} =$ ***3 Hz***

En el instante t = 0.1 s, x(0.1) = 0.2 sen (6π.0,1+ π/3) = 0,2 sen(168º) = 0.042 m = ***4'2 cm***
En el instante t = 0.5 s, v(0,5) = ω A cos (ωt + φ) = 6π.0,2.cos(6π.0,5+ π/3) = 3.77 cos(600º) =
= ***- 1'89 m/s***

7.- El tren de un parque de atracciones recorre una vía circular de 400 m de radio. Desde que arranca hasta que adquiere una velocidad de 10 m/s transcurren 20 s. A partir de ese momento mantiene constante su velocidad. Calcula la velocidad angular, las aceleraciones angular, tangencial, normal y total al final de los 20 s, así como el tiempo total invertido en recorrer la primera vuelta.
Primera parte del movimiento: MCUA; segunda parte del movimiento: MCU.
Primera parte:

$\omega_0 = \omega(0) = 0$ rd/s $\omega = \omega(20) =$ v / R = 10/400 = ***0'025 rd/s*** $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0.025}{20} =$ ***1'25x10^{-3} rd/s^2***

a_t = R α = 400x1.25x10^{-3} = ***0'5 m/s^2***

a_n = R ω^2 = 400x(0.025)^2 = ***0'25 m/s^2***

a = $\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ = ***0'559 m/s^2***

Ángulo descrito en esta primera parte $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0.5x1.25x10^{-3}x20^2 = 0.25$ rd

Ángulo descrito en la segunda parte $\varphi' = 2\pi - 0.25 = 6.033$ rd

Tiempo invertido recorrer este ángulo $t' = \frac{\varphi'}{\omega} = \frac{6.033}{0.025} = 241.33$ s

Tiempo total empleado en recorrer la primera vuelta: t = 20 + 241.33 = ***261'33 s***

www.yoquieroaprobar.es

8.- Una rueda, partiendo del reposo, adquiere después de 25 vueltas una "velocidad" de 15 rpm. ¿Cuánto tiempo ha tardado en adquirir esa velocidad? A continuación frena, y al cabo de 3 minutos se detiene. ¿Cuántas vueltas ha dado desde que se aplicó el freno?

a) $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 25x2\pi = 50$ rd $\qquad \omega_0 = 0 \qquad \omega = \frac{15}{60}2\pi = \frac{\pi}{2}$ rd/s

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\alpha\,\Delta\varphi \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\,\Delta\varphi} = \frac{\pi^2/4}{2\,.\,50\pi} = \frac{\pi}{400}$ rd/s^2

$\omega = \omega_0 + \alpha\,t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{\pi/2}{\pi/400} =$ ***200 s***

b) $\omega = \omega_0 + \alpha\,t \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-\pi/2}{180} = -\frac{\pi}{360}$ rd/s^2

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\alpha\,\Delta\varphi \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2.\alpha} = \frac{-\pi^2/4}{2(-\pi/360)} = 45\pi$ rd $\quad \rightarrow \quad N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} =$ ***22'5 vueltas***

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Un punto móvil recorre una trayectoria recta de acuerdo con la ley horaria (S.I.):

$$x(t) = t^3 - 2t + 7$$

a) Calcular las funciones velocidad y aceleración.
b) Hallar los valores iniciales de la posición y de la velocidad, x_0 y v_0.
c) Hallar la posición, velocidad y aceleración del móvil en $t_1 = 2$ s y $t_2 = 7$ s.
d) Hallar la velocidad media y la aceleración media en el intervalo de tiempo (t_1, t_2)
R.: $v = 3t^2 - 2$ $a = 6t$ $x_0 = 7$ m $v_0 = -2$ m/s $x(2) = 11$ m $v(2) = 10$ m/s $a(2) = 12$ m/s^2
$x(7) = 336$ m $v(7) = 145$ m/s $a(7) = 42$ m/s^2 $v_m = 65$ m/s^2 $a_m = 27$ m/s^2

2.- Dado el vector de posición: $\vec{r}(t) = (t^2 - 4)\hat{i} + t^3\hat{j} + (t + 2)\hat{k}$, expresado en el S.I., calcular:
a) la posición y las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración en el instante t = 2 s, así como el valor de la aceleración en dicho instante (módulo).
b) la aceleración tangencial, la aceleración normal y el radio de curvatura en todo instante. Su valor en el instante t = 2 s.
R.: a) $P(0, 8, 4)$ $\vec{v}(4,12,1)$ m/s $\vec{a} = (2,12,0)$ m/s^2 $a = 12'17$ m/s^2

b) $a_t(t) = \dfrac{2t(9t^2 + 2)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}$ $a_t(2) = 11'98$ m/s^2 $a_n(t) = 2\sqrt{\dfrac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}}$ $a_n(2) = 2'12$ m/s^2

$R(t) = \dfrac{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}$ $R(2) = 75'92$ m

3.- Dado el movimiento definido por $\vec{r}(t) = (t + 3)\hat{i} + 2t\hat{j} + (t^2 - 9)\vec{k}$, en el S.I., hallar:
a) las componentes intrínsecas de la aceleración así como el radio de curvatura, en todo instante.
b) los valores de a, a_t, a_n y R en el instante t = 2 s.
R.: $a_t(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{4t^2 + 5}}$ $a_n(t) = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4t^2 + 5}}$ $R(t) = \dfrac{(4t^2 + 5)^{3/2}}{2\sqrt{5}}$
$a(2) = 2$ m/s^2 $a_t(2) = 1'75$ m/s^2 $a_n(2) = 0'98$ m/s^2 $R(2) = 21'52$ m

4.- La aceleración de un móvil, en función del tiempo, está dada por: $\vec{a}(t) = 6t\hat{i} + 2\hat{j}$, en el S.I.
Se sabe que inicialmente el móvil se encuentra en $P_0(0, 0, 4)$, y entonces su velocidad es $\vec{v}_0 = (-4, 0, 2)$. Hallar la velocidad $\vec{v}(t)$ y la posición $\vec{r}(t)$ en todo instante.
R.: $\vec{v}(t) = (3t^2-4)\hat{i} + 2t\hat{j} + 2\hat{k}$ $\vec{r}(t) = t(t^2 - 4)\hat{i} + t^2\hat{j} + 2(t + 2)\hat{k}$

5.- Un móvil A se dirige hacia O decreciendo su velocidad a razón de 2 m/s^2. En el instante inicial se encuentra 55 m a la izquierda del observador O, y su velocidad es de 28 m/s. Un móvil B, en ese instante también se está acercando hacia O y se halla a 120 m de él, a su derecha, siendo su velocidad constante de 12 m/s.
a) Hallar instante del encuentro y su posición.
b) ¿En qué posición el móvil A cambia el sentido del movimiento?
R.: Se cruzan ambos móviles en dos ocasiones: a los 5 s a 60 m a la derecha de O, y a los 35 s a 300 m a la izquierda de O. En móvil A cambia su sentido de movimiento a los 14 s a 141 m a la derecha de O. También vuelven a encontrarse, a los 35 s, a 300 m a la izquierda de O.

www.yoquieroaprobar.es

6.- Un móvil A se dirige hacia O decreciendo su velocidad a razón de 2 m/s^2. En el instante inicial se encuentra 55 m a la izquierda del observador O, y su velocidad es de 28 m/s. Un móvil B, en ese instante también se está acercando hacia O y se halla a 120 m de él, a su derecha, siendo su velocidad de 12 m/s, pero va acelerando a razón de 0'5 m/s^2.
a) Hallar instante del encuentro y su posición.
b) ¿En qué posición el móvil A cambia el sentido del movimiento?
R.: Se cruzan ambos móviles en dos ocasiones: a los 4'81s a 56'52 m a la derecha de O, y a los 48'5 s a 1050 m a la izquierda de O. En móvil A cambia su sentido de movimiento a los 14 s a 141 m a la derecha de O.

7.- Una partícula se mueve en trayectoria recta, con una aceleración dada por la expresión a = - 3t^2. Si su velocidad, al cabo de 3 s, es de 20 m/s y en el instante inicial se halla en x_0 = - 8 m, hallar la velocidad v(t) y la posición x(t) de la partícula en todo instante.
R.: v(t) = 47 – t^3 **x(t) = –** $\frac{1}{4}t^4 + 47\,t - 8$

8.- La aceleración de un móvil es $\vec{a}(t) = 6\,\hat{i} + (6\,t + 1)\,\hat{j}$. La velocidad inicial es $\vec{v}_0 = 2\,\hat{i}$ y se encuentra en P_0(4, -2). Hallar:
a) $\vec{v}(t)$, v(t) y $\vec{r}(t)$
b) En el instante t = 5 s, hallar las aceleraciones a, a_t, a_n y el radio de curvatura R.
R.: a) $\vec{v}(t) = 2(3\,t + 1)\,\hat{i} + t(3\,t + 1)\,\hat{j}$ $v(t) = (3\,t + 1)\sqrt{t^2 + 4}$
$\vec{r}(t) = (3\,t^2 + 2\,t + 4)\,\hat{i} + (t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2)\,\hat{j}$
b) a = 31'58 m/s^2 ***a_t = 31'01 m/s^2*** ***a_n = 5'94 m/s^2*** ***R = 1250 m***

9.- Un cuerpo vibra con un MAS de 0'2 s de periodo y 20 cm de amplitud. Considérese la constante de fase nula. Calcular:
a) la posición, la velocidad y la aceleración cuando el cuerpo se halle a un sexto de periodo de la posición de equilibrio. Señalar gráficamente dicho estado del cuerpo
b) la velocidad máxima y la aceleración máxima.
R.: x(1/6T)=17'3 cm ***v(1/6 T) = 3'14 m/s*** ***v_{max} = 6'28 m/s***
a(1/6 T) = - 170'9 m/s^2 ***a_{max} = 197'4 m/s^2***

10.- Un MAS tiene una amplitud de 20 cm; su aceleración vale 0.40 m/s^2 en un punto cuya elongación es 10 cm. Determinar la ecuación del movimiento, x(t), suponiendo nula la fase inicial.
R.: x(t) = 0,2 sen(2t)

11.- Una partícula está dotada de un MAS, de 50 vibraciones por segundo. Se sabe que en el instante inicial se encuentra 1'48 cm a la izquierda del centro de vibración y con una velocidad de 25'12 cn/s dirigida hacia la izquierda. Con estos datos, escribe la ecuación de la vibración x(t).
R.: x(t) = 1'482 senπ(100 t + 1'48) cm

12.- Del MAS de un cuerpo, sabemos que se opera con una frecuencia de 7 Hz; que en el instante inicial la elongación es x = - 2 cm y la velocidad v = - 20 cm/s. Hallar: a) la ecuación del MAS.- b) la posición y velocidad del cuerpo en el instante t = 0'05 s.
R.: a) x(t) = 2'051 senπ(14 t + 1'4288) cm ***b) x(0'05) = 0'808 cm*** ***v(0'05) = 82'92 cm/s***

www.yoquieroaprobar.es

13.- Una rueda, de 80 cm de radio, gira a 3000 rpm. En el instante t = 0 se le aplica un freno que la detiene al cabo de 200 vueltas.
a) ¿Qué aceleración angular le produce el freno y cuánto tarda en detenerse?
b) ¿Cuántas vueltas ha dado en los 5 primeros segundos? ¿Cuál es entonces su velocidad angular, en rpm?
c) En el instante t = 5 s, ¿cuánto valen la aceleración tangencial y la aceleración angular de un punto de su periferia?
R.: a) α = - 12'5π rd/s^2 t = 8 s b) 171'875 vueltas 1125 rpm.
c) a_t = - 31'42 m/s^2 a_n = 144'13 m=s^2

14.- Un automotor parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50 segundos de iniciada su marcha alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo instante conserva tal velocidad. Hallar:
a) la aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.
b) la aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los 50 segundos.
c) la velocidad angular media en la primera etapa, y la velocidad angular al cabo de 50 segundos.
d) el tiempo que tarda el automotor en dar 100 vueltas al circuito.
R.: a_t = 0'4 m/s^2 a_n = 1 m/s^2 a = 1'07 m/s^2 L = 500 m
ω_m = 0'025 rd/s ω = 0'05 rd/s t = 3 h 29 min 45 s

www.yoquieroaprobar.es

TEMA 3.-

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

SUMARIO:

3.1.- Introducción
3.2.- Momento lineal e impulso mecánico
3.3.- Momento angular e impulso angular
3.4.- Energía cinética y trabajo
3.-5 Potencia mecánica

3.6.- Campos escalares y vectoriales.- Representación
3.7.- Fuerzas conservativas.- Energía potencial
3.8.- Energía mecánica.- Conservación
3.9.- Ejemplos:
a) Energía potencial del campo gravitatorio terrestre
b) Energía potencial elástica de un resorte
3.10.- Fuerzas no conservativas.- Fuerzas disipativas
3.11.- Teorema de la energía mecánica

3.12.- Campos de fuerzas: intensidad de campo
3.13.- Potencial
3.14.- Gradiente de potencial
3.15.- Flujo de un campo vectorial.- Teorema de Gauss

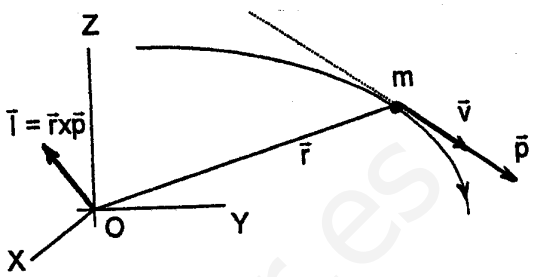
Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

www.yoquieroaprobar.es

1.- INTRODUCCIÓN

a.- Partícula material (punto material o partícula material; abreviadamente, p.m.) es, en Física, todo aquel cuerpo material de cuyas dimensiones y forma geométrica se prescinde. Por ello, puede ser representado como un punto geométrico con masa. Sus características son, en todo instante y respecto de un cierto referencial:

- su masa, m
- su posición respecto del referencial, $\vec{r}$ (t)
- su velocidad, $\vec{v}$ (t)



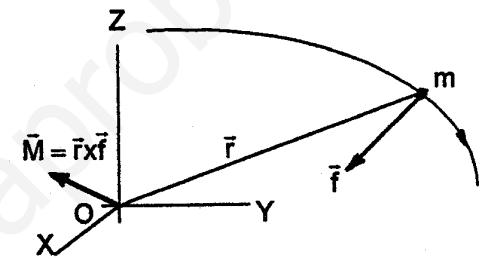
A partir de estas magnitudes se definen los siguientes conceptos:

a) **Momento lineal** del p.m., de masa m y velocidad $\vec{v}$ (t):

$$\vec{p} \equiv m\ \vec{v}$$

b) **Momento angular** del p.m. de masa m, velocidad $\vec{v}$ (t) y posición respecto del referencial, $\vec{r}$ (t):

$$\vec{L} \equiv \vec{r}\ x\ \vec{p}\ = \vec{r}\ x\ m\vec{v}$$



c) **Energía cinética** del p.m., de masa m y velocidad $\vec{v}$ (t):

$$E_c \equiv ½\ m\ v^2$$

b.- Interacción de otros cuerpos materiales con el p.m.

- Diversos cuerpos pueden interaccionar con el p.m. Estas interacciones se representan mediante **fuerzas** $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots \vec{f}_i, \ldots \vec{f}_n$

- La acción de un cuerpo sobre otro puede representarse no sólo por la fuerza $\vec{f}_i$ ejercida sobre él sino también por el **momento de la fuerza** respecto del origen del referencial, y se define así:

$$\vec{M}_i \equiv \vec{r}\ x\ \vec{f}_i$$

- Se denomina **resultante** de las fuerzas aplicadas al p.m., o bien **fuerza neta**, a la suma vectorial de todas las aplicadas a dicho punto:

$$\vec{F} \equiv \sum \vec{f}_i$$

- Y **momento resultante** de dichas fuerzas, a la suma vectorial de los momentos correspondientes:

$$\vec{M} \equiv \sum \vec{M}_i$$

Se verifica $\vec{M} \equiv \sum \vec{M}_i = \sum(\vec{r}\ x\ \vec{f}_i) = \vec{r}\ x\ \Sigma\vec{f}_i = \vec{r}\ x\ \vec{F}$, que expresa que "*el momento resultante es igual al momento de la resultante*".

www.yoquieroaprobar.es

2.- MOMENTO LINEAL E IMPULSO MECÁNICO.- TEOREMA

- Al actuar la fuerza $\vec{f}$ sobre el p.m. durante un tiempo elemental dt (entiéndase, durante un tiempo muy pequeño), le comunica un **impulso mecánico elemental** , $d\vec{I}$ definido así:

$$\boxed{d\vec{I} \equiv \vec{f}\ dt}$$

- Cuando la fuerza actúa en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el impulso mecánico de la fuerza $\vec{f}$ en ese intervalo se obtiene por integración:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\, dt$$

- Sólo si $\vec{f}$ es constante en ese intervalo de tiempo, se puede escribir:

$$\vec{I} \equiv \vec{f}\ \Delta t = \vec{f}\,(t_2 - t_1)$$

Teorema del momento lineal: Sea $\vec{F}$ la fuerza resultante o fuerza neta aplicada al p.m. Puesto que esta fuerza verifica que $\vec{F} = m.\vec{a}$, entonces, su impulso elemental en un tiempo dt es:

$$d\vec{I} \equiv \vec{F}\,dt = m.\vec{a}\,.dt = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.dt = m.\,d\vec{v} = d(m\vec{v}) = d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\vec{I} = d\vec{p}}$$

Y si la fuerza neta actúa durante un tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (desde el instante t_1 hasta el instante t_2), entonces el impulso es:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

Ambas expresiones recuadradas expresan el efecto que se sigue a la acción de la fuerza resultante sobre el p.m.: ésta le comunica un impulso mecánico cuyo efecto es el de variar su momento lineal.

"El impulso mecánico de la fuerza neta aplicada a una partícula material es igual a la variación experimentada por el momento lineal de dicha partícula"

Definición dinámica de fuerza: Según el teorema anterior, $d\vec{I} \equiv \vec{F}\,dt = d\vec{p}$, podemos escribir:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Esta expresión de la fuerza resultante es una forma de "definir" dinámicamente la fuerza neta que actúa sobre el p.m.: ésta es igual a la velocidad con la que varía el momento lineal del punto material sobre el que actúa.

Partícula libre: Si en todo instante la fuerza neta es nula, $\vec{F} = 0$, entonces el momento lineal del p.m. se mantiene constante ($\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ constante); el p.m. se mueve con un MRU. Se dice entonces que el p.m. es una **partícula libre**.

www.yoquieroaprobar.es

3.- MOMENTO ANGULAR E IMPULSO ANGULAR.- TEOREMA

- Al actuar la fuerza $\vec{f}$ sobre el p.m. durante un tiempo elemental dt (es decir, muy pequeño), le comunica también un **impulso angular elemental** $d\vec{J}$, definido así:

$$\boxed{d\vec{J} \equiv \vec{M}\,dt}$$

- Cuando la fuerza actúa en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el impulso angular de la fuerza $\vec{f}$ en ese intervalo se obtiene por integración:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}.dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{f})\,dt$$

- Sólo si $\vec{M}$ es constante en ese intervalo de tiempo, se puede escribir:

$$\vec{J} \equiv \vec{M}\,\Delta t = \vec{M}\,(t_2 - t_1)$$

Teorema del momento angular: Sea $\vec{F}$ la fuerza resultante o fuerza neta aplicada al p.m. y $\vec{M}$ el momento resultante.

Hemos definido el momento angular por $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$. ¿Cómo varía este momento angular $\vec{L}$ con el tiempo cuando al cuerpo se le aplica una fuerza neta $\vec{F}$? Para hallar esta evolución temporal de $\vec{L}$ debemos calcular la derivada de $\vec{L}$ respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{M} = \vec{M}$$

Por tanto: $$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

"El momento resultante de las fuerzas aplicadas a una partícula material es igual a la velocidad de variación de su momento angular": $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Esta expresión es ***la ecuación fundamental de la dinámica de rotación*** aplicada a un punto material.

Conservación del momento angular: Una partícula que conserva en el tiempo su momento angular $\vec{L}$ (o sea, que $\vec{L}$ se mantiene constante), verifica:

$$\vec{L} \text{ constante} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

El valor nulo de $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ puede darse en dos posibles supuestos:

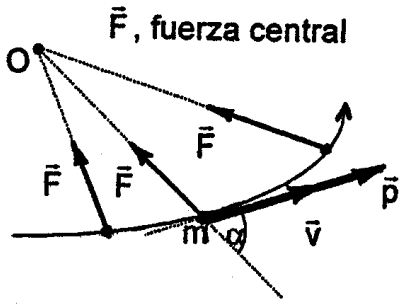
i) o bien porque $\vec{F} = 0 \Rightarrow$ el p.m. es una **partícula libre.**

ii) o bien porque $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow$ la fuerza neta $\vec{F}$ es una **"fuerza central"**

www.yoquieroaprobar.es

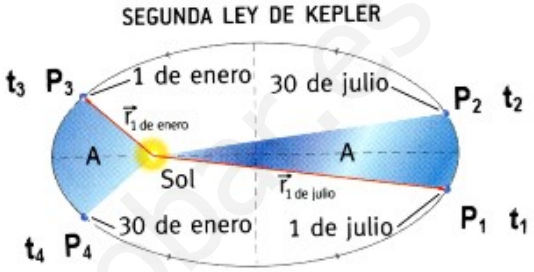
Se llaman **<u>fuerzas centrales</u>** *a las fuerzas cuya recta de posición pasa en todo instante por un punto. Llamamos a este punto <u>centro</u>* (figura 1ª).
Si se adopta dicho punto como origen del sistema de referencia, entonces $\vec{r} \times \vec{F} = 0$.

Éste es el caso ii), que a continuación estudiaremos más detenidamente.

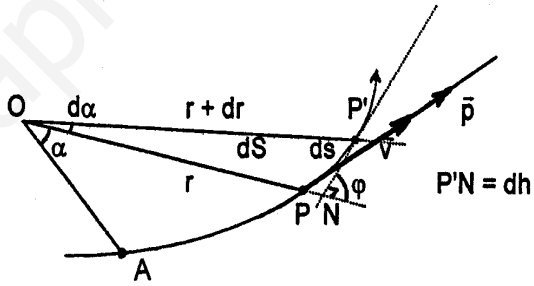


El hecho de que el **<u>vector momento angular</u>** $\vec{L}$ se mantenga constante, supone que es a la vez constante en módulo, dirección y sentido:

a) $\vec{L}$ **constante en dirección y sentido** $\Rightarrow$
la trayectoria del p.m., bajo la acción de fuerzas centrales, es una **trayectoria plana**.
En efecto. Por definición, $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ implica que $\vec{L}$ es perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Pero este plano es el plano de la trayectoria. Al ser $\vec{L}$ constante, lo es asimismo el plano. Y por tanto, <u>la trayectoria en él es plana</u>.



b) $\vec{L}$ **constante en módulo** $\Rightarrow$
el movimiento del p.m. verifica la **ley de las áreas:**
"En el movimiento de una partícula sometida sólo a fuerzas centrales, su vector de posición (radiovector) barre áreas iguales en tiempos iguales"



Es decir, que si $t_2 - t_1 = t_3 - t_4$, entonces (figura 2ª): Área $\{SolP_1P_2\}$ = Área $\{SolP_3P_4\}$

Demostrémoslo:
En efecto, (figura 3ª):

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m\, r\, v \operatorname{sen} \varphi \qquad (\&)$$

donde φ es el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Llamemos dS al área elemental barrida por el radiovector $\vec{r}$ en un tiempo dt, al pasar la partícula de P a P', recorriendo el arco elemental ds = arc(PP'). Esta área dS es el área del triángulo elemental OPP'; su valor es:

$$dS = ½ \text{ (base x altura)} = ½\, r.dh = ½\, r.ds.\operatorname{sen} \varphi$$

puesto que $dh = ds \,.\, \operatorname{sen} \varphi$.

Dividiendo por dt ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\mathscr{A} \equiv \frac{dS}{dt} = ½ \,.\, r.\, (\frac{ds}{dt}).\, \operatorname{sen} \varphi = ½ \,.\, r \,.\, v \,.\, \operatorname{sen} \varphi \qquad (\$)$$

A $\mathscr{A} \equiv \dfrac{dS}{dt}$ se le denomina **<u>velocidad areolar</u>** del móvil en su trayectoria, y expresa el área barrida por el móvil en la unidad de tiempo.

De acuerdo con (&) y ($),

$$\boxed{\mathscr{A} \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad \text{constante}}$$

Concluyendo, "***la partícula material, bajo la acción de una fuerza neta central, se mueve en trayectoria plana, de modo que su velocidad areolar se mantiene constante, e igual a L/2m"***, siendo L el momento angular y m la masa de la partícula.

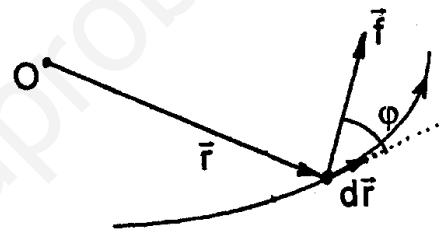
El movimiento de los planetas en torno al sol; el de los satélites; el del electrón en el átomo de hidrógeno... son esencialmente movimientos bajo la acción de fuerzas centrales. El momento angular se conserva, siendo su valor una constante del movimiento.

4.- ENERGÍA CINÉTICA Y TRABAJO.- TEOREMA

Sea una fuerza $\vec{f}$ que actúa sobre un p.m. durante un tiempo elemental dt. Supongamos que el p.m. experimenta un desplazamiento elemental $d\vec{r}$.

Se define el **<u>trabajo elemental</u>** dW realizado por la fuerza sobre el p.m. en ese desplazamiento así:

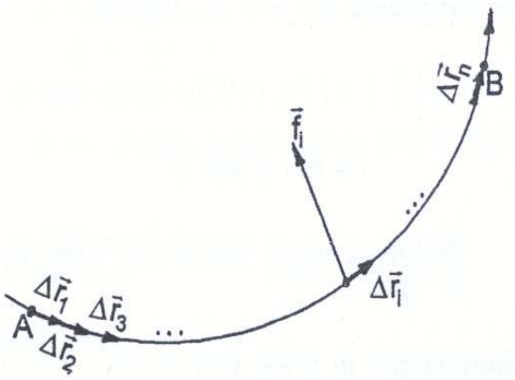
$$\boxed{dW = \vec{f}.d\vec{r} = f \,.\, \cos\varphi \,.\, ds}$$



donde $ds = |d\vec{r}|$ y φ es el ángulo determinado por los vectores $\vec{f}$ y $d\vec{r}$ (fig.)

Si el p.m. recorre una trayectoria determinada, entre dos posiciones A y B, el trabajo realizado por la fuerza se expresa así:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}.d\vec{r}$$



* Veamos el *<u>significado</u>* de esta integral (integral de línea).

Al recorrer la partícula el arco de trayectoria AB, supongamos que lo hace por desplazamientos sucesivos $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, ..., \Delta\vec{r}_i, ..., \Delta\vec{r}_n$.

Sea el valor medio de la fuerza en estos intervalos, respectivamente, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_i, ..., \vec{f}_n$.

Formemos en cada intervalo los productos escalares $\{\vec{f}_i \,.\, \Delta\vec{r}_i\}$,

y sumémoslos (desde i = 1 hasta i = n):

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \Delta\vec{r}_i$$

Si $n \to \infty$, de modo que todos y cada uno de los intervalos tienda a cero, la expresión

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \Delta\vec{r}_i$$

tiene un valor que representa el trabajo realizado por la fuerza aplicada al p.m. que recorre la trayectoria desde A hasta B.

www.yoquieroaprobar.es

Este valor es un caso particular de lo que denominamos integral de la función $\vec{f}$ a lo largo de una curva entre dos puntos de la misma, A y B:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}.d\vec{r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \Delta\vec{r}_i$$

* En *coordenadas cartesianas*, puesto que $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ y $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, podemos escribir su producto escalar, y por tanto, el trabajo elemental, así:

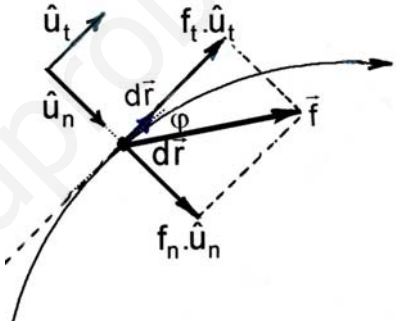
$$dW = \vec{f}\,.\,d\vec{r} = f_x.dx + f_y.dy + f_z.dz$$

La expresión del trabajo, en coordenadas cartesianas, es entonces:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}.d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} f_x.dx + \int_{y_A}^{y_B} f_y.dy + \int_{z_A}^{z_B} f_z.dz$$

* Por otro lado, consideremos las *componentes intrínsecas* de la fuerza:

$$\vec{f} = f_t\,\hat{u}_t + f_n\,\hat{u}_n$$



donde $f_t = f.\cos\varphi$ es la componente tangencial y $f_n = f.\,\text{sen}\,\varphi$ es la componente normal o centrípeta de la fuerza.

Puesto que $d\vec{r} = ds\,\hat{u}_t$, $\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t.d\vec{r} = ds \\ \hat{u}_n.d\vec{r} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $dW = \vec{f}.d\vec{r} = f_t.\hat{u}_t.d\vec{r} + f_n.\hat{u}_n.d\vec{r} = f_t.ds$

Entonces, el trabajo, en un desplazamiento del móvil en su trayectoria, desde A hasta B, puede expresarse así:

$$W_{AB} = \int_{AB} f.\cos\varphi.ds = \int_{AB} f_t.ds$$

que quiere decir que "*sólo la componente tangencial de la fuerza realiza trabajo mecánico. La componente centrípeta realiza trabajo nulo,"* pues en todo punto de la trayectoria la fuerza centrípeta f_n es perpendicular al desplazamiento $d\vec{r}$.

<u>Teorema de la energía cinética</u>:

Sea $\vec{F}$ la **<u>fuerza neta</u>** aplicada a un p.m. Entonces, para un desplazamiento elemental $d\vec{r}$:

$$dW = \vec{F}\,.\,d\vec{r} = m.\vec{a}.d\vec{r} = m.(\frac{d\vec{v}}{dt}).d\vec{r} = m.d\vec{v}\,.\,(\frac{d\vec{r}}{dt}) = m.\ \vec{v}.d\vec{v} = d(\frac{1}{2}\ m\,v^2) = dE_c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dW = dE_c}$$

Y para un desplazamiento a lo largo de la trayectoria desde A hasta B, podemos escribir: $W_{AB} = \int_{AB} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{E_c(A)}^{E_c(B)} dE_c = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$

www.yoquieroaprobar.es

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{AB} = \Delta E_c}$$

donde por $E_c(A)$ y $E_c(B)$ expresamos las energías cinéticas del p.m. en A y en B, respectivamente.

Ambas relaciones, $dW = dE_c$ y $W_{AB} = \Delta E_c$, constituyen dos formas de expresar el teorema de la energía cinética, que puede formularse así:

"El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas aplicadas a un p.m. es igual a la variación experimentada por su energía cinética"

O bien,

"La fuerza neta, al actuar sobre un p.m. desplazándolo, le transfiere una cantidad de energía igual a la variación de su energía cinética"

5.- POTENCIA MECÁNICA

- Si dos fuerzas, al actuar sobre un cuerpo, realizan el mismo trabajo, es *más eficaz* aquélla que lo realiza en un tiempo menor. Para dar cuenta de la *eficacia* o rapidez con la que una fuerza realiza trabajo (transfiere energía) se introduce el concepto de **potencia** de dicha fuerza.

- La **potencia** de una fuerza $\vec{f}$ que actúa sobre un p.m. realizando un trabajo $dW = \vec{f} \cdot d\vec{r}$ en un tiempo dt se define así:

$$\boxed{\mathscr{P} \equiv \frac{dW}{dt}}$$

Es decir, es el trabajo realizado por la fuerza en la unidad de tiempo. Se ha supuesto dW como un trabajo elemental realizado por la fuerza en un tiempo elemental dt; la potencia así definida es la **potencia instantánea.**

- La potencia puede expresarse también así: $\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{f} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{f} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}}$$

- A veces es útil hablar de **potencia media** en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_B - t_A$. Es el cociente entre el trabajo realizado W_{AB} en dicho intervalo y el valor del mismo:

$$\boxed{\mathscr{P}_m = \frac{W_{AB}}{\Delta t} = \frac{W_{AB}}{t_B - t_A}}$$

- Veamos a continuación una nueva formulación del teorema de la energía cinética, en términos de potencia. Si es $\vec{F}$ la **fuerza neta** o **resultante** de las aplicadas al p.m., la potencia de dicha resultante vale $\mathscr{P} = \frac{dW}{dt}$ donde, según el teorema de la energía cinética, $dW = dE_c$.

www.yoquieroaprobar.es

Por tanto, se tendrá:

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{dE_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathscr{P} = \frac{dE_c}{dt}}$$

Es decir:

"la potencia desarrollada por la resultante al actuar sobre un cuerpo es igual a la velocidad con que varía la energía cinética de dicho cuerpo".

- En el sistema internacional (S.I.), la **energía** cinética y el **trabaj**o mecánico se miden en **julios**, (símbolo, J)**:** 1 J = 1 N.m; la **potencia** se mide en **vatios**,(símbolo, W): 1 W = 1 J / s

  En Ingeniería se usa aún a menudo una *unidad de potencia* llamada **caballo-vapor**, (CV) cuyo valor lo establecemos así: 1 CV = 735 W

  También se utiliza, y mucho, como *unidad de trabajo* el **kilovatio-hora,** (kWh) que representa el trabajo desarrollado durante una hora por una máquina cuya potencia es de un kilovatio: 1 kWh = 1 kWx1h = 1000 Wx3600 s = 3600000 J = $3'6 \times 10^6$ J

www.yoquieroaprobar.es

6.-CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.- REPRESENTACIÓN

♠ En general, se llama **campo** a la región del espacio en la que una magnitud física, escalar o vectorial, adquiere valores que dependen del punto del espacio (coordenadas x, y, z) y del tiempo. A estos valores, escalares o vectoriales, se los denomina "intensidad del campo". A veces, por abreviar, se acostumbra a denominar simplemente "campo" a este valor de la intensidad, que en general es función de punto y del tiempo.

Campo escalar $C(x, y, z, t)$ Campo vectorial $\vec{K}(x, y, z, t)$

♠ Así pues, si la magnitud física representada por el campo es una magnitud escalar, entonces se trata de **campo escalar**; mientras que si $\vec{K}$ es una magnitud vectorial, el campo se denomina **campo vectorial.**

♠: Si la magnitud física no depende del tiempo, entonces decimos que es un **campo estacionario**

$C(x, y, z)$ $\vec{K}(x, y, z)$

♠ Un campo de presiones, o de temperaturas, el potencial gravitatorio o el eléctrico, etc..., son ejemplos de campos escalares. Los podemos expresar así:

$p(x, y, z, t)$ $T(x, y, z, t)$ $V_g(x, y, z, t)$ $V(x, y, z, t)$

y si son estacionarios, así:

$p(x, y, z)$ $T(x, y, z)$ $V_g(x, y, z)$ $V(x, y, z)$

♠ El campo de velocidades de un fluido, los campos gravitatorio, eléctrico y magnético, etc ..., son campos vectoriales. Los expresamos así:

$\vec{v}(x, y, z, t)$ $\vec{g}(x, y, z, t)$ $\vec{E}(x, y, z, t)$ $\vec{B}(x, y, z, t)$

y si son estacionarios, así:

$\vec{v}(x, y, z)$ $\vec{g}(x, y, z)$ $\vec{E}(x, y, z)$ $\vec{B}(x, y, z)$

Así como un vector tiene tres componentes cartesianas, así un campo vectorial, en general, tiene como componentes cartesianas tres campos escalares:

$$\vec{K}(x, y, z) = K_x(x, y, z)\,\vec{i} + K_y(x, y, z)\,\vec{j} + K_z(x, y, z)\,\vec{k}$$

♠ Los campos escalares se representan gráficamente por sus **superficies de nivel**.
Superficie de nivel es el lugar geométrico de los puntos en los que el campo escalar adquiere un valor dado, constante: $C(x, y, z, t) = C_0$

Cuando el campo escalar se define en un recinto plano o en una superficie determinada, la función campo depende sólo de dos variables (y del tiempo, si es no estacionario); entonces las superficies de nivel se reducen a curvas de nivel.

Al representar el campo escalar, se dibujan las superficies o curvas de nivel a intervalos constantes de la magnitud.

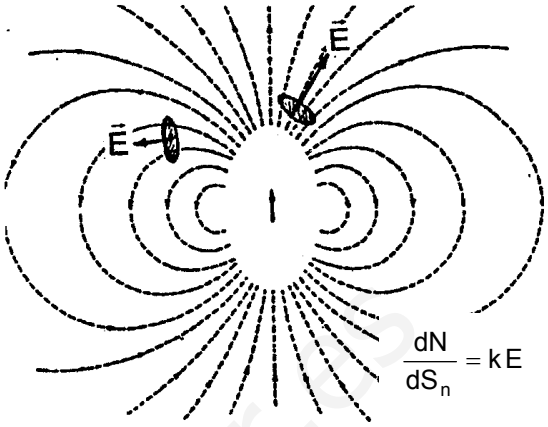
www.yoquieroaprobar.es

Véase en la página 56, en el ejemplo 1º un mapa de isobaras y en el ejemplo 2º un mapa topográfico con curvas de nivel.

♠ Los campos vectoriales se representan por sus **líneas de campo** (líneas de corriente, líneas de fuerza, etc....) Una línea de campo es tangente en todo punto al vector campo en él.

Se dibujan en nº tal que la densidad de líneas de campo a través de una superficie normal a ellas sea, en cada punto, proporcional a la intensidad del campo en él (módulo).

En la figura se muestran las líneas de campo eléctrico creadas por un dipolo.



7.- FUERZAS CONSERVATIVAS.- ENERGÍA POTENCIAL

♠ Sea $\vec{f}$ una fuerza aplicada a una partícula (p.m.). Supongamos que su valor depende de las posiciones por las que pasa el p.m. al recorrer éste su trayectoria; la fuerza se expresará pues $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ y es un **campo de fuerzas**. Lo supondremos estacionario.

♠ El **trabajo** realizado por el campo de fuerzas, actuando sobre el p.m. que recorre la trayectoria entre dos posiciones, A y B, es como se ha visto anteriormente:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}.d\vec{r}$$

Si se trata de una trayectoria cerrada, entonces el trabajo realizado por $\vec{f}$ a lo largo de todo el ciclo se expresa así:

$$W = \oint_c \vec{f}.d\vec{r}$$

♠ *Algunas fuerzas*, o campos de fuerzas, verifican lo siguiente: Al actuar sobre un p.m. que describe un ciclo cerrado el trabajo total desarrollado en el ciclo es nulo. Y ello cualquiera que sea el ciclo cerrado considerado. En estos casos, al campo de fuerzas $\vec{f}$ se le denomina **campo conservativo.** Así pues,

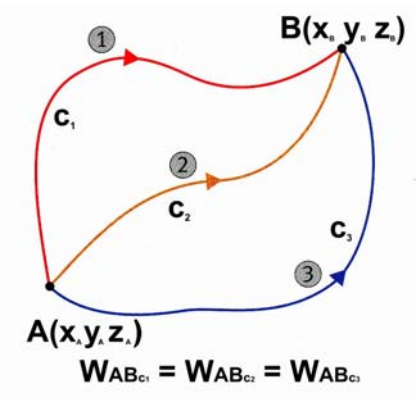
$$\oint_c \vec{f}.d\vec{r} = 0 \ \forall \text{ciclo cerrado } c \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}(x, y, z) \text{ es un campo conservativo.}$$

♠ En estas condiciones, sean $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$ dos puntos de un ciclo cerrado c cualesquiera; sean c_1 y c_2 las curvas de trayectoria determinadas en él por ambos puntos A y B. Se tiene pues:

$$W = \oint_c \vec{f}.d\vec{r} = \int_{AB_{c_1}} \vec{f}.d\vec{r} + \int_{BA_{c_2}} \vec{f}.d\vec{r} = \int_{AB_{c_1}} \vec{f}.d\vec{r} - \int_{AB_{c_2}} \vec{f}.d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{AB_{c_1}} \vec{f}.d\vec{r} = \int_{AB_{c_2}} \vec{f}.d\vec{r}$$

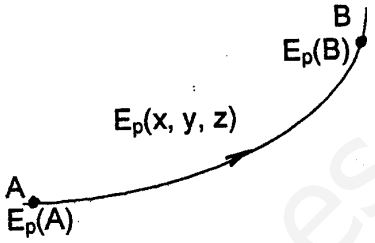
$$\Rightarrow \quad W_{AB_{c_1}} = W_{AB_{c_2}}$$



o sea que "***el trabajo realizado por el campo conservativo para llevar el p.m. de A a B es independiente de la trayectoria seguida; sólo depende de los puntos inicial A y final B, no de los intermedios.***"

♠ Este comportamiento de las fuerzas conservativas permite asignar al p.m. una **energía potencial** $E_p(x, y, z)$ asociada a cada fuerza conservativa $\vec{f}(x, y, z)$. Esta energía potencial es un campo escalar que establecemos así:

"El trabajo realizado por la fuerza conservativa $\vec{f}(x, y, z)$ al actuar sobre un punto material desde una posición inicial $A(x_A, y_A, z_A)$ a otra final $B(x_B, y_B, z_B)$ es igual a la diferencia entre los valores de su energía potencial inicial $E_p(x_A, y_A, z_A)$ menos la final $E_p(x_B, y_B, z_B)$. O sea, por definición:



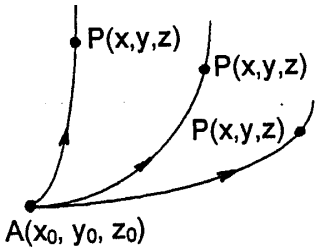
$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}(x,y,z).d\vec{r} = E_p(x_A, y_A, z_A) - E_p(x_B, y_B, z_B) = -\Delta E_P$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{AB} = E_P(A) - E_P(B)} \quad \text{o más abreviadamente} \quad \boxed{W_{AB} = -\Delta E_P}$$

Así pues, para hallar el trabajo W_{AB} realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos A y B, basta calcular la diferencia de la energía potencial asociada a dicha fuerza: energía potencial $E_P(A)$ en la posición inicial A menos energía potencial $E_p(B)$ en la posición final B.

♠ En términos elementales: $\boxed{dW \equiv \vec{f}\,.\,d\vec{r} = -dE_P}$

♠ Esta expresión diferencial permite calcular, por integración, la **energía potencial** $E_p(x, y, z)$ de un p.m. en cada posición P(x, y, z), salvo constante.



Para ello, tomemos un punto fijo $A(x_0, y_0, z_0)$ de referencia, y sea P(x, y, z) un punto genérico cualquiera. Hallemos el trabajo de la fuerza conservativa sobre el p.m. en su desplazamiento desde A hasta P. Será:

$$\int_{AP} \vec{f}(x,y,z).d\vec{r} = E_A(x_0, y_0, z_0) - E_p(x, y, z)$$

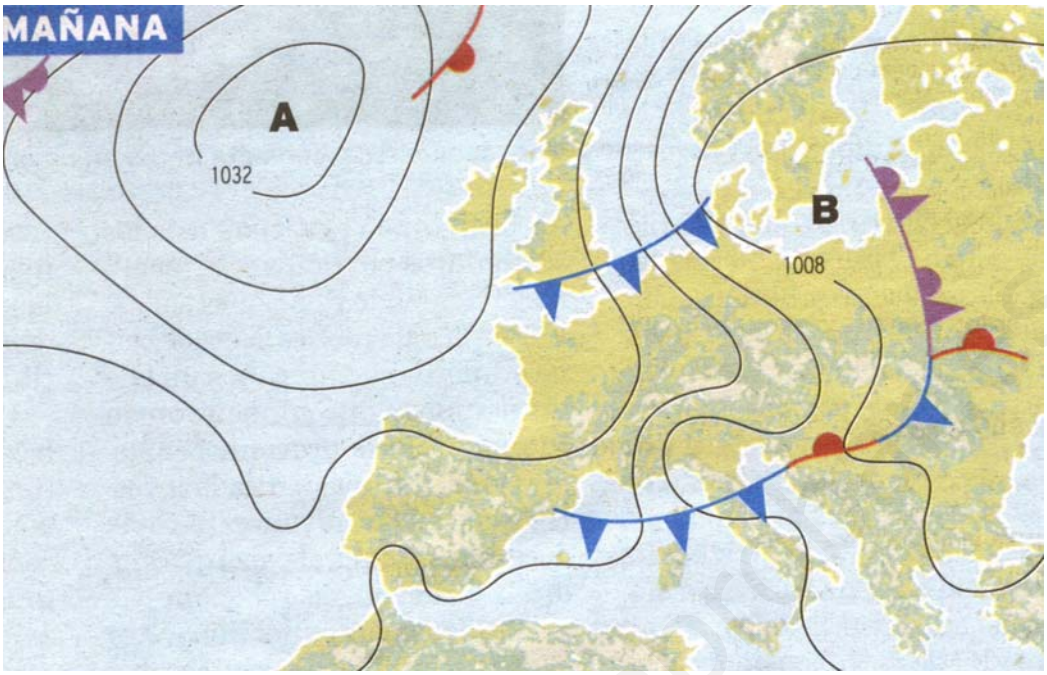
Despejando $E_p(x, y, z)$, y llamando $C \equiv E_p(x_0, y_0, z_0)$, se llega a:

$$E_p(x,y,z) = -\int_{AP} \vec{f}(x,y,z).d\vec{r} + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_p(x, y, z) = -\int \vec{f}(x,y,z).d\vec{r} + C}$$

www.yoquieroaprobar.es

***<u>Ejemplo 1º</u>**: En los "mapas del tiempo", las **isobaras** son líneas que unen puntos sobre la superficie de la tierra de igual presión atmosférica. En los que se presentan en T.V. suelen estar dibujadas de cuatro en cuatro milibares (760 mmHg de presión equivalen a 1013 milibares).*



***<u>Ejemplo 2º</u>**: Las **curvas de nivel** de un mapa topográfico pasan por puntos de igual altitud. Suelen dibujarse a intervalos constantes de alturas, por ejemplo, de 10 en 10 m.*

que expresa la **energía potencial** del p.m. en un punto cualquiera, salvo constante. (Este, "salvo constante", quiere decir que el valor de la energía potencial en un punto no está determinado numéricamente sino cuando asignemos un valor dado a la energía potencial del p.m. en el punto de referencia A: $C \equiv E_P(x_0,y_0,z_0)$.

♠ Las energías potenciales asociadas a diversas fuerzas conservativas aplicadas al mismo p.m. son aditivas, puesto que los trabajos también lo son.

8.- ENERGÍA MECÁNICA.- CONSERVACIÓN

♦ La **energía mecánica** de una partícula material, en cada punto, se define como la suma de su energía cinética y su energía potencial: $E_m \equiv E_c + E_p$

♦ Si una partícula material está sometida exclusivamente a **fuerzas conservativas**, se tiene:

. por un lado	$W_{AB} = -\Delta E_P$	o bien	$W_{AB} = E_p(A) - E_p(B)$
. por otro lado	$W_{AB} = \Delta E_c$	o bien	$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A)$
Por lo tanto:	$\Delta E_c = -\Delta E_P$	o bien	$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B)$
	$\Delta E_c + \Delta E_P = 0$	o bien	$E_c(B) - E_c(A) - E_p(A) + E_p(B) = 0$
o sea	$\Delta(E_c + E_P) = 0$	o bien	$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$
es decir	$\boxed{\Delta E_m = 0}$	o bien	$\boxed{E_m(A) = E_m(B)}$

Enunciamos, pues: ***"Al desplazarse en el espacio una partícula material, sometida exclusivamente a fuerzas conservativas, mantiene invariante su energía mecánica."***

9.-EJEMPLOS

Apliquemos a continuación el estudio anterior a dos ejemplos prácticos importantes:

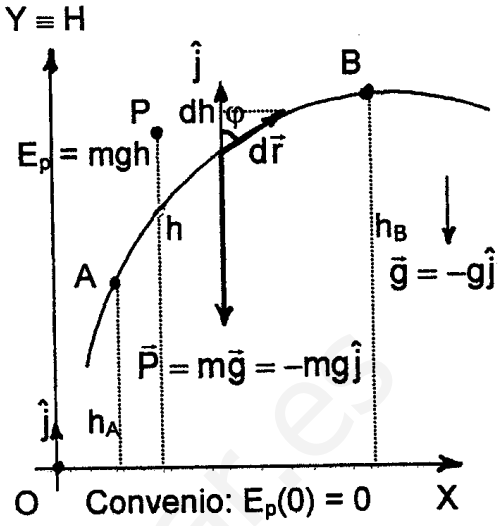
a) **Energía potencial del campo gravitatorio terrestre** en las proximidades de la superficie de la Tierra.
b) **Energía potencial elástica de un resorte**.

a).- Energía potencial del campo gravitatorio terrestre

• Un p.m., en las proximidades de la superficie terrestre, está sometido a una fuerza (entre otras que puedan actuar sobre él), $\vec{P} = m\vec{g}$, que llamamos **peso** del p.m. En un recinto de dimensiones lineales pequeñas frente al radio de la tierra, el valor de $\vec{g}$ puede considerarse constante; es decir, el campo gravitatorio es prácticamente uniforme. Entonces, siguiendo la figura, podemos escribir:

www.yoquieroaprobar.es

$$E_{pg} = -\int \vec{f}\,.\,d\vec{r} + C = -\int \vec{P}\,.\,d\vec{r} + C =$$
$$= -\int m\vec{g}\,.\,d\vec{r} + C$$



Pero: $\vec{P} = m\vec{g} = -m\,g\,\vec{j}$ y $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

Por tanto: $E_{pg} = -\int (-m\,g\,\vec{j})(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) + C =$

$$= \int m\,g\,dy + C = m\,g\,y + C.$$

El eje OY es el eje vertical; podemos llamarle eje OH, y cambiar la variable y por la h (altura). Entonces:

$$E_{pg}(h) = m\,g\,h + C$$

Tomemos, por convenio, $E_{pg}(0) = 0$ (es decir, el nivel de energía potencial gravitatoria nula se toma a altura nula, h = 0).
Entonces, $E_{pg}(0) = m\,g\,0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$

Por tanto, la expresión de $E_{pg}(h)$ será, pues

$$\boxed{E_p(h) = m\,g\,h}$$

- El trabajo realizado por la fuerza del peso es igual a la <u>disminución</u> de la energía potencial del p.m. sobre el que actúa. En efecto,

$$W_{AB} = -\,\Delta E_{pg} = E_{pg}(A) - E_{pg}(B) = m\,g\,h_A - m\,g\,h_B = m\,g\,(h_A - h_B)$$

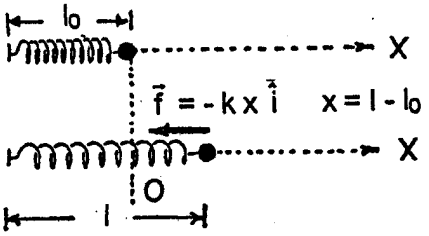
Este trabajo es positivo cuando disminuye la energía potencial (caída del cuerpo, $h_A > h_B$). Por el contrario, el cuerpo gana energía potencial cuando se eleva ($h_B > h_A$), en cuyo caso el trabajo realizado por el peso es negativo.

- Si el peso es la <u>única</u> fuerza que actúa sobre el p.m., su energía mecánica se conserva.

Por tanto, $E_m = ½\,m\,v^2 + m\,g\,h = \text{constante}$

Cualquier aumento de energía cinética del p.m. (aumento de su velocidad) se verifica a expensas de una disminución de su energía potencial (pérdida de altura del p.m.); y cualquier aumento de la energía potencial (elevación del p.m.) se opera a expensas de una disminución de su energía cinética (pérdida de velocidad).

<u>b).- Energía potencial elástica de un resorte</u>



- Un resorte elástico aplica a un cuerpo, de masa m, unido en su extremo libre, una fuerza f = - k x (Ley de Hooke), siendo x la posición del cuerpo respecto de aquélla que adopta cuando el resorte tiene su longitud natural (posición de equilibrio, x = 0). Vectorialmente, $\vec{f} = -k\,x\,\vec{i}$.

- Calculemos la **energía potencial elástica** almacenada en el cuerpo a causa del resorte, en la posición x:

$$E_{pe} = -\int \vec{f}\,.\,d\vec{r} + C = -\int (-k\,x\,\vec{i}\,).(\,dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\,) + C = k\int x\,.dx + C = ½\,k\,x^2 + C$$

Adoptando, como convenio, que la energía potencial elástica del resorte es nula cuando se encuentra en equilibrio, $E_{pe}(0) = 0$, se tiene entonces C = 0. Por lo tanto:

$$\boxed{E_{pe}(x) = ½\,k\,x^2}$$

- El trabajo de la fuerza elástica entre dos posiciones A y B vendrá dado por:

$$W_{AB} = -\,\Delta E_{pe} = E_{pe}(A) - E_{pe}(B) = ½\,k\,x_A^2 - ½\,k\,x_B^2 = ½\,k\,(x_A^2 - x_B^2)$$

- Si sobre el cuerpo <u>actúa sólo</u> la fuerza elástica, como es conservativa, no va a producir variaciones en su energía mecánica. Por tanto, en toda posición:

$$E_m = ½\,m\,v^2 + ½\,k\,x^2 = \text{constante},$$

por lo que cualquier aumento de energía cinética del p.m. supone una disminución de su energía potencial elástica, y viceversa. Este valor invariante de la energía mecánica es una constante del movimiento.

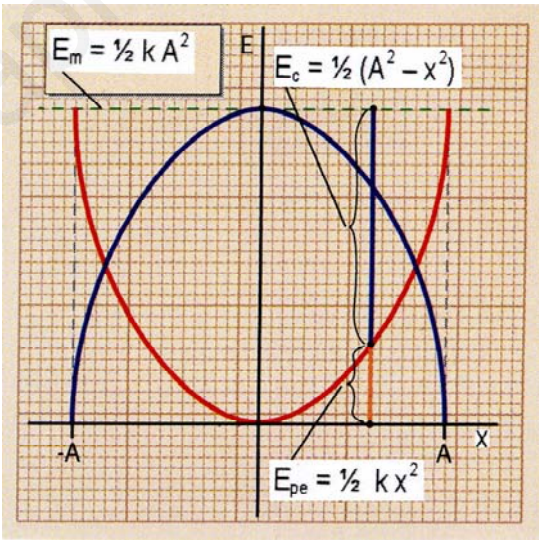
- Cuando el p.m. pasa por su posición de equilibrio, x = 0, toda la energía es cinética, verificándose:

$$E_m = E_c(0) = ½\,m\,v_0^2$$

siendo v_0 la velocidad en dicha posición x = 0.

Por el contrario, cuando la velocidad se anula, y por tanto la energía cinética del p.m., entonces toda la energía mecánica es energía potencial elástica, cosa que se verifica para x = ±A (siendo éstas las posiciones más alejadas del centro, a uno y otro lado de él). Para estas posiciones:

$$E_m = E_{pe}(\pm A) = ½\,k\,A^2.$$



En las demás posiciones, la energía mecánica se reparte en ambas formas, cinética y potencial, teniéndose:

$$E_m = ½\,m\,v^2 + ½\,k\,x^2$$

Por lo tanto, la energía cinética del p.m., en un punto cualquiera x, será:

$$E_c(x) = E_m - E_p(x) = ½\,k\,A^2 - ½\,k\,x^2 = ½\,k\,(A^2 - x^2)$$

En resumen: Energía mecánica, $E_m = ½\,k\,A^2 = ½\,m\,v_0^2$ constante

Energía potencial, $E_{pe}(x) = ½\,k\,x^2$

Energía cinética, $E_c(x) = ½\,k\,(A^2 - x^2)$

www.yoquieroaprobar.es

En la figura, véanse las gráficas de la energía cinética $E_{pe}(x) = ½\ k\ x^2$, energía potencial elástica $E_c(x) = ½\ k\ (A^2 – x^2)$ y de la energía mecánica $E_m = ½\ m\ v_0^2 = ½\ k\ A^2$ = constante.

- A partir de este estudio, vamos a obtener la ecuación del movimiento del p.m. sometido a una fuerza elástica (oscilador armónico). Lo hallaremos por integración de la ecuación de las energías, utilizando la constante del movimiento $E_m = ½\ k\ A^2$ (y teniendo en cuenta que v = dx/dt). Se tiene:

$$½\ m\ v^2 + ½\ k\ x^2 = E_m \quad \rightarrow \quad ½\ m\ v^2 + ½\ k\ x^2 = ½\ k\ A^2$$

$$\rightarrow \quad ½\ k\ A^2 = ½\ m\ (dx/dt)^2 + ½\ k\ x^2 \quad \rightarrow$$

$$(dx/dt)^2 = \frac{k}{m}\ (A^2 – x^2) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\ dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Llamando, para abreviar, $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ e integrando, resulta:

$$\omega\ t + \varphi_0 = \text{arc sen}\ (x/A)$$

donde φ_0 es la constante de integración (que en nuestro caso se denominará fase inicial o constante de fase). La expresión anterior, finalmente, puede escribirse así:

$$\boxed{x = A\ \text{sen}\ (\omega\ t + \varphi_0)}$$

y representa la ecuación del movimiento del p.m., unido al resorte: se trata de un movimiento armónico simple (M.A.S.), de amplitud A, frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, y periodo $T = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{m}{k}}$ (Oscilador armónico).

10.- FUERZAS NO CONSERVATIVAS.- FUERZAS DISIPATIVAS

Decimos que $\vec{f} = \vec{f}\ (x,y,z)$ es una **fuerza no conservativa** o un **campo de fuerzas no conservativo** cuando el trabajo que realiza en un desplazamiento del p.m. desde una posición inicial, A, a otra final, B, *depende de todos los puntos de la trayectoria*, no sólo de sus posiciones inicial y final, pudiendo depender además de otras magnitudes.

En Mecánica se presentan muchos casos de este tipo de fuerzas. Unas veces producen trabajos positivos, **trabajo motor**, como por ejemplo, la fuerza aplicada por el motor de un coche en su movimiento.

Otras veces las fuerzas no conservativas producen trabajos negativos, **trabajo resistente,** como en el caso de la fuerza de rozamiento del aire sobre el coche en su movimiento, o las fuerza de rozamiento de una superficie sobre un cuerpo que se desliza por él; en estos últimos casos, a estas fuerzas se las denomina **fuerzas disipativas**, porque son las responsables de la pérdida de energía mecánica del cuerpo sobre el que actúan, como veremos.

www.yoquieroaprobar.es

Fuerzas de rozamiento entre superficies por deslizamiento mutuo.-

Estas fuerzas son características de cuerpos en contacto, con movimiento relativo. Dependen de la naturaleza de sus superficies en contacto, y son proporcionales a la fuerza de interacción normal entre dichas superficies, denominada "reacción normal". Su valor puede expresarse así: $\vec{f}_r = -\mu N \hat{u}_t$, donde μ es el coeficiente dinámico de rozamiento, N la fuerza de "reacción normal", y $\hat{u}_t$ es el vector unitario en el sentido del movimiento.

Fuerzas de rozamiento viscoso, o de fricción en fluidos.-

En el caso del movimiento de un cuerpo en el seno de un fluido, esta fuerza puede expresarse, para movimientos con velocidad no muy grande, así: $\vec{f}_r = -k\,\eta\,v\,\hat{u}_t$ donde k es el coeficiente de fricción que depende de la forma del cuerpo sólido, η es el coeficiente de viscosidad del fluido, v la velocidad relativa del cuerpo sólido y el fluido, y $\hat{u}_t$ el vector unitario en el sentido del movimiento.

En ambos casos se observa que al desplazarse el cuerpo entre A y B, el trabajo desarrollado por dichas fuerzas $\vec{f}_r$ es esencialmente negativo. En efecto, para cualquier desplazamiento elemental $d\vec{r}$, es $dW = \vec{f}_r . d\vec{r} < 0$ ya que en toda posición $\vec{f}_r$ y $d\vec{r}$ son vectores de sentidos opuestos.

11.- TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Consideremos el caso general de un p.m. sometido a diversas fuerzas, conservativas y no conservativas. Sea W_{AB} el trabajo desarrollado por la resultante de todas ellas.

Según el <u>teorema de la energía cinética</u>, este trabajo es igual a la variación de la energía cinética experimentada por el p.m. en su desplazamiento desde A hasta B.

$$W_{AB} = \Delta E_c \qquad \text{o bien} \qquad W_{AB} = E_c(B) - E_c(A)$$

Pero este trabajo es el resultado de dos sumandos: el trabajo desarrollado por las fuerzas conservativas, W_{AB}(cons.), más el realizado por las fuerzas no conservativas, W_{AB}(no cons.):

$$W_{AB} = W_{AB}(\text{cons.}) + W_{AB}(\text{no cons.})$$

Las <u>fuerzas conservativas producen un trabajo igual a la pérdida de energía potencial</u> del p.m.:

$$W_{AB}(\text{cons.}) = -\Delta E_p \qquad \text{o bien} \qquad W_{AB}(\text{cons.}) = E_p(A) - E_p(B)$$

Llamando, para abreviar, $W_{AB}' \equiv W_{AB}$(no cons.), podemos escribir <u>el trabajo total</u> así:

$$W_{AB} = -\Delta E_p + W_{AB}' \qquad \text{o bien} \qquad W_{AB} = E_p(A) - E_p(B) + W_{AB}'$$

Así pues, por un lado $W_{AB} = \Delta E_c$ y por otro $W_{AB} = -\Delta E_p + W_{AB}'$. Por tanto:

$$W_{AB}' = \Delta E_c + \Delta E_p \qquad \text{o bien} \qquad W_{AB}' = \{E_c(B) + E_p(B)\} - \{E_c(A) + E_p(A)\}$$

$$\boxed{W_{AB}' = \Delta E_m} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{W_{AB}' = E_m(B) - E_m(A)}$$

www.yoquieroaprobar.es

Enunciamos: ***"El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas aplicadas a un p.m. es igual a la variación experimentada por su energía mecánica."***

Por tanto, la energía mecánica no se conserva cuando hay fuerzas no conservativas que trabajan; de ahí precisamente su nombre.

Las fuerzas no conservativas, pues, transfieren energía mecánica al cuerpo al actuar sobre él:

a) Algunas de ellas *incrementan* la energía mecánica del cuerpo. Para ellas W_{AB}' es *positivo*, y tiene lugar por medio de ellas una transferencia de energía mecánica hacia el cuerpo, con lo que éste *queda enriquecido*; el trabajo W_{AB}' mide la energía transferida.

b) Otras fuerzas no conservativas *disminuyen* la energía mecánica del cuerpo; ocurre cuando W_{AB}' es *negativo*. Se dice entonces que las fuerzas son **disipativas** porque "disipan" la energía mecánica del cuerpo sobre el que actúan; éste pierde energía mecánica, que es transferida a otros cuerpos y que en definitiva, en la mayor parte de los casos, aparece en forma de **calor**.

www.yoquieroaprobar.es

12.- CAMPOS DE FUERZAS: INTENSIDAD DE CAMPO

♣ Consideremos un sistema de masas en una región del espacio. Su sola presencia en él origina una perturbación o alteración de las propiedades de dicha región; esta alteración se pone de manifiesto porque, colocada una pequeña masa m' (masa testigo, masa prueba) en un punto de la región P(x, y, z), experimenta una fuerza de interacción $\vec{F}$ (x, y, z, m'): es la acción gravitatoria del sistema de masas sobre dicha masa testigo m'. [Ésta deberá ser pequeña, para que su presencia influya mínimamente en el estado alterado del espacio]. $\vec{F}$ (x,y,z,m') es un campo de fuerzas, porque su valor depende de la posición que adopte en el espacio la masa m'. Pero también depende de la propia masa m' de prueba.

Con el fin de expresar la nueva propiedad del espacio producida por el sistema de masas, con independencia de la masa testigo, y dado que el valor de la fuerza $\vec{F}$ es proporcional a dicha masa, se define **intensidad del campo de fuerzas gravitatorio** (que recibe en este caso, abreviadamente, el nombre de **campo gravitatorio**) como la *fuerza de interacción por unidad de masa testigo*. Así pues:

$$\vec{g}(x, y, z) \equiv \frac{1}{m'}\vec{F}(x, y, z, m') \qquad \text{o bien, abreviadamente} \qquad \boxed{\vec{F} = m'\,\vec{g}} \qquad (1)$$

♣ Análogamente ocurre cuando en una región del espacio se coloca una distribución de cargas eléctricas. Su presencia introduce en el espacio una nueva propiedad: cuando en un punto cualquiera de él, P(x, y, z), se coloca una pequeña carga eléctrica q', ésta experimenta la acción de una fuerza $\vec{F}$ (x, y, z, q') que depende de su posición y es proporcional a dicha carga q': es la fuerza electrostática de Coulomb ejercida por el sistema de cargas sobre la carga testigo q'.

También en este caso se define la **intensidad del campo de fuerzas eléctrico** (que llamaremos, por abreviar, **campo eléctrico**) como *la fuerza eléctrica por unidad de carga testigo*:

$$\vec{E}(x, y, z) \equiv \frac{1}{q'}\vec{F}(x, y, z, q') \qquad \text{o bien, abreviadamente} \qquad \boxed{\vec{F} = q'\,\vec{E}} \qquad (2)$$

♣ Antes $\vec{g}$ y ahora $\vec{E}$, sólo dependen de los puntos P(x, y, z) del espacio, para sistemas determinados de masas o de cargas, respectivamente. Son independientes de m' o de q', por lo que miden en cada punto del espacio la correspondiente propiedad física introducida por los sistemas de masas o cargas, respectivamente.

♣ En lugar de describir directamente las interacciones entre masas y cargas eléctricas como acciones a distancia, el concepto de campo permite expresar la situación física así:

Para cada interacción, suponemos que una partícula produce a su alrededor su propio campo, el cual actúa luego sobre cualquiera otra partícula, dando lugar a la interacción campo-partícula.

♣ En los ejemplos anteriores, $\vec{g}$ y $\vec{E}$ son los campos creados por los sistemas de masas y cargas eléctricas, respectivamente. Conocidos, supone saber el comportamiento del espacio en cada uno de sus puntos sobre las partículas susceptibles de experimentar la interacción correspondiente. Por ello, se puede prescindir de los sistemas que originaron dichos campos: el concepto de campo sustituye al de acciones a distancia.

13.- POTENCIAL

En el nº 7 señalamos que si el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z)$ que actúa sobre la partícula es **conservativo**, entonces la partícula posee una energía potencial, $E_p(x, y, z)$. La relación que liga la fuerza y la energía potencial es:

$$E_p(x, y, z) = -\int \vec{F}(x,y,z).d\vec{r} + C \qquad (3)$$

O bien, en términos elementales, $\boxed{dE_p = -\vec{F}\,.\,d\vec{r}}$ (4)

Esta expresión significa que la variación elemental del campo escalar E_p es igual y de signo contrario al trabajo elemental desarrollado por el campo $\vec{F}$, al actuar sobre la partícula en un desplazamiento $d\vec{r}$ de ésta.

Ambos campos, $\vec{F}$ y E_p, además de ser funciones de posición, son proporcionales a la magnitud física que caracteriza la partícula (su masa gravitatoria m', o su carga eléctrica q'):

$$\vec{F}(x, y, z, m') \text{ y } E_p(x, y, z, m') \qquad \text{o} \qquad \vec{F}(x, y, z, q') \text{ y } E_p(x, y, z, q')$$

Como se ha dicho en el nº anterior, dividiendo la fuerza $\vec{F}$ por dicha característica, m' o q', se definen las intensidades de campo gravitatorio $\vec{g}$ y eléctrico $\vec{E}$, respectivamente. Estos campos vectoriales son también conservativos, pero sólo funciones de posición.

De modo análogo, ahora <u>definimos</u> el campo escalar que llamamos **potencial**, V(x, y, z), dividiendo el campo energía potencial E_p por la magnitud física que caracteriza la partícula (su masa gravitatoria m', o su carga eléctrica q'). Se tiene pues:

+ Potencial gravitatorio:

$V(x, y, z) \equiv \dfrac{1}{m'} E_p(x, y, z, m')$ o bien, abreviadamente $\boxed{E_p = m'\,V}$ (5)

+ Potencial eléctrico:

$V(x, y, z) \equiv \dfrac{1}{q'} E_p(x, y, z, q')$ o bien, abreviadamente $\boxed{E_p = q'\,V}$ (6)

Estos potenciales son también funciones únicamente de posición. Sus relaciones con las intensidades de campo, ya sea gravitatorio $\vec{g}$ ya sea eléctrico $\vec{E}$, vienen dadas obviamente por:

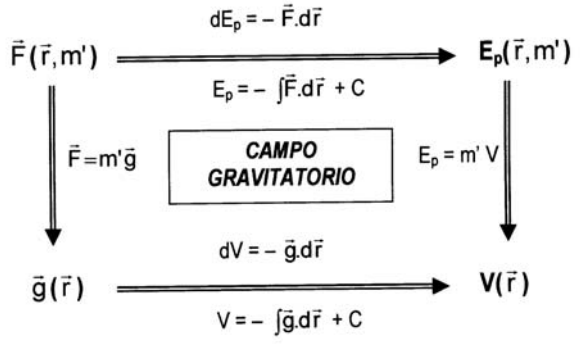
+ para el campo gravitatorio: $V(x, y, z) = -\int \vec{g}(x,y,z).d\vec{r} + C$ $\boxed{dV = -\vec{g}\,.\,d\vec{r}}$ (7)

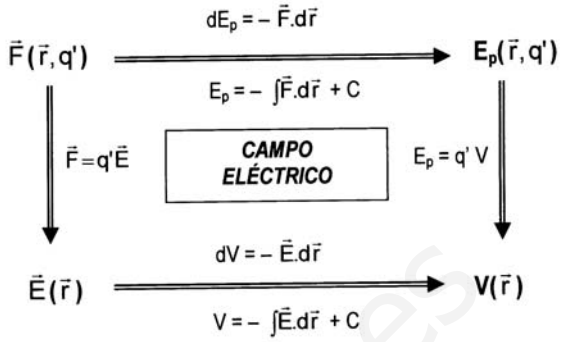
+ para el campo eléctrico: $V(x, y, z) = -\int \vec{E}(x,y,z).d\vec{r} + C$ $\boxed{dV = -\vec{E}\,.\,d\vec{r}}$ (8)

Las expresiones recuadradas (7) y (8) significan que la variación elemental del potencial V es igual y de signo contrario al trabajo elemental desarrollado por el campo asociado, ya sea gravitatorio $\vec{g}$ ya sea eléctrico $\vec{E}$, al actuar sobre la <u>unidad de masa</u> o la <u>unidad positiva de carga eléctrica</u>, respectivamente, en un desplazamiento $d\vec{r}$ de ésta.

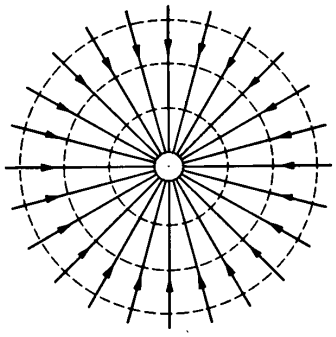
www.yoquieroaprobar.es

Así pues, una distribución de masas [o de cargas eléctricas] originan en el espacio un campo gravitatorio $\vec{g}(x, y, z)$ [o eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$] y conjuntamente un potencial gravitatorio [o potencial eléctrico] V(x, y, z), relacionados entre sí por las expresiones (7) [u (8)].

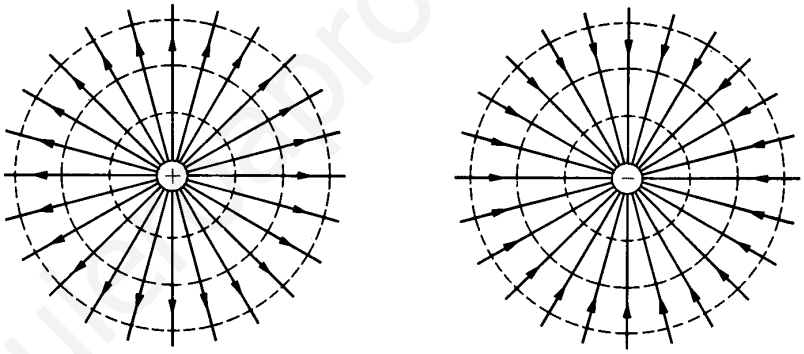




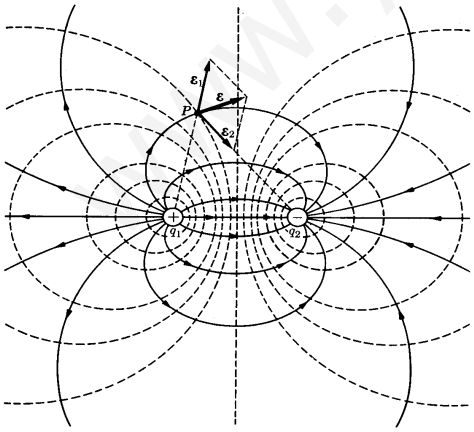
Los campos vectoriales $\vec{g}(x, y, z)$ y $\vec{E}(x, y, z)$ se representan mediante las **líneas de campo**. Los campos escalares V(x, y, z), mediante las superficies de nivel que en este caso reciben el nombre de **superficies equipotenciales.** A continuación, las figuras siguientes muestran algunos casos de interés.



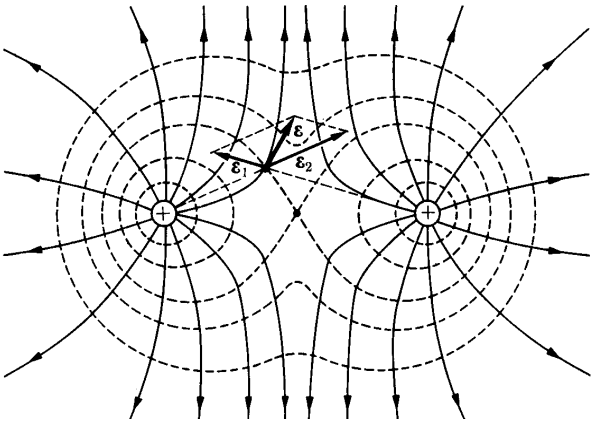
Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo gravitacional de una masa puntual.



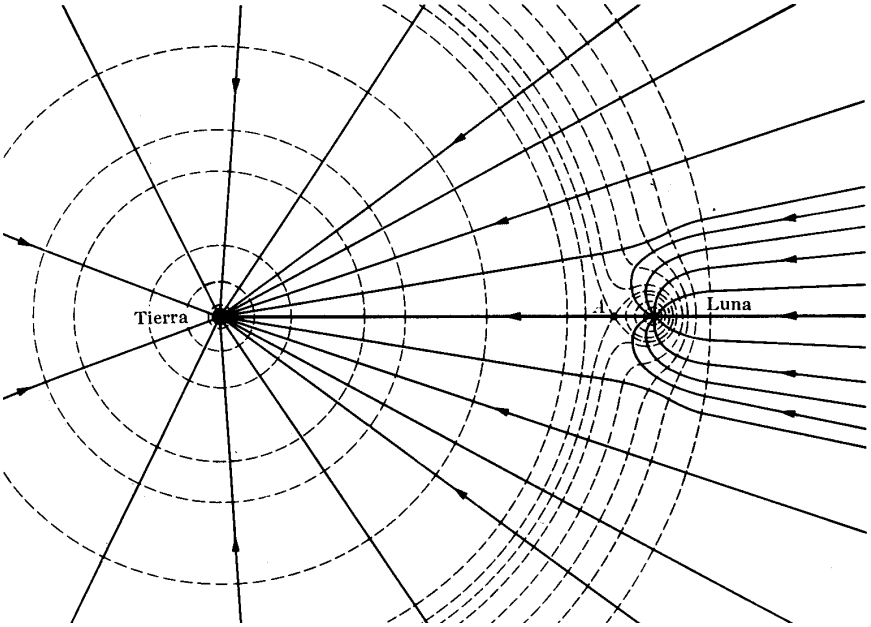
Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de una carga positiva y de una negativa.



Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de dos cargas iguales y de signo opuesto.



Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo eléctrico de dos cargas idénticas positivas.



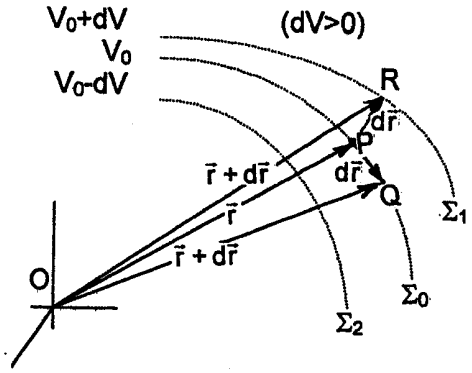
Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo gravitacional resultante, producido por la Tierra y la Luna. En A el campo gravitacional es cero.

Veamos a continuación cómo se sitúan las superficies equipotenciales y las líneas de campo. O de otra forma, en cada punto P(x, y, z) del espacio cómo se posicionan el vector intensidad de campo y la superficie equipotencial correspondiente. Vamos a ver que:

i) en cada punto, la intensidad de campo es perpendicular a la superficie equipotencial.

ii) está dirigido hacia potenciales decrecientes.

En efecto, consideremos la figura adjunta. Tomemos el caso gravitatorio como ejemplo, sabiendo que lo razonado en este caso es totalmente aplicable al caso eléctrico.



Sea P(x, y, z) un punto cuyo potencial es V_0. Se han dibujado la superficie equipotencial correspondiente, Σ_0, y también Σ_1, de potencial $V_0 + dV$, y Σ_2, de potencial $V_0 - dV$. Los potenciales son, pues, crecientes en el sentido $\Sigma_2, \Sigma_0, \Sigma_1$.

A partir del punto P, desplacémonos sobre la superficie equipotencial Σ_0 hasta el punto Q. La diferencia de potencial entre P y Q es $dV = -\vec{g}\,.\,d\vec{r}$ Pero puesto que ambos puntos pertenecen a la misma superficie equipotencial, de valor V_0, entonces $\Rightarrow$ $dV = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{g}\,.\,d\vec{r} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{g} \perp d\vec{r}$, y por tanto ***la intensidad de campo*** $\vec{g}$ ***es perpendicular a la superficie equipotencial*** V_0.

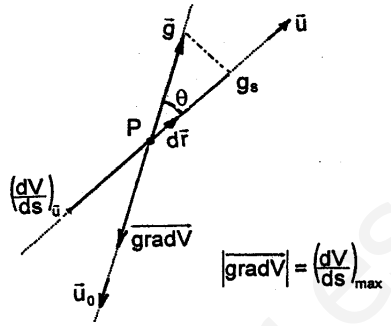
A continuación, desde P, desplacémonos perpendicularmente a su superficie equipotencial V_0, hasta el punto R perteneciente a la superficie $V_0 + dV$ (potencial creciente). Entonces, $dV = -\vec{g}\,.\,d\vec{r} = -g\,.\,ds\,.\cos\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \vec{g}$ tiene sentido contrario a $d\vec{r}$.

$\Rightarrow$ ***la intensidad de campo*** $\vec{g}$ ***está dirigida hacia potenciales decrecientes.***

14.- GRADIENTE DE POTENCIAL

Hemos visto que cuando se conoce la intensidad de campo $\vec{g}(x, y, z)$, se puede calcular, salvo constante, el campo potencial así: $V(x, y, z) = -\int \vec{g}(x,y,z).d\vec{r} + C$.

El problema inverso consiste en calcular la intensidad de campo $\vec{g}(x, y, z)$ conocido el potencial V(x, y, z). Para ello, vamos a definir a partir del potencial un campo vectorial que llamaremos **gradiente**.



Si a partir de un punto P nos desplazamos $d\vec{r}$ en una dirección $\hat{u}$ determinada, el potencial habrá variado:

$dV = -\vec{g}.d\vec{r} = -g.ds.\cos\theta = -g_s.ds$ donde g_s es la proyección de $\vec{g}$ sobre la dirección $\hat{u}$, o sea, la componente de $\vec{g}$ según $\hat{u}$. Podemos escribir:

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{u}} = -g_s \qquad (\&)$$

El cociente $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{u}}$ se denomina **derivada direccional** de V(x, y, z) en la dirección de $\hat{u}$, y representa la variación del potencial por unidad de desplazamiento en la dirección dada por $\hat{u}$. La relación (&) expresa que dicha derivada es igual a la componente g_s del campo $\vec{g}(x, y, z)$, en dicha dirección, cambiada de signo. Para cada dirección $\hat{u}$, la derivada direccional presentará un valor diferente, pero siempre igual y de signo opuesto a la componente del campo $\vec{g}$ en la dirección señalada.

Existe una dirección $\hat{u}_0$ para la que dicha derivada $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\hat{u}_0}$ alcanza su máximo valor. Pero ésta no puede ser otra que aquélla para la que $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{max} = -g$ (%)

Pues bien, en cada punto del espacio se define el **gradiente de potencial**, y se escribe $\overrightarrow{grad\,V}$ o bien $\overrightarrow{\nabla V}$, así:

"Es un vector *(un campo vectorial, por tanto)* ***tal que en cada punto:***

+ está orientado en el sentido para el que la derivada direccional del potencial es máxima.

+ Su módulo es precisamente el valor máximo de dicha derivada direccional.

$$\overrightarrow{gradV} = \left(\frac{dV}{ds}\right)_{max} \hat{u}_0$$

La expresión (%) y la anterior definición conducen a la relación:

$$\boxed{\vec{g} = -\overrightarrow{grad\,V}}$$

"El campo conservativo $\vec{g}(x, y, z)$ ***deriva de un potencial V(x, y, z), de tal modo que es igual a su gradiente cambiado de signo."***

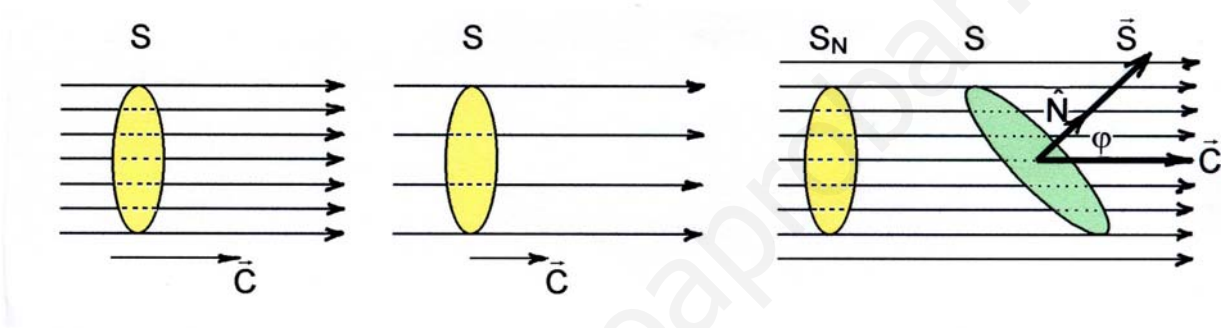
www.yoquieroaprobar.es

15.- FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL.- TEOREMA DE GAUSS

♦ Sea un campo vectorial $\vec{C}$ **uniforme**; es decir, presenta el mismo valor vectorial en todo los puntos. Por consiguiente, las líneas de campo son rectas paralelas, uniformemente espaciadas. El mayor o menor espaciamiento de estas líneas da idea de la intensidad mayor o menor del campo $\vec{C}$, constante. Y sea S una superficie plana, perpendicular al campo.

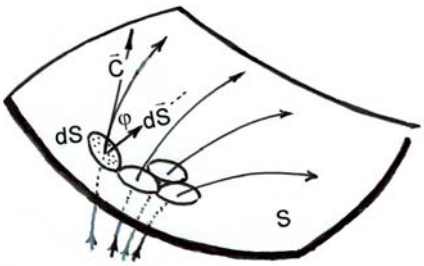
Se llama entonces *" **flujo del campo** $\vec{C}$ **a través de la superficie normal S**"* al producto de la intensidad del campo por el área de la superficie: $\Phi = C\,S$

El flujo del campo vectorial está relacionado con el nº de líneas de campo que atraviesa la superficie. Si el campo es intenso, el nº de líneas que atraviesa S es mayor que si el campo es débil. El flujo es proporcional a dicha intensidad. (Véanse las figuras)



♦ Si la superficie S no es perpendicular, y es φ el ángulo que forman su normal $\vec{N}$ y el campo $\vec{C}$, el flujo es: $\Phi = C\,S_N = C\,S\cos\varphi$ pues $S_N = S\cos\varphi$, y todas las líneas de campo que atraviesan S_N son las que atraviesan S. (Figura). La expresión anterior puede escribirse en forma de producto escalar: $\Phi = \vec{C}.\vec{S}$, donde $\vec{S}$ es un vector de módulo igual al área de S y de dirección perpendicular a dicha superficie, como indica la figura correspondiente.

♦ Para calcular el flujo de un campo vectorial cualquiera $\vec{C}$ a través de una superficie cualquiera S, debemos recurrir a dividir la superficie S en trozos elementales de área dS; calculamos luego el flujo elemental $d\Phi$ a través de cada elemento de superficie; finalmente, sumamos todos los flujos elementales así obtenidos; es decir, hallamos la integral, extendida a toda la superficie S, de los flujos elementales: obtenemos así el *flujo total de* $\vec{C}$ *a través de S*. De acuerdo con ello, deberemos definir previamente:



Fujo elemental *del campo* $\vec{C}$ *a través de la superficie elemental dS* así:

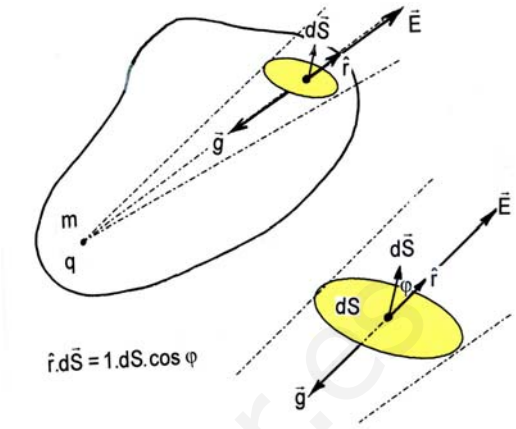
$$\boxed{d\Phi \equiv \vec{C}.d\vec{S}}$$

donde $d\vec{S}$ es el vector perpendicular al elemento de superficie dS, de módulo dS y orientado hacia el exterior si la superficie S es cerrada.

(Si la superficie S es abierta, el sentido de $d\vec{S}$ es más complicado de establecer; de momento, no lo consideramos).

Entonces, *el* ***flujo total*** *de* $\vec{C}$ *a través de S* es:

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{C}.d\vec{S}}$$



♦ Apliquemos estos conceptos al caso particular en el que el campo vectorial $\vec{C}$ es radial y proporcional a $1/r^2$; o sea, de la forma $\vec{C} = \frac{K}{r^2}\hat{r}$. (Tal es el caso de los campos gravitatorio y eléctrico).

Veamos el flujo de este tipo de campos a través de una superficie cerrada S:

$$\Phi = \oiint_S \vec{C}.d\vec{S} = K \oiint_S \frac{\hat{r}.d\vec{S}}{r^2} = K \oiint_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS$$

ya que, como se señala en la última figura: $\hat{r}.d\vec{S} = 1 \,.\, dS \,.\, \cos\varphi$

y por tanto $$\frac{\hat{r}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS$$

<u>Se puede demostrar</u> que la integral $\oiint_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS$ no depende de la forma de la superficie cerrada S. Sólo depende de la posición interior o exterior de la fuente creadora del campo (en el caso del campo gravitatorio, de la posición de la masa m; en el caso del campo eléctrico, de la posición de la carga q). Esta integral vale:

+ 0, si la fuente del campo es exterior a S.
+ 4π, si la fuente del campo es interior a S.

Por lo tanto,

el flujo de $\vec{C}$ a través de S es: $$\Phi = \oiint_S \vec{C}.d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{(fuentes de campo exteriores a S)} \\ 4\pi K & \text{(fuentes de campo interiores a S)} \end{cases}$$

A esta expresión se le denomina ***<u>"Ley de Gauss"</u>***. Su verdadero sentido se comprenderá mejor cuando sea aplicada a campos concretos: gravitatorio y eléctrico.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un coche, de 900 kg de masa, circula con una velocidad de 72 km/h. En un instante dado, el conductor aplica los frenos, y se detiene en 12 s. Calcula la fuerza de frenado, supuesta constante.

Puede considerarse el movimiento como unidireccional; tomamos el eje X como trayectoria. La velocidad inicial es v_i = 72 km/h = 20 m/s.

El coche, bajo la acción de la fuerza de frenado, experimenta una variación de su momento lineal dada por

$$\Delta p = m\,\Delta v = m\,(v_f - v_i) = 900\,(0 - 20) = -\,18000 \text{ kg m/s}$$

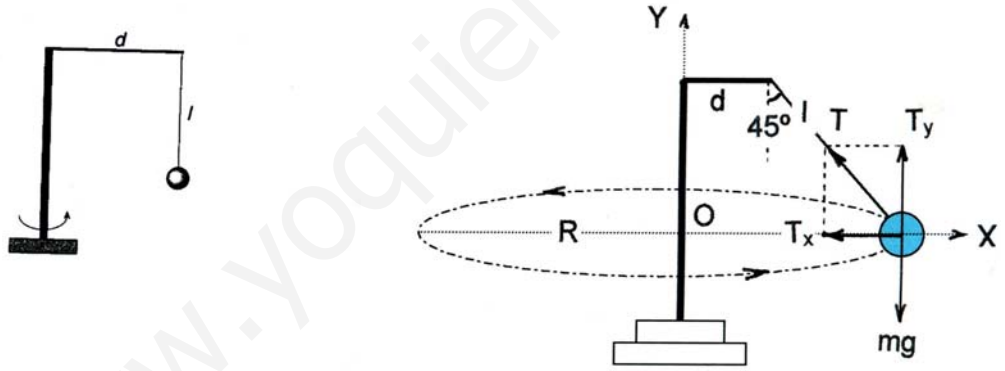
El teorema del momento lineal indica que el impulso mecánico de la fuerza de frenado es igual a esta variación del momento lineal del coche,

$$F\,\Delta t = \Delta p = -\,18000 \text{ N.s.} \qquad \text{Por tanto:} \qquad F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-18000}{12} = \boldsymbol{-1500\ N}$$

Esta fuerza está dirigida en dirección y sentido contrario al movimiento.

2.- El aparato de la figura consta de un soporte y un brazo horizontal. Del brazo horizontal, y a 10 cm del eje, pende un cuerpo de 200 g de masa mediante una cuerda de 20 cm de longitud. El conjunto puede girar en torno al eje vertical. Calcula la frecuencia con la que debe girar el conjunto para que la cuerda forme un ángulo de 45º con la vertical.

Es importante resolver el problema sirviéndose de una figura.



En ella se sitúa el referencial OXY, la fuerzas que actúan sobre el cuerpo (el peso mg y la tensión de la cuerda T; ésta se descompone según los ejes en T_x = T sen 45º y T_y = T cos 45º), y finalmente se establecen las ecuaciones del movimiento:

Eje Y: $\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y = mg$ o sea $T \cos 45º = mg$

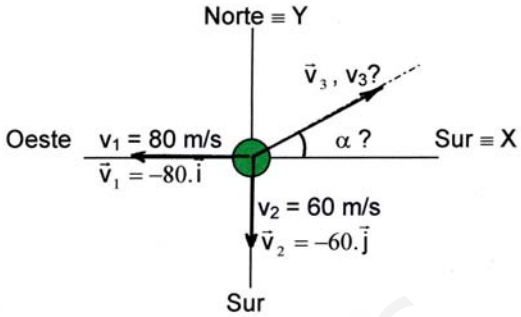
Eje X: $\sum F_x = ma \quad \Rightarrow \quad T_x = ma_n$ o sea $T \operatorname{sen} 45º = m\dfrac{v^2}{R} = mR\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{T \operatorname{sen} 45º}{mR}}$

Por un lado, R = d + l sen 45º; por otro, T cos 45º = mg = T sen 45º . Por tanto, la velocidad angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{g}{d + l.\operatorname{sen}45º}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1 + 0.2x\operatorname{sen}45º}} = 6'371 \text{ rd/s}$$

Y la frecuencia $\qquad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \boldsymbol{1'014\ Hz}$

3.- Una granada, inicialmente en reposo, explota en tres fragmentos iguales. Uno sale hacia el oeste, a 80 m/s; otro hacia el sur, a 60 m/s. ¿Cuál es la velocidad y dirección del tercer fragmento?



Las fuerzas de la explosión son internas al sistema "granada", por lo que se conserva su momento lineal: el momento lineal de la granada *antes* de la explosión es igual al momento lineal de la granada *después* de la explosión:

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{desp}$$

donde $\vec{P}_{antes} = 0$ (reposo inicial)

y $\vec{P}_{desp} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$.

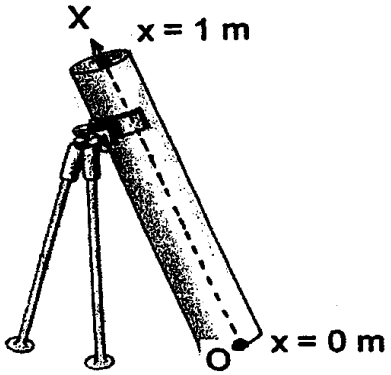
Por tanto:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(-v_1.\vec{i}) - (-v_2.\vec{j}) = v_1.\vec{i} + v_2.\vec{j} = (80.\vec{i} + 60.\vec{j}) \text{ m/s}$$

Por tanto: $v_3 = \sqrt{80^2 + 60^2} =$ ***100 m/s*** y $tg\alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{60}{80} = 0'75 \Rightarrow \alpha = 36.8699 =$ ***36º52'12''***

4.- El tubo de cartón que lanza los voladores, repletos de caramelos, en las fiestas de los pueblos, tiene una longitud de 1 m. Si la masa de los paquetes es de 100 g y la fuerza que se aplica a lo largo del tubo es de F = 2(2 – x) N, calcula la velocidad del volador al salir del tubo.

La fuerza que realiza el trabajo no es constante sino que varía a lo largo del tubo (eje X), teniendo valor sólo dentro de él. Por ejemplo, en el instante del disparo, x = 0 m, F(0) = 4 N; y a la salida, para x = 1m, F = 2 N.



Trabajo desde A(x = 0 m) hasta B(x = 1 m):

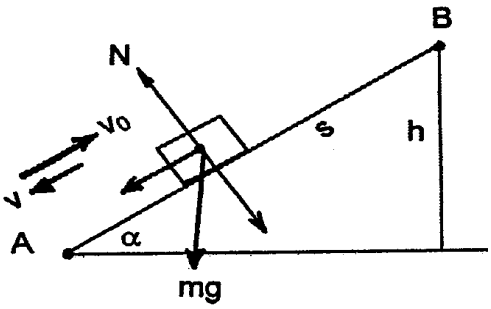
$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 2(2-x).dx = 2\left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 3 \text{ J}$$

El teorema de la energía cinética implica:

$$W_{AB} = \Delta E_c$$

$$\Rightarrow \quad W_{AB} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W_{AB}}{m}} = \sqrt{\frac{2x3}{0.1}} = \textbf{\textit{7'75 m/s}}$$

5.- Un bloque de 20 kg de masa comienza a ascender por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 12 m/s. Al regresar el bloque, pasa por el punto de partida con una velocidad de 6 m/s. Calcula el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano inclinado. (Método de energías).



* El cuerpo asciende desde A hasta B, una altura h, recorriendo sobre el plano inclinado una distancia s; h = s.sen α. La única fuerza no conservativa que actúa es la del rozamiento, $f_r = -\mu N = -\mu.mg.\cos\alpha$.

El teorema de la energía mecánica expresa que el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica:

$$W'_{AB} = \Delta E_m$$

$$W'_{AB} = W_{roz} = -F_r.s = -\mu mg.\cos\varphi.s$$

$$\Delta E_m = (E_c(B) + E_p(B)) - (E_c(A) + E_p(A)) = 0 + mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = mgs.sen\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Igualando y despejando s: $$s = \frac{v_0^2}{2g(sen\alpha + \mu.\cos\alpha)} \qquad (@)$$

* En el descenso, desde B hasta A, el cómputo de energías se realiza de modo análogo:

$$W'_{BA} = \Delta E_m$$

$$W'_{BA} = W_{roz} = -F_r.s = -\mu mg.\cos\varphi.s$$

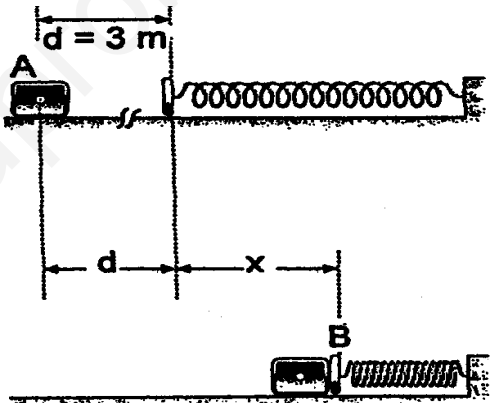
$$\Delta E_m = (E_c(A) + E_p(A)) - (E_c(B) + E_p(B)) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 - 0 - mgh = \frac{1}{2}mv^2 - mgs.sen\alpha$$

Igualando y despejando s: $$s = \frac{v^2}{2g(sen\alpha - \mu.\cos\alpha)} \qquad (\#)$$

Igualando los valores de s dados por (@) y (#), y despejando μ resulta:

$$\mu = \frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2 + v^2}.tg\alpha = \frac{12^2 - 6^2}{12^2 + 6^2}.tg30^o = 0.346 \cong \mathbf{0.35}$$

6.- En una superficie horizontal se prepara un resorte, también horizontal, cuya constante elástica es 80 N/m. Desde un punto que dista 3 m del muelle se lanza un cuerpo de 1,2 kg, con velocidad de 4 m/s, hacia el muelle. Calcula la máxima compresión del resorte, sabiendo que el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el suelo es 0,1.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en su recorrido son:

+ Su peso (fuerza conservativa)

+ La normal ejercida por el suelo; no realiza trabajo, pues es perpendicular al desplazamiento.

+La ejercida por el muelle, que es conservativa.

+ La fuerza de rozamiento con el suelo, que actúa en todo el desplazamiento, y es no conservativa.

Teorema de la energía mecánica: $W_{roz} = \Delta E_m$

$$\Delta E_m = E_{pe}(B) - E_c(A) = ½\ k\ x^2 - ½\ m\ v_A^2 = 40\ x^2 - 9,6$$

$$W_{roz} = -\ \mu.mg.(d + x) = -\ 0,1\ .\ 1,2\ .\ 9,8\ .\ (3 + x) = -\ 3,528 - 1,176\ x$$

Igualando, $40\ x^2 - 9,6 = -\ 3,528 - 1,176\ x$ $\quad 40\ x^2 + 1,176\ x - 6,072 = 0$ $\quad$ ***x = 0,375 metros***

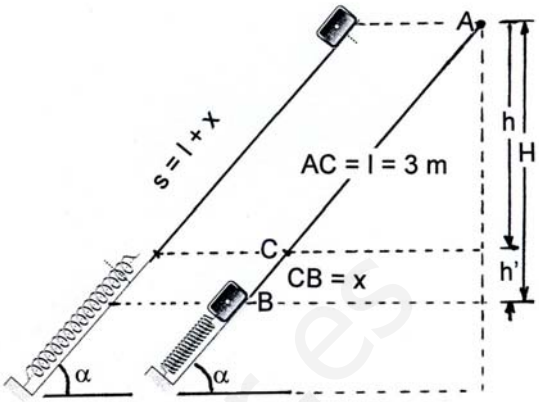
7.- Un cuerpo de 0.5 kg de masa parte del reposo y resbala por un plano inclinado, de ángulo 30º, una distancia de 3 m, chocando a continuación con un resorte, cuya constante elástica es K = 400 N/m (figura). Calcula la deformación del resorte.

Si no hay pérdidas de energía mecánica debidas al rozamiento o al choque con el muelle, la energía potencial gravitatoria en lo alto del plano inclinado (punto A) se transforma íntegramente en energía potencial elástica cuando el cuerpo llega a su punto más bajo (punto B), que coincide con la posición en la que el resorte está totalmente deformado; precisamente en esta posición toma -

www.yoquieroaprobar.es

mos el nivel cero de energía potencial gravitatoria: la caída total del cuerpo es entonces (ver la figura):

$$H = h + h' = l.\text{sen}\alpha + x.\text{sen}\alpha = (l + x)\ \text{sen}\alpha$$



Aplicamos el teorema de la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{pg}(A) = E_{pe}(B)$$

$$\Rightarrow \quad mgH = \frac{1}{2}Kx^2 \quad \rightarrow \quad mg(l + x)\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\rightarrow \quad 0{,}5\ .\ 9{,}8\ (3 + x)\ \text{sen}\ 30^\circ = ½\ .\ 400\ .\ x^2$$

$$\rightarrow \quad 400\ x^2 - 4{,}9\ x - 14{,}7 = 0$$

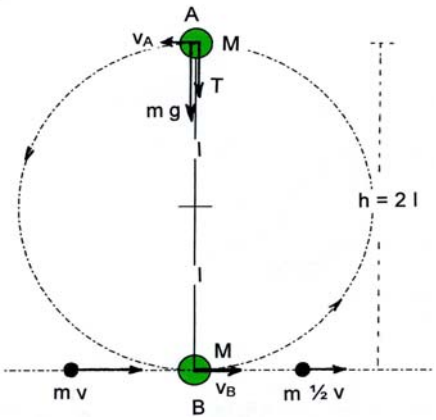
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{x = 0{,}20\ m}$$

8.- Una bala de masa m y velocidad v pasa a través de la esfera de un péndulo, de masa M y longitud l, saliendo con velocidad mitad, v/2. ¿Cuál es el menor valor de v para el cual el péndulo completa una circunferencia?

Para que la esfera del péndulo dé una vuelta completa es necesario que llegue al punto más alto A con una velocidad v_A de forma que la cuerda permanezca tensada. Este valor de v_A lo obtenemos aplicando la 2ª ley de Newton en ese punto A:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \qquad \vec{T} + M.\vec{g} = M.\vec{a}_n \qquad T + Mg = M\ \frac{v_A^2}{l}$$

$$\Rightarrow \qquad v_A = \sqrt{\frac{T.l}{M} + g.l}$$



El mínimo valor de v_A se obtiene cuando la tensión es cero. Entonces:

$$v_A = \sqrt{gl}$$

En el choque entre la bala y la esfera del péndulo (posición B) se conserva el momento lineal del conjunto. Se aplicará así:

$$m\ v = m\frac{v}{2} + M\ v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{m}{2M}v$$

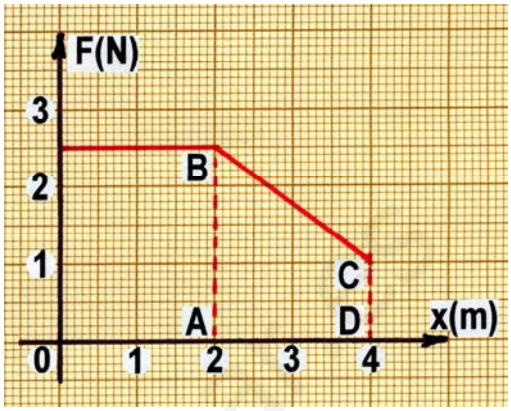
Tras el choque, la esfera del péndulo se eleva desde B hasta A; no hay fuerzas no conservativas, por lo que se conserva la energía mecánica: energía cinética en B = energía potencias gravitatoria en A + energía cinética en A:

$$\frac{1}{2}M\ v_B^2 = M\ g\ 2l + \frac{1}{2}Mv_A^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 - v_A^2 = 4gl$$

Y teniendo en cuenta los valores de $v_A = \sqrt{gl}$ y de $v_B = \frac{m}{2M}v$ resulta en definitiva:

$$\boldsymbol{v = 2\frac{M}{m}\sqrt{5gl}}$$

8.- Una partícula de 20 g de masa, que inicialmente se encuentra en reposo, se mueve según la horizontal recorriendo una distancia de 4 m bajo la acción de una fuerza que tiene un valor constante de 2.5 N en los dos primeros metros y que luego decrece según la gráfica, hasta alcanzar al final el valor de 1.0 N. Calcula:
a) el trabajo desarrollado en los dos primeros metros, y el trabajo total al término del recorrido.
b) cuál es la velocidad al final del recorrido.



Valor de la fuerza, en el S.I.:
En el intervalo $0 \le x \le 2$, F(x) = 2,5
En el intervalo $2 \le x \le 4$, F(x) = m x + b, función lineal; calculemos las constantes m y b:
. x = 2 m F(2) = 2,5 N $\rightarrow$ 2 m + b = 2,5
. x = 4 m F(4) = 1 N $\rightarrow$ 4 m + b = 1
La resolución de este sistema da m = ¾ y b = 4 por tanto en el intervalo $2 \le x \le 4$ es F(x) = 4 – ¾ x

Trabajo realizado por la fuerza:
. en el intervalo (0, 2): $W_{02} = F.\Delta x = 2{,}5 \,.\, 2 = 5$ J
. en el intervalo (2, 4): W_{24} = Área del trapecio ABCD = $\frac{F(2)+F(4)}{2}\Delta x = \frac{2.5+1}{2}.2 = 3{,}5$ J
. total: $W_{04} = W_{02} + W_{24} = 5 + 3{,}5 = 8{,}5$ J

A este mismo resultado se llega así:

$$W_{04} = W_{02} + W_{24} = \int_0^2 F.dx + \int_2^4 F.dx = 2{,}5\int_0^2 dx + \int_2^4 (4 - \frac{3}{4}x).dx = 2{,}5[x]_0^2 + \left[4x - \frac{3}{8}x^2\right]_2^4 = 5 + (10 - 6{,}5)$$

W_{04} = 8'5 J

Velocidad final. Teorema de la energía cinética: $W_{04} = \Delta E_c$

$$W_{04} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W_{04}}{m}} = \sqrt{\frac{2x8{,}5}{0{,}02}} = \textbf{\textit{29'15 m/s}}$$

www.yoquieroaprobar

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- El vector de posición de una partícula de 2 kg de masa es: $\vec{r} = t^3\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t\hat{k}$. Calcular:

a) la energía cinética en el instante t = 1 s.
b) el impulso mecánico de la fuerza resultante en el intervalo desde t_1 = 1 s a t_2 = 3 s.
c) el momento angular de la partícula respecto del origen en el instante t = 1 s.
d) la fuerza que actúa sobre ella y su momento, en ese mismo instante.
e) Comprobar la verificación del teorema del momento lineal: $\vec{I} = \Delta\vec{p}$.

R.: $E_c = 49$ J $\vec{I} = 24\,(2\hat{i} + \hat{j})$ $\vec{L} = -12\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$ $\vec{F} = 12\,(\hat{i} + \hat{j})$ $\vec{M} = 24\,(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

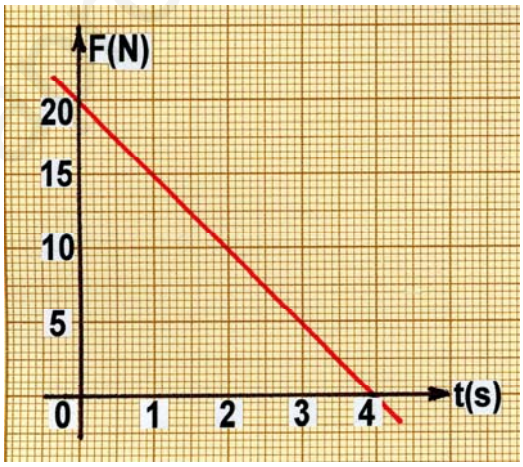
2.- Un cuerpo recorre una circunferencia de 3 m de radio. Parte del reposo, y al cabo de 2 s ha dado media vuelta, con movimiento uniformemente acelerado. Determinar en dicho instante la velocidad lineal, la aceleración y el ángulo δ que forma ésta con la normal. Si su masa es 2 kg, determinar el momento angular y el momento de la fuerza en el instante t = 2 s.

R.: $v = 3\pi$ m/s = 9'42 m/s $a = 30$ m/s^2 δ = 9'0431º = 9º 2' 35''
$\vec{L} = 18\pi\hat{k}$ kg. m^2. s^{-1}= 56'55$\hat{k}$ kg. m^2. s^{-1} $\vec{M} = 9\pi\hat{k}$ N.m = 28'3 $\hat{k}$ N.m

3.- Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve en línea recta con momento lineal $p = 4t - t^2$. Determinar:

a) la fuerza, la aceleración y la velocidad en el instante t = 5 s.
b) ¿En qué instante el cuerpo retrocede?

R.: ***a)*** $F = -6$ N $a = -3$ m/s^2 $v = -2'5$ m/s
b) $t = 4$ s



4.- La gráfica de la figura expresa la fuerza a la que se encuentra sometido un cuerpo con movimiento unidireccional. Si la masa del cuerpo es de 5 kg, e inicialmente tiene una velocidad de 2 m/s en el sentido positivo, determinar en el instante t = 6 s la aceleración del móvil y su velocidad.

R.: $a = -2$ m/s^2 $v = 8$ m/s

5.- Un cuerpo de 2 kg de masa está suspendido de un hilo del techo de un vagón de tren que marcha por una vía recta. Cuando la velocidad del tren es constante, la masa pende verticalmente; pero cuando el tren acelera, el hilo se inclina 10º respecto de la vertical. Calcular en ese momento cuál es la tensión del hilo y la aceleración del tren.

R.: $a = 1'728$ m/s^2 $T = 19'902$ N

6.- Un cuerpo de 2 kg de masa gira en el plano vertical, sujeto por un hilo de 2 m de longitud. Si suponemos que su velocidad angular es igual a 5 rd/s, determinar la tensión del hilo en la posición más alta y en la más baja. ¿Cuál será la velocidad angular mínima para poder dar una vuelta? ¿Y cuál la velocidad máxima posible si el hilo sólo puede soportar tensiones por debajo de 800 N?

R.: ***Arriba, T = 80'4 N Abajo, T = 119'6 N*** $\omega_{min} = 2'21$ rd/s $\omega_{Max} = 13'97$ rd/s

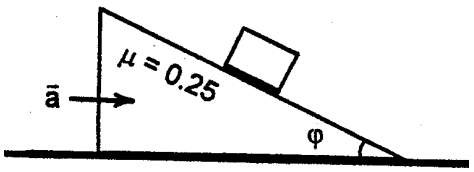
7.- Se lanza un bloque de masa m por un plano inclinado desde su punto más alto, con una velocidad inicial de 1 m/s; el bloque llega a su posición más baja con velocidad 0'7 m/s. El plano inclinado tiene 3 m de altura por 4 m de horizontal. Determinar el coeficiente de rozamiento bloque-plano inclinado, μ. ***R.:*** $\mu = 0'76$

8.- En la fotografía de la derecha, Enara tira de la piedra mediante una cuerda, arrastrándola hacia adelante. La cuerda forma un ángulo de 36'87º con la horizontal. La piedra pesa 50 kg y Enara tira con una fuerza de 200 N. El coeficiente de rozamiento piedra-suelo es de 0'3.
a) Hallar la distancia recorrida por la piedra en los tres primeros segundos, partiendo del reposo.
b) ¿Qué fuerza ha de hacer Enara para que el movimiento de la piedra sea con velocidad constante?
c) ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento si la fuerza es de 120 N?

9.- Un cuerpo de 1 kg de masa está sometido a una fuerza horizontal de 20 N. Determinar la aceleración y la velocidad que adquiere tras recorrer 5 m por el plano inclinado, partiendo del reposo. (Coeficiente de rozamiento μ = 0.2 ; ángulo del plano inclinado φ = 30º).
R.: a = 8.723 m/s^2 v = 9.34 m/s

10.- Una pelota de 200 g de masa choca contra el suelo, plano y horizontal, bajo un ángulo de 30º con él en el instante en que lleva una velocidad de 40 m/s. En el rebote se conserva el módulo de la velocidad, saliendo rebotada formando un ángulo de 30º con el suelo. Si el tiempo de impacto es de 5 ms, determinar la fuerza media que ejerce el suelo sobre la pelota. ***R.: F_m = 1600 N dirigida hacia arriba.***

11.- ¿Cuál debe ser la aceleración mínima a que debemos someter el plano inclinado de la figura para que el cuerpo no deslice hacia abajo por él? ¿Cuál debe ser la aceleración máxima para que no deslice hacia arriba? (ángulo del plano inclinado, φ = 30º; coeficiente de rozamiento, μ = 0.25)



R.: a_{min} = 2.80 m/s^2 a_{max} = 9.48 m/s^2
a < 2,80 m/s^2 ⇒ desliza hacia abajo
2,80 m/s^2 < a < 5,66 ms^2 ⇒ no desliza (fuerza de rozamiento hacia arriba)
5,66 m/s^2 < a < 9,48 ms^2 ⇒ no desliza (fuerza de rozamiento hacia abajo)
a > 9,48 m/s^2 ⇒ desliza hacia arriba

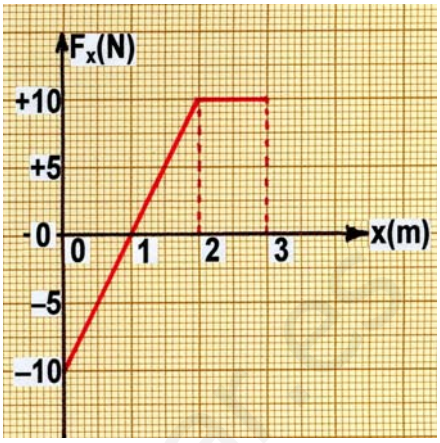
12.- Un cuerpo de 1 kg gira en un plano horizontal, suspendido de un hilo de 2 m de longitud. Si la velocidad angular es de 24 rpm, determinar la tensión del hilo y el ángulo que forma con la vertical. ***R.: T = 12.63 N. θ = 39.128º = 39º 7' 40''***

13.- Un vehículo rueda sobre una superficie horizontal describiendo una curva. Si el coeficiente de rozamiento cuerpo-superficie es μ = 0.5 y el vehículo va a 36 km/h, cuál debe ser el radio mínimo de la curva para que no derrape? ***R.: r ≥ 20.41 m***

14.- Cuál debe ser la velocidad angular mínima de un cilindro de 2 m de radio, girando según su eje situado verticalmente, para que un cuerpo en contacto con la pared interior del cilindro no deslice hacia abajo, siendo μ = 0,2. ***R.: ω_0 = 4.95 rdn/s, o sea 47.27 rpm***

15.- Un cuerpo cuya masa es 2 kg se mueve en una recta sometido a una fuerza cuya componente según la recta es $F_x = - x^2/2$. Si en x = 0 tiene una velocidad hacia la derecha de 3 $m.s^{-1}$, calcular la velocidad en x = 2 m. ***R.: 2.77 m/s***

16.- Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve en una recta sometido a una fuerza cuya componente según la recta es la indicada en la gráfica. Si en x = 0 tiene una velocidad hacia la derecha de 4 m/s, determinar la velocidad en x = 3 m.
R.: 5,10 m/s

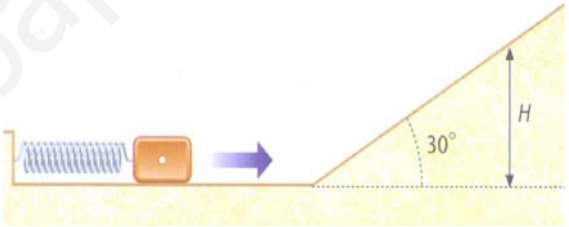


17.- Partiendo de una velocidad de 4 m/s arrastramos un cuerpo de 2 kg de masa sobre una superficie horizontal; el coeficiente de rozamiento 0.2.
Si al recorrer una distancia de 10 m la velocidad pasa a ser de 5 m/s, determinar el trabajo que hemos realizado. ***R.: 48,2 julios***

18.- Determinar cuánto ha de valer el coeficiente de rozamiento μ de una superficie para que un cuerpo, partiendo de un plano inclinado de ángulo φ = arc cos(3/5) que se prolonga en un plano horizontal, recorra la misma distancia en ambos planos. ***R.: μ = 0,5***

19.- Un cuerpo de 2'5 kg se deja caer desde una altura de 90 cm sobre un muelle vertical de constate elástica k = 2290 $N.m^{-1}$. Calcular la máxima compresión del muelle. ***R.: 15 cm***

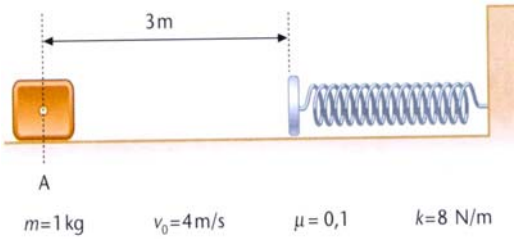
20.- El cuerpo de la figura, de 2 kg de masa, comprime 30 cm el resorte de constante k = 1000 $N.m^{-1}$. Se suelta dicho cuerpo y sale disparado hacia la derecha.



a) ¿Qué recorrido realizará en el plano inclinado, si no se tiene en consideración el rozamiento. ***R.: 4,59 m***
b) Ídem, si el coeficiente de rozamiento en todo el recorrido vale 0,2. La longitud del plano horizontal, cuando el resorte no está comprimido, es de 3 m. ***R.: 2,43 m***

21.- Una masa de 4 kg está sobre una superficie horizontal en contacto con un muelle de constante k = 1000 $N.m^{-1}$, inicialmente comprimido 1 m, Se suelta el muelle, y la masa recorre 12 m por dicha superficie, a partir de los cuales inicia una ascensión por un plano inclinado 30º sobre la horizontal, de modo que cuando su altura es de 0.5 m su velocidad es de 10 m/s. Determinar el coeficiente de rozamiento a lo largo de todo el recorrido. Tomar g = 10 m/s^2.
R.: μ = 0.54

22.- Desde el punto A, a 3 m de un muelle de k = 8 $N.m^{-1}$, se dispara un cuerpo de 1 kg a 4 $m.s^{-1}$, hacia el resorte. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y el suelo es 0.1. Calcular, tomando g = 10 $m.s^{-2}$
a) la máxima compresión del muelle
b) la distancia de A a la que se detendrá el cuerpo en su movimiento.
R.: a) 1 m. b) 0 m.



23.- Un cuerpo de pequeñas dimensiones se encuentra en el punto más elevado de una esfera de 20 cm de radio. Se le deja resbalar según un meridiano, sin rozamiento. ¿Bajo qué ángulo abandona la esfera? ¿Qué velocidad lleva entonces el cuerpo? ¿Con qué velocidad llega al plano horizontal sobre el que se encuentra la esfera?

R.: α ***= 48'1897º v = 1'14 m/s v = 2'80 m/s***

www.yoquieroaprobar.es

FÍSICA

2º Bachillerato
. Ciencias de la Naturaleza
. Tecnología

UNIDAD II :

Vibraciones y Ondas

TEMA 4.-
Oscilador Armónico

TEMA 5.-
Fenómenos ondulatorios

TEMA 6.-
Sonido

Valentín Laconcha Abecia, S.M.
Doctor en C. Físicas

T E M A 4.-

OSCILADOR ARMÓNICO

SUMARIO:

4.1.- Fenómenos periódicos
4.2.- Cinemática del movimiento vibratorio
4.3.- Dinámica del movimiento vibratorio:
a) Resorte elástico
b) Péndulo simple

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

1.- FENÓMENOS PERIÓDICOS

Hay multitud de fenómenos naturales en los que las medidas de las magnitudes empleadas para describirlos repiten su secuencia de valores en intervalos iguales de tiempo mientras transcurre éste. Se los llama *fenómenos periódicos*, y si están relacionados con cuerpos en movimiento, se les denomina *movimientos periódicos*.

La Luna describe un movimiento periódico alrededor de la Tierra. Asimismo la Tierra describe sobre sí misma y alrededor del Sol movimientos periódicos.

También son movimientos periódicos el que describe un cuerpo suspendido del extremo de un muelle vertical, los de los extremos de las ramas de un diapasón, o el de la esfera del péndulo de algunos relojes.

La transmisión de señales de radio y televisión tiene lugar por variaciones periódicas de magnitudes electromagnéticas.

Finalmente, los átomos de las moléculas de las sustancias vibran periódicamente en torno a posiciones relativamente fijas.

Existen en la naturaleza muchos fenómenos periódicos que podamos observar o producir. Vamos a prestar especial interés, sin embargo, al ***movimiento periódico*** descrito por algunos cuerpos:

> ***Un cuerpo describe un movimiento periódico cuando, recorriendo una trayectoria cerrada, pasa en intervalos iguales de tiempo por cualquiera de sus puntos con la misma velocidad.***

Al menor de esos intervalos de tiempo se le denomina ***periodo*** del movimiento. Se acostumbra a llamarlo T y se expresa en *segundos (s)*. Representa el tiempo que tarda el móvil en recorrer una vez la trayectoria cerrada.

A la inversa del periodo se la denomina ***frecuencia*** del movimiento. La denotaremos con la letra f (en Física Moderna se acostumbra a denominarla con la letra griega ν). Se expresa en *hercios (Hz)*, o también en *ciclos/segundo*, *vueltas/segundo*, *revoluciones/segundo (rps).* La frecuencia de un movimiento periódico señala, pues, el número de vueltas que el móvil da cada segundo.

Son ejemplos de movimientos periódicos sencillos, pero importantes:
. el MCU estudiado en UI – T 2.6a
. el MAS estudiado en UI – T 2.5c

En ellos, tiene especial interés la magnitud física que se relaciona con el periodo y la frecuencia:
. en el MCU, la velocidad angular ω.
. en el MAS, la pulsación o frecuencia angular ω.

Se expresa en radianes/segundo (rd/s). Recordemos las relaciones: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

2.- CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO

Llamamos movimiento ***vibratorio*** *u* ***oscilatorio*** al de un móvil que se desplaza periódicamente, en trayectoria recta, en torno a un punto de equilibrio.

El movimiento de un péndulo, para oscilaciones de pequeña amplitud, es prácticamente un movimiento oscilatorio. Un cuerpo unido al extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar. Las partículas (átomos, iones, ...) de un sólido, unidas entre sí, vibran en torno a posiciones fijas. Similarmente, los átomos de una molécula vibran unos con respecto a otros. Los electrones de una antena radiante o receptora oscilan rápidamente. Finalmente, una comprensión del movimiento vibratorio es de sumo interés para entender los fenómenos ondulatorios, en su generalidad.

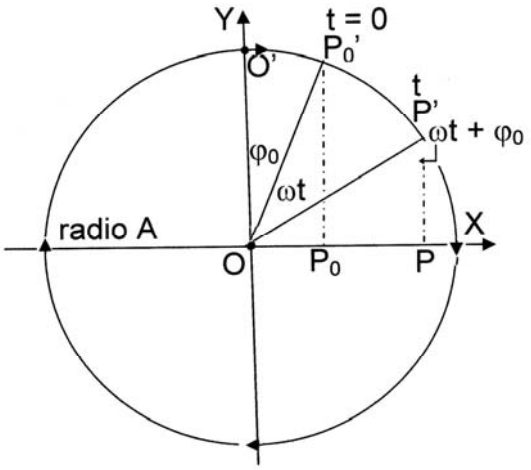
De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el ***movimiento armónico simple*** (MAS), debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza. En este caso, al móvil se le denomina ***oscilador armónico***.

> ***En este punto, deberás volver a la sección UI – T 2.5c, revisando y estudiando nuevamente los conceptos allí expuestos. Después de este repaso, puedes continuar esta exposición. En ella ya sólo queda complementar lo allí explicado.***

A.- El M.A.S. EN RELACIÓN CON EL M.C.U.

El movimiento de un oscilador P, con pulsación ω, puede relacionarse con el de otro punto P' que describe una circunferencia con movimiento circular uniforme, de velocidad angular también ω.

Sea P' el punto móvil sobre una trayectoria circular de radio A, y sea P su proyección sobre el eje X. Sea P_0' su posición en el instante t = 0, y φ_0 la posición angular inicial, tomando O' como origen de ángulos y sentido horario. Su proyección sobre el eje X es P_0.



Supongamos P' dotado de un movimiento circular uniforme, de velocidad angular ω. En un instante t posterior, el punto P' ha descrito un ángulo ωt por lo que su posición angular en dicho instante es $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Su proyección P, sobre el eje X, se señala en la figura. Dado que ang(O'OP') = ang(OP'P), la posición de P viene dada por:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Vemos pues que *el movimiento armónico simple de un oscilador (P) es el de la proyección sobre un diámetro de otro punto (P') que recorre uniformemente una circunferencia, de igual centro y de radio igual a la amplitud del oscilador.*

Véanse las magnitudes comunes y su denominación:

	Circunferencia (MCU): P'	**Eje X (MAS): P**
A	Radio	Amplitud
ω	Velocidad angular	Pulsación o frecuencia angular
φ_0	Posición angular inicial	Fase inicial
$\omega t + \varphi_0$	Posición angular, en el instante t	Fase en el instante t
$x(t) = A.\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$	Componente X de su posición	Elongación

Las consideraciones anteriores sugieren una representación vectorial del MAS (representación vectorial de Fresnel).

Se define el vector rotante (fasor) representativo del MAS, $\vec{A}$, como un vector de módulo A (amplitud) que forma un ángulo $\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ respecto del semieje positivo OY, que gira en sentido horario, con velocidad angular constante ω (pulsación).

En todo instante t:

$$\vec{A} = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\hat{i} + A\cos(\omega t + \varphi_0)\,\hat{j}$$

La componente x(t) de este vector rotante $\vec{A}$ representa en todo instante el valor de la elongación del MAS:

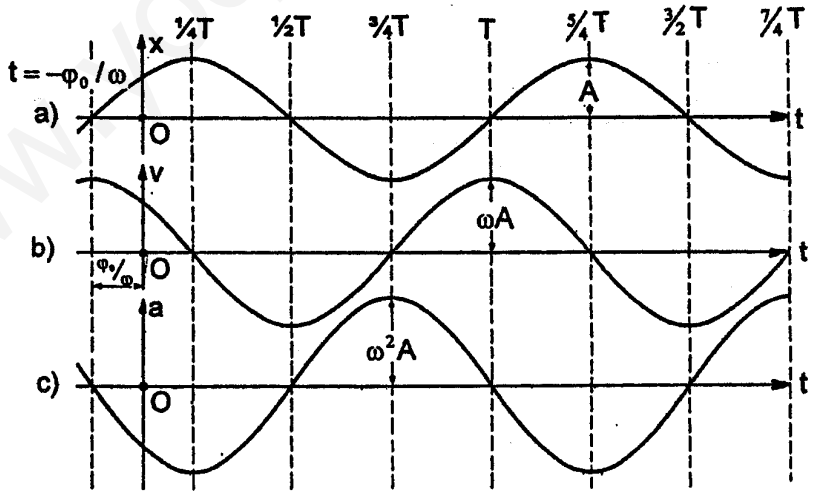
$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

B.- DIAGRAMAS DE LA ELONGACIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Vimos las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración de un oscilador armónico:

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ $\qquad$ $v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$ $\qquad$ $a(t) = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Las gráficas de estas funciones vienen expresadas en las figuras adjuntas:



Se observa cómo:

- las gráficas de x(t) y de v(t) están desfasadas en 90º. Se dice que la elongación y la velocidad están <u>*en cuadratura*</u> (desfase en $\pi/2$ rd).
- las gráficas de x(t) y de a(t) están desfasadas en 180º. Se dice entonces que la elongación y la aceleración del oscilador se encuentran <u>*en oposición de fase*</u> (desfase en π rd)

www.yoquieroaprobar.es

C.- EXPRESIONES DIVERSAS DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL M.A.S.

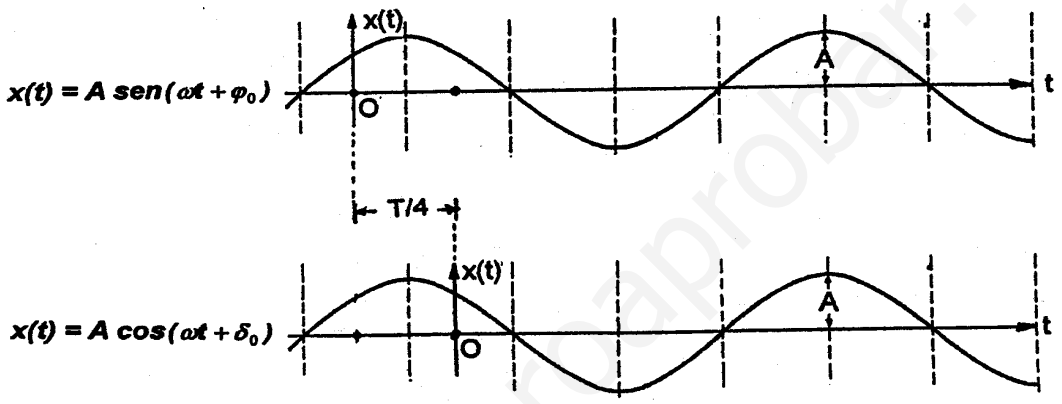
La ecuación de la elongación o posición del oscilador en su trayectoria puede presentar diferentes formas de expresión, equivalentes. (Y lo mismo ocurre con la velocidad y la aceleración). Bueno es conocer su significado.

a) Formas generales $x(t) = A\ sen(\omega t + \varphi_0)$ $x(t) = A\cos(\omega t + \delta_0)$

Ambas formas son equivalentes: difieren en la fase inicial, al adoptar sistemas de referencia desplazados uno respecto del otro en T/4 (desfase, en $\pi/2$). La relación que existe entre las fases iniciales es: $\varphi_0 = \delta_0 + \pi/2$.

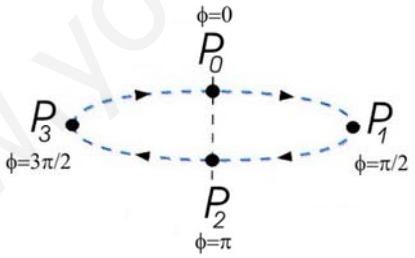
En efecto: $A.sen(\omega t + \varphi_0) = A.sen(\omega t + \delta_0 + \pi/2) =$

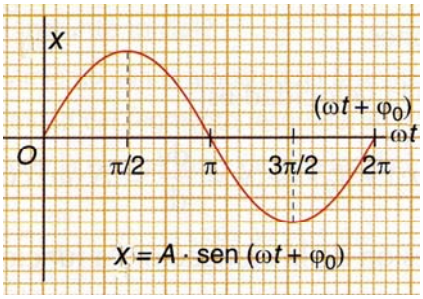
$= A.sen(\omega t + \delta_0).\cos(\pi/2) + A\cos(\omega t + \delta_0).sen(\pi/2) = A\cos(\omega t + \delta_0)$



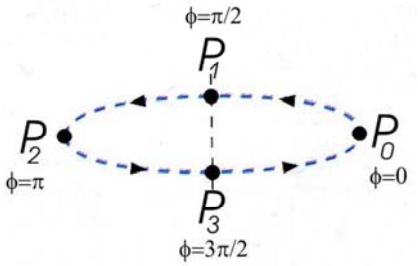
b) Formas particulares

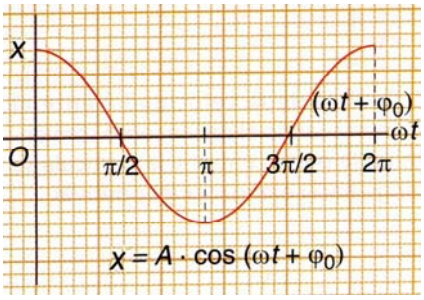
x(t) = A sen ωt Expresa que la fase inicial es nula, $\varphi_0 = 0$. El oscilador se encuentra inicialmente en el origen O, x(0) = 0, y se mueve hacia la derecha, v(0) = ωA





x(t) = A cos ωt En este caso, el oscilador se encuentra inicialmente en el extremo derecho de la trayectoria, x(0) = A, y se mueve hacia la izquierda, v(x=0) = - ωA





3.- DINÁMICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO

¿Qué tipo de fuerza es capaz de producir un movimiento armónico simple? Supongamos que la masa del oscilador es m y que realiza uno de estos movimientos en el que, como hemos visto, la aceleración es $a = -\omega^2 x$. Tal movimiento debe estar realizado, en virtud de la 2ª ley de Newton, bajo la acción de una fuerza externa tal que F = m a. Por lo tanto:

$F = m\,a = -m\,\omega^2 x$ y llamando $k \equiv m\,\omega^2$ resulta $\boxed{F = -k\,x}$

k se denomina <u>*constante recuperadora*</u>. En efecto, una fuerza de este tipo está en todo instante y en toda posición orientada hacia el origen O, <u>*centro de oscilación*</u>; el signo menos indica que tiende siempre a recuperar la posición de equilibrio estable, en O. Vectorialmente: $\vec{F} = -k\,x\,\hat{i}$

Estudiaremos a continuación dos ejemplos especialmente paradigmáticos de este movimiento:

+ el resorte o muelle elástico

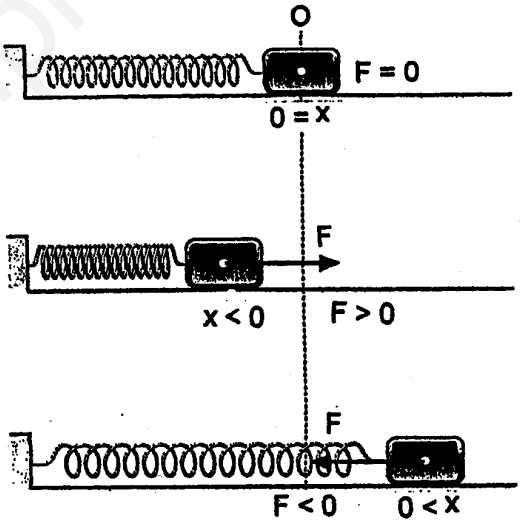
+ el péndulo simple

A.- RESORTE ELÁSTICO

El resorte o muelle de la figura representa un oscilador armónico si su comportamiento viene regido por la Ley de Hooke: ***La fuerza recuperadora de un resorte es directamente proporcional a su deformación.*** La expresión matemática de esta ley es:

$$F = -k\,x$$

donde F es la fuerza que ejerce el resorte sobre el oscilador, x la deformación que experimenta el resorte, y k su <u>*constante elástica*</u>, que es una característica del mismo.



La figura adjunta muestra la relación entre la fuerza ejercida por el muelle y su deformación.

Nótese que F y x son de signo contrario, con independencia del sistema de referencia que se tome.

Bajo la acción de esta única fuerza, el oscilador, de masa m, se mueve con una aceleración $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$ (tomando $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$) que es la que corresponde a un MAS.

La pulsación, el periodo y la frecuencia de dicho movimiento oscilatorio son:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nótese que el periodo de las oscilaciones no depende de la amplitud de las mismas; depende sólo de la masa del oscilador y de la constante elástica del resorte.

www.yoquieroaprobar.es

El trabajo realizado por la fuerza elástica al llevar el oscilador de una posición A (abscisa, x_A) hasta una posición B (abscisa, x_B) se obtiene así:

$$W_{AB} = \int_{AB} F.dx = -k\int_{x_A}^{x_B} x.dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2$$

El valor de este trabajo, vemos, sólo depende de las posiciones de A y B, y no de sus posiciones intermedias. Por tanto, *la fuerza elástica es conservativa.*

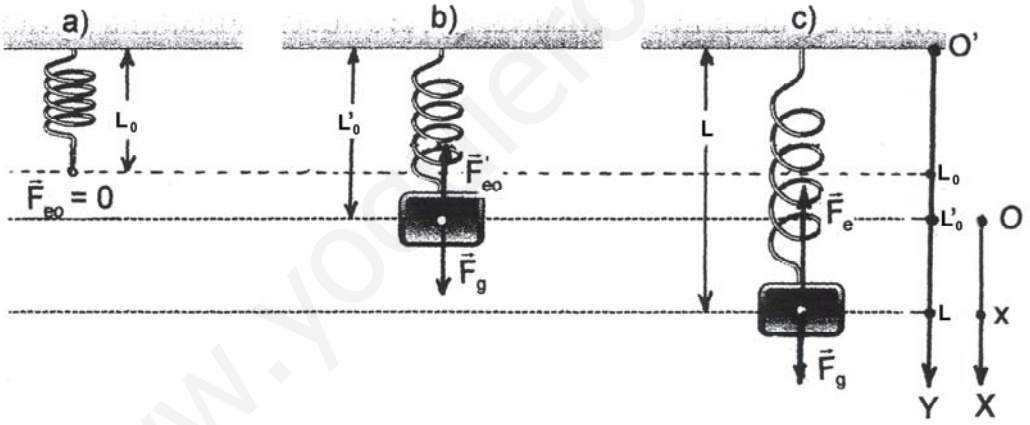
Entonces, esta fuerza elástica deriva de una función potencial, que llamamos *energía potencial elástica* cuyo valor quedó calculado en UI – T 3.9b

En este punto, deberás volver a la sección UI – T 3.9b, revisando y estudiando nuevamente los conceptos allí expuestos. Después de este repaso, puedes continuar esta exposición.

Ejercicio: oscilaciones en un resorte vertical: Consideremos un resorte vertical. Al colgar de él la masa oscilante m, no sólo existe la fuerza elástica F_e actuando sobre ella sino también la fuerza debida a su peso F_g = mg. ¿Es su movimiento también un MAS?

La tesis que se desea probar es que en estos casos (resorte vertical) el estudio es el mismo aplicado al resorte horizontal, con tal de tomar como centro de oscilación el correspondiente al oscilador en equilibrio, cargado con su masa y en posición vertical.

Observemos las gráficas:



En las gráficas, tomamos como eje del movimiento el eje O'Y, vertical hacia abajo, con origen en O'.

Estas gráficas expresan:

a) Situación del resorte, sin masa oscilatoria. Equilibrio.

Longitud del muelle, L_0 Fuerza elástica, $\vec{F}_{eo} = 0$

b) Situación del resorte, con masa oscilatoria. Equilibrio.

Longitud del muelle, L_0' Fuerza elástica, $\vec{F}'_{eo} = -k\,(L'_0 - L_0)\,\hat{j}$ Peso, $\vec{F}_g = mg.\vec{j}$

El equilibrio implica: $\vec{F}_g + \vec{F}'_{eo} = 0$ es decir $mg = k(L'_0 - L_0)$ (*)

c) Situación del resorte, con masa oscilatoria y en movimiento, en un instante t:

Longitud del muelle, L Fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k(L - L_0).\vec{j}$ Peso, $\vec{F}_g = mg.\vec{j}$

Aplicando la 2ª ley de Newton: $\vec{F}_e + \vec{F}_g = m.\vec{a}$

$-k(L - L_o).\vec{j} + mg.\vec{j} = m.\vec{a}$ y teniendo en cuenta (*): $-k(L_0 - L_0)\hat{j} + k(L'_0 - L_0)\hat{j} = m\,g\,\hat{j}$

Simplificando: $-k(L - L'_o).\vec{j} = m.\vec{a}$

Cambiemos el sistema de referencia. Sea el nuevo eje OX, con el origen en O y sentido vertical hacia abajo; por tanto, $\vec{j} = \vec{i}$. Llamemos x a la nueva variable; entonces: $x = L - L'_o$

Por tanto:

$$-kx.\vec{i} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad \text{habiendo tomado } \omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$\Rightarrow$ el movimiento es un MAS con centro en O, siendo este centro de oscilación el de la posición del oscilador, cargado el muelle con la masa m, y en equilibrio.

La pulsación, el periodo y la frecuencia son obviamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

B.- PÉNDULO SIMPLE

El *péndulo simple* está constituido por una masa puntual suspendida de un punto fijo mediante un hilo, de longitud L, inextensible y de masa despreciable. Cuando se separa de su posición vertical (posición de equilibrio) y se suelta, el péndulo oscila en un plano vertical, describiendo un movimiento periódico y oscilatorio, cuyas características se estudian a continuación.

Las fuerzas que actúan sobre la masa m del péndulo son: su *peso* $\vec{P}$ y la *tensión de la cuerda* $\vec{T}$ (no se tiene en consideración la fricción con el aire).

En la figura se muestra un péndulo simple:

+ a la izquierda, en equilibrio y en reposo, verificándose: $\sum \vec{F} = 0$ o sea $\vec{P} = -\vec{T} \Rightarrow P = T$

+ a la derecha, en movimiento, verificándose: $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ o sea $\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$

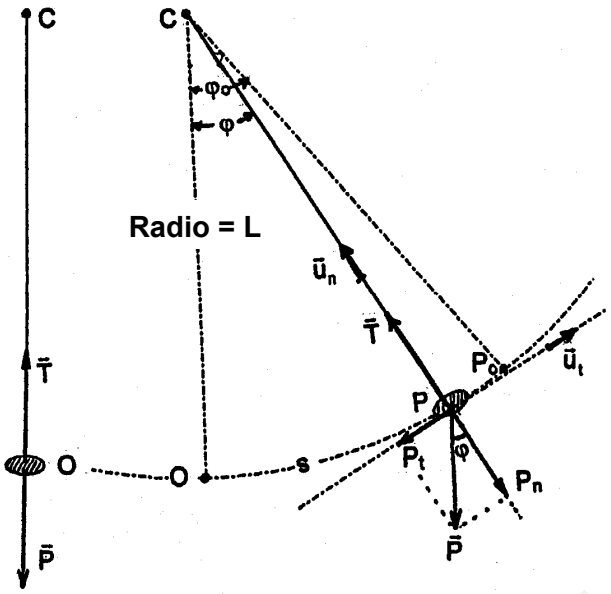
En el instante t el péndulo se halla en P. El arco s = OP representa su posición lineal, cuando se encuentra separado un ángulo φ de su posición de equilibrio O. Se verifica $s = L.\varphi$ (φ en rd).

Tomemos como sistema referencial el sistema intrínseco {centro en P; direcciones normal $\vec{u}_n$ y tangencial $\vec{u}_t$}. Descompongamos el peso $\vec{P}$ según ambos ejes:

$$\vec{P} = P_n\vec{u}_n + P_t\vec{u}_t = -mg.\cos\varphi.\vec{u}_n - mg.\text{sen}\varphi.\vec{u}_t$$

(los signos menos son debidos al sentido opuesto de ambas componentes respecto de los vectores unitarios $\vec{u}_n$ y $\vec{u}_t$ del sistema referencial)

www.yoquieroaprobar.es



Entonces: $\vec{P} + \vec{T} = (T - mg.\cos\varphi).\vec{u}_n - mg.\text{sen}\varphi.\vec{u}_t$

Y la ecuación fundamental de la dinámica, $\sum \vec{F} = m\ \vec{a}$, se escribe así:

$$(T - mg.\cos\varphi).\vec{u}_n - mg.\text{sen}\varphi.\vec{u}_t = m\ a_n.\hat{u}_n + m a_t.\hat{u}_t$$

Descomponemos pues el movimiento,

+ según la dirección normal o centrípeta:

$$T - mg.\cos\varphi = ma_n \ \wedge\ a_n = \frac{v^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m(v^2/L + g.\cos\varphi)$$

+ según la dirección tangencial:

$$-mg.\text{sen}\varphi = ma_t \quad \Rightarrow \quad a_t = -g.\text{sen}\varphi$$

Esta 2ª ecuación, que rige el movimiento tangencial, no es de fácil resolución. Sin embargo, si las oscilaciones del péndulo son de *muy pequeña amplitud* (valores de $\varphi_o < 10º$), entonces los valores del seno del ángulo φ son prácticamente iguales a los de φ en radianes (ver tabla adjunta), por lo que en este supuesto (para pequeñas oscilaciones): sen $\varphi \approx \varphi$

Comparación de los valores de un ángulo en radianes y el seno de mismo.
%: diferencia en tanto por ciento entre φ en radianes y sen φ.

φ (º)	φ (rd)	sen φ	%
0	0.0000	0.0000	0.00
2	0.0349	0.0349	0.02
5	0.0873	0.0872	0.13
10	0.1745	0.1736	0.51
15	0.2618	0.2588	1.15

En estos casos, la ecuación anterior se puede escribir: $a_t = -g\ \varphi$

Y teniendo en cuenta que $s = L.\varphi$, se tiene:

$$\boxed{a_t = -\frac{g}{L}s}$$

que es de la forma: $a = -\omega^2 x$ donde $\omega^2 = \frac{g}{L}$.

Ello prueba que *para pequeñas oscilaciones el péndulo se comporta como un oscilador armónico*, describiendo un movimiento armónico simple.

www.yoquieroaprobar.es

La *pulsación*, el *periodo* y la *frecuencia* del péndulo simple es, entonces:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Es importante resaltar que, de acuerdo con estas relaciones, *el periodo de oscilación de un péndulo simple es independiente de su masa y de la amplitud de las oscilaciones*, siempre que éstas sean pequeñas.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un resorte se alarga 2 cm, cuando se le cuelga un cuerpo de 10 kg de masa. A continuación se le añade una masa de otros 10 kg, se le da al conjunto un tirón hacia abajo de 3 cm y se le deja oscilar libremente. Determina:

a) la pulsación, el periodo y la frecuencia del movimiento. Expresa la ecuación del movimiento, x(t).

b) la posición, la velocidad, la aceleración y la fuerza recuperadora a los 0'5 s de iniciado el movimiento.

c) la diferencia de fase entre este instante y el inicial.

a) La ecuación de este MAS más adecuada es $x(t) = A \cos \omega t$, eligiendo un sistema de referencia hacia abajo (fase inicial $\varphi_o = 0$, pues el movimiento comienza cuando el oscilador se halla en su punto más bajo). Entonces, A = 3 cm = 0,03 m

La constante elástica se calcula teniendo en cuenta que $mg = k\,\Delta l$, siendo m = 10 kg y Δl = 0,02 m:

$$\Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10x9{,}8}{0{,}02} = 4900 \text{ N/m}$$

La pulsación, el periodo y la frecuencia son, siendo ahora m = 20 kg:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4900}{20}} = 15{,}65 \text{ rd/s} = 4{,}98\pi \text{ rd/s} \cong \boldsymbol{5\pi \text{ rd/s}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2x3{,}1416}{15{,}65} = \boldsymbol{0{,}40 \text{ s}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}40} = \boldsymbol{2{,}49 \text{ Hz}}$$

La ecuación del movimiento es: $\boldsymbol{x(t) = 0{,}03 \cos(5\pi t)}$

b) En función del tiempo,

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) &\rightarrow\quad & x(t) = 0{,}03\cos(5\pi t) \\ v(t) &= -\omega A \,\text{sen}(\omega t) &\rightarrow\quad & v(t) = -0{,}47\,\text{sen}(5\pi t) \\ a(t) &= -\omega^2 A\cos(\omega t) &\rightarrow\quad & a(t) = -7{,}35\cos(5\pi t) \\ F(t) = m\,a &= -m\omega^2 A\cos(\omega t) &\rightarrow\quad & F(t) = -147\cos(5\pi t) \end{aligned}$$

En el instante t = 0,5 s:

$x(0{,}5) = 0{,}03\cos(5\pi.0{,}5) = 0{,}03\cos(2{,}5\pi) = 0{,}03\cos(2\pi + \pi/2) = 0{,}03\cos(\pi/2) =$ ***0 metros***

$v(0{,}5) = -0{,}47\,\text{sen}(5\pi.0{,}5) = -0{,}47\,\text{sen}(\pi/2)$ ***= –0,47 m/s***

$a(0{,}5) = -7{,}35\cos(5\pi.0{,}5) = -7{,}35\cos(\pi/2) =$ ***0 m/s²***

$F(0{,}5) = -147\cos(5\pi.0{,}5) = -147\cos(\pi/2) =$ ***0 N***

$\Rightarrow$ el oscilador está en el centro de oscilación; pero se mueve hacia arriba con una velocidad de 0,47 m/s. En esta posición, la fuerza elástica que produce el movimiento es nula.

c) El desfase es: $\Delta\phi = \phi(0{,}5) - \phi(0) = (5\pi.0{,}5) - 0 =$ ***2,5 π rd = 450º***

www.yoquieroaprobar.es

2.- Escribir la ecuación del movimiento vibratorio de un oscilador que en el instante t = 2 s se encuentra 10 cm a la izquierda del centro de oscilación, siendo su velocidad 3 m/s hacia la izquierda, y que realiza 15 oscilaciones por segundo.

$$f = 15 \text{ Hz} \qquad \omega = 2\pi f = 30\,\pi \text{ rd/s}$$

$x(t) = A \operatorname{sen}(30\pi t + \varphi_o) \;\wedge\; x(2) = -0{,}1 \;\Rightarrow\; -0{,}1 = A \operatorname{sen}(60\pi + \varphi_o)$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(60\pi + \varphi_o) = -\frac{0{,}1}{A} = -\frac{1}{10.A} \qquad \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_o = -\frac{1}{10.A}$$

$v(t) = 30\pi A \cos(30\pi t + \varphi_o) \;\wedge\; v(2) = -3 \;\Rightarrow\; -3 = 30\pi A \cos(60\pi + \varphi_o)$

$$\Rightarrow \cos(60\pi + \varphi_o) = -\frac{3}{30\pi.A} = -\frac{1}{10\pi.A} \;\Rightarrow\; \cos\varphi_o = -\frac{1}{10\pi.A}$$

Elevando al cuadrado y sumando: $1 = \left(-\frac{1}{10.A}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10\pi.A}\right)^2 \;\Rightarrow\; 100\,A^2 = 1 + \frac{1}{\pi^2}$

$$\Rightarrow A = 0{,}105 \text{ m} = 10{,}5 \text{ cm}$$

Dividiendo miembro a miembro $\operatorname{sen}\varphi_o = -\frac{1}{10.A}$ $\cos\varphi_o = -\frac{1}{10\pi.A}$ resulta $\operatorname{tg}\varphi_o = \pi \;\Rightarrow$

$\begin{cases} \varphi_o = 72{,}3432^\circ = 72^\circ 20' 36'' \\ \varphi_0 = 252{,}3432^\circ = 252^\circ 20' 36'' \end{cases}$ De ambos valores, sólo es válido el 2º porque sólo para él el seno y el coseno son negativos. Así pues, $\varphi_o = 252{,}3432^\circ = 1{,}40\,\pi$ rd = 7/5 π rd

$$\Rightarrow \boldsymbol{x(t) = 10{,}5 \operatorname{sen}\pi(30t + 7/5)} \quad \textbf{centímetros}$$

3.- Una masa puntual de 10 g está sujeta a un muelle que vibra con una frecuencia de 3 Hz. En el instante inicial pasa por el centro de vibración con una velocidad de 5 cm/s en sentido negativo. Determina:

a) el tiempo que debe transcurrir hasta que alcance la velocidad cero.
b) la ecuación del movimiento.
c) la expresión de la energía cinética, en función del tiempo.
d) la aceleración en el instante en el que se anula la velocidad.

a) Frecuencia, f = 3 Hz Periodo, $T = \frac{1}{3}$ s Pulsación, $\omega = 2\pi f = 6\pi$ rd/s

Como en el instante inicial, t = 0, pasa por el centro, x = 0, posición en la que la velocidad es máxima, adquirirá velocidad nula cuando se encuentre en el extremo izquierdo, es decir tras un cuarto de periodo: $t = \frac{1}{4}T = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$ ***s***

b) La ecuación general del movimiento es $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o) \;\rightarrow\; x(t) = A \operatorname{sen}(6\pi t + \varphi_o)$

La velocidad es $v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_o) \;\rightarrow\; v(t) = 6\pi A \cos(6\pi t + \varphi_o)$

Para t = 0, $0 = A \operatorname{sen}\varphi_o$ y $-0{,}05 = 6\pi A \cos\varphi_o$ La primera relación implica que $\begin{cases} \varphi_o = 0 \\ \varphi_o = \pi \end{cases}$

La segunda, $A \cos\varphi_o = -\frac{0{,}05}{6\pi} = -0{,}00265 < 0$ exige que de ambas soluciones sólo sea válida la segunda, $\varphi_o = \pi$. De acuerdo con ello, $A = 2{,}65.10^{-3}$ m = 2,65 mm.

Al mismo resultado se llega pensando que en t =0 la masa puntual se halla en x = 0, dotada de velocidad máxima, 5 cm/s. Entonces:

www.yoquieroaprobar.es

$$v_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{0,05}{6\pi} = 2,65x10^{-3} \text{ m} = 2,65 \text{ mm}$$

La ecuación de este movimiento oscilatorio es pues:

$$x(t) = 2,65x10^{-3} \text{ sen}(6\pi t + \pi) = - 2,65x10^{-3} \text{ sen}(6\pi t)$$

$$\boldsymbol{x(t) = -2,65 \text{ sen}(6\pi t) \quad mm}$$

c) La expresión de la velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = -6\pi \,.\, 2,65x10^{-3} \cos(6\pi t) = -5x10^{-2} \cos(6\pi t)$

La energía cinética es:

$$E_c = ½ mv^2 = ½ x0.01x[-5x10^{-2} \cos(6\pi t)]^2 = 1,25x10^{-5} \cos^2(6\pi t)$$

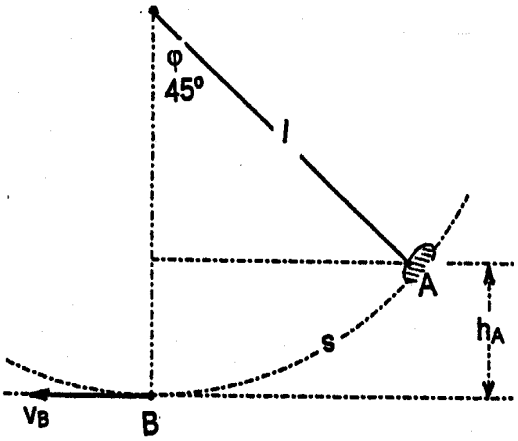
$$\boldsymbol{E_c(t) = 1,25x10^{-5} \cos^2(6\pi t) \quad julios}$$

d) En el instante en que se anula la velocidad (extremos del movimiento) la aceleración es máxima y vale:

$$a_{max} = \omega^2 A = 36\,\pi^2 \,.\, 2,65 \,.\, 10^{-3} = \boldsymbol{0,942 \text{ m/s}^2}$$

4.- Suponiendo despreciable la fricción del aire, calcula la velocidad de un péndulo simple de 1,2 m de longitud cuando pasa por la vertical si se le suelta desde una desviación de 45º. Calcula dicha velocidad, primeramente utilizando el método de energías; luego, aplicando las fórmulas del péndulo simple. Halla el % de error cometido en este segundo caso.

a) Se conserva la energía mecánica; por tanto:



$\Delta E_m = 0$ o sea $E_c(B) = E_{pg}(A)$ o sea $½ m v_B^2 = mgh_A$

Según la figura: $h_A = L(1 - \cos\varphi)$; por tanto:

$½ m v_B^2 = mg L(1 - \cos\varphi)$ de donde:

$$v_B = \sqrt{2gL(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2x9,8x1,2(1-\cos 45^o)} = \boldsymbol{2,625 \text{ m/s}}$$

b) Según las fórmulas del movimiento pendular:

$$v_B = v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{g}{L}}\, s = \sqrt{\frac{g}{L}}\, L.\varphi = \sqrt{gL}\,.\varphi$$

$$= \sqrt{9,8x1,2}\, x \frac{45}{180} x3.14 = \boldsymbol{2,693 \text{ m/s}}$$

c) Error, $\varepsilon_r = 100x \frac{2,693 - 2,625}{2,625} = \boldsymbol{2,6\%}$

5.- A Galileo le propusieron este problema: ¿Cómo hallar la altura de una cúpula inaccesible, de la que cuelga, a 6 m del suelo, una lámpara? Se podía variar la longitud del cable de suspensión de la lámpara.

www.yoquieroaprobar.es

Galileo hizo oscilar la lámpara, inicialmente a 6 m del suelo. Contó 10 oscilaciones y midió el tiempo invertido en ellas: 134,6 s. Varió la longitud del cable en 1 m menos, e hizo oscilar de nuevo la lámpara, invirtiendo ahora en 10 oscilaciones 133,1 s. Entonces:

1ª exper.: $T_1 = \frac{134{,}6}{10} = 13{,}46\,s$ $\quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad l = \frac{g}{4\pi^2}T_1^2$

2ª exper.: $T_2 = \frac{133{,}1}{10} = 13{,}31\,s$ $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l-1}{g}}$ $\quad l - 1 = \frac{g}{4\pi^2}T_2^2$

Dividiendo estas dos expresiones, y simplificando, resulta: $\frac{l}{l-1} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$ $\quad \frac{l}{l-1} = \frac{13{,}46^2}{13{,}31^2} = 1{,}023$

→ l = 45,12 m La altura H de la cúpula es entonces H = 45,12 + 6 = ***51,12 metros***

6.- Una partícula describe un MAS sobre una trayectoria rectilínea. En el punto x = 3 cm su velocidad es de 9 cm.s^{-1}, mientras que en el punto x = 6 cm es de 4 cm.s^{-1}. Calcula la frecuencia del movimiento vibratorio y su amplitud.

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_o)$ $\qquad v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_o)$

+ Punto x = 3 cm, $0{,}03 = A\,\text{sen}(\omega t_A + \varphi_o)$ $\qquad 0{,}09 = \omega A\cos(\omega t_A + \varphi_o)$

$\text{sen}(\omega t_A + \varphi_o) = \frac{0{,}03}{A}$ $\qquad \cos(\omega t_A + \varphi_o) = \frac{0.09}{\omega A}$

Elevando al cuadrado y sumando: $1 = \frac{0{,}0009}{A^2} + \frac{0{,}0081}{\omega^2 A^2}$ (*)

+ Punto x = 6 cm, $0{,}06 = A\,\text{sen}(\omega t_B + \varphi_o)$ $\qquad 0{,}04 = \omega A\cos(\omega t_B + \varphi_o)$

$\text{sen}(\omega t_B + \varphi_o) = \frac{0{,}06}{A}$ $\qquad \cos(\omega t_B + \varphi_o) = \frac{0{,}04}{\omega A}$

Elevando al cuadrado y sumando: $1 = \frac{0{,}0036}{A^2} + \frac{0{,}0016}{\omega^2 A^2}$ (**)

Igualando (*) y (**), y simplificando A^2, resulta: $0{,}0009 + 0{,}0081/\omega^2 = 0{,}0036 + 0{,}0016/\omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{65}{27}} = 1{,}552\,\text{rd/s}$ $\quad f = \frac{\omega}{2\pi}$ = ***0,247 Hz***

Despejando A^2, por ejemplo en (*), se tiene: $A^2 = 0{,}0009 + \frac{0{,}0081}{(1{,}552)^2} = 0{,}00426$

A = 0,0653 m = ***6,53 cm***.

Podemos resolver este problema, también, por métodos energéticos. En efecto, el sistema es conservativo, por lo que la energía mecánica en el punto x = 3 cm es igual a la del punto x = 6 cm:

$E_c(A) + E_{pe}(A) = E_c(B) + E_{pe}(B)$ $\quad \rightarrow \quad ½\,m\,v_A^2 + ½\,k\,x_A^2 = ½\,m\,v_B^2 + ½\,k\,x_B^2$

$\rightarrow \quad v_A^2 - v_B^2 = \frac{k}{m}(x_B^2 - x_A^2)$.

www.yoquieroaprobar.es

Recordando que $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$ resulta: $\omega = \sqrt{\frac{v_A^2 - v_B^2}{x_B^2 - x_A^2}}$ = 1,552 rd/s $\rightarrow$ *f* = ***0,247 Hz***.

El valor de la amplitud A puede calcularse fácilmente teniendo presente que en cualquier punto la energía cinética es:

$E_c = ½\, mv^2 = ½\, k\, (A^2 - x^2) \rightarrow A^2 = x^2 + \frac{m}{k} v^2 = = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = 0{,}0009 + \frac{0{,}0081}{(1{,}552)^2} = 0{,}00426$

$\rightarrow$ A = 0,0653 m = ***6,53 cm***

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Una partícula está animada de un m.a.s. de 10 cm de amplitud. Si la partícula realiza 50 vibraciones por segundo, calcula:
a) el periodo del movimiento ***R.: T = 0,02 s***
b) la pulsación ***R.: $\omega = 100\pi$ rd/s***
c) la velocidad máxima ***R.: v_{max} = 31,42 m/s***
d) la aceleración máxima ***R.: a_{max} = 9870 m/s^2***

2.-Una partícula vibra con una velocidad máxima de 40 m/s y una amplitud de 5 cm. Calcula:
a) la frecuencia con que vibra la partícula
b) la aceleración máxima
c) la velocidad de la partícula cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.
R.: f = 127,3 Hz a_{max} = 32000 m/s v = $\pm$ 36,7 m/s

3.- Una partícula que se mueve con m.a.s. tiene las velocidades 10 y 4 m/s cuando dista de la posición de equilibrio, respectivamente, 5 y 7 cm. Calcula la amplitud, el periodo y la frecuencia de este movimiento. ***R.: A = 7,32 cm T = 3,35x10^{-2} s f = 29,78 Hz***

4.- Una masa de 5 g oscila con una amplitud de 8 cm y con un periodo de 0.05 s. Calcula la energía cinética máxima con que oscila. ***R.: $E_{c\ Max}$ = 0,253 J***

5.- El movimiento sinusoidal de una partícula tiene un período de 2 s y oscila entre dos puntos extremos que distan entre sí 10 cm.
a) Escribe la ecuación del movimiento de la partícula.
b) Expresa la velocidad en función del tiempo.
c) Calcula los valores límite entre los que varía la velocidad.
d) Halla la aceleración máxima de la partícula
R.: a) x = 0,05 sen πt b) v = 0,16 cos πt c) $\pm$ 0,16 m/s d) 0,49 m/s^2.

6.- Las características de un m.a.s. son: amplitud, 0,5 m; frecuencia, 2 Hz; fase inicial, cero.
a) Escribe la ecuación de este movimiento.
b) Calcula la elongación y la velocidad en el instante 3/4 s.
R.: a) x(t) = 0,5. sen(4πt) b) x = 0; v = - 6,28 m/s.

7.- Un m.a.s. tiene las siguientes características: amplitud 10 cm y frecuencia 20 Hz. Calcula:
a) La velocidad en el punto medio y en los extremos de la oscilación.
b) La aceleración en los puntos anteriores.
R.: a) 4π m/s; 0 b) 0; -160π^2 m/s^2.

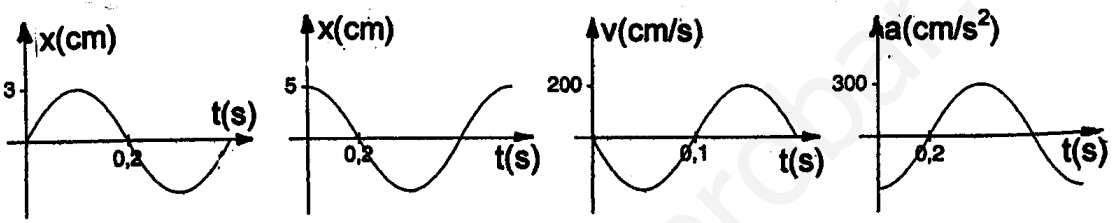
8.- Una partícula está animada de un m.a.s. de periodo 12 s y fase inicial nula. Determina:
a) el tiempo que debe transcurrir hasta que la velocidad sea la mitad que la velocidad máxima. ***R.: t_1 = 2 s***
b) ¿en qué instante la elongación es la mitad de la amplitud? ***R.: t_2 = 1 s***

9.- Una partícula se mueve con m.a.s. cuya ecuación, expresada en unidades del S.I., es y = 2 sen(t/2 + π). Determina:
a) La amplitud, periodo y frecuencia de sus oscilaciones.
b) la posición, velocidad y aceleración a los 5 s de iniciado el movimiento.
R.: A = 2 m T = 12,57 s f = 7,96x10^{-2} Hz y(5) = - 1,20 m v(5) = 0,80 m/s a(5) = 0,30 m/s^2

10.- Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo del eje X, y hacia el origen, sometido a una fuerza $\vec{F} = -10x\,\vec{i}$. En el instante inicial se encuentra a 2 m del origen y acercándose a él con una velocidad de 10 m/s. Calcula:
a) el periodo del movimiento, la amplitud y la fase inicial.
b) el instante en que pasa por el origen por primera vez.
c) la velocidad en dicho instante.
R.: T = 2'81 s A = 4'90 m φ_0 = 0'86614π rd = 155'9052º t = 0'188 s v = 10'9 m/s

11.- Sobre una superficie plana horizontal y sin rozamiento se encuentra en reposo un cuerpo de 4 kg de masa unido a un resorte de constante elástica k = 1200 N/m. Otra masa de 6 kg se desliza sin rozamiento hacia la primera con una velocidad de 5 m/s. Si el choque es totalmente inelástico (tras el choque, ambas masas quedan unidas), determinar la amplitud y el periodo de las oscilaciones del conjunto. ***R.: A = 0,274 m T = 0,574 s***

12.- Deduce la ecuación de la elongación para las vibraciones representadas en las figuras (S.I.):



R.: x(t) = 0,03.sen(5πt) x(t) = 0,05.cos($\frac{5}{2}\pi$t) x(t) = 0,064.cos(10πt) x(t) = 0,049.cos($\frac{5}{2}\pi$t)

13.- Un péndulo realiza 1200 oscilaciones por hora en el ecuador. Calcula:
a) el periodo de oscilación en el ecuador y en el polo
b) la longitud del péndulo
c) el retraso o adelanto en una hora de ese péndulo si se traslada al polo.
Datos: g = 9'781 m/s^2 en el ecuador; g = 9'832 m/s^2 en el polo.
R.: T_e = 3 s T_p = 2'992 s L = 2'23 m Se adelanta 9'35 s por hora.

14.- La aceleración de la gravedad en la superficie lunar es aproximadamente 1/5 del valor que tiene en la superficie de la Tierra. ¿Qué longitud debe tener un péndulo para que en la Luna el periodo sea de 2 s? ¿Cuál es la relación entre los periodos lunar y terrestre, para un péndulo determinado? ***R.: L = 20 cm $T_L = \sqrt{5}\,T_T$***

15.- Un movimiento periódico viene dado por la ecuación y = 8 sen $\left(\frac{2\pi}{6}t+\varphi\right)$, donde y viene dado en cm y t en segundos.
a) ¿Qué representa φ? ¿ Cuánto vale la frecuencia?
b) ¿Cuál es, en grados, la diferencia de fase entre dos instantes separados por un intervalo de 1 s?
R.: a) El desfase inicial, 1/6 Hz ; b) 60° .

16.- La longitud de un péndulo simple es 25 cm y su período es 1 s. Calcula:
a) El valor de la gravedad en el lugar.
b) Si la masa del péndulo es de 15 g, ¿cuánto vale la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio cuando se desvía 30°?
c) Velocidad con que pasa por la posición de equilibrio.
R.: a) 9,87 m/s^2; b) 0,07 N; c) 0,83 m/s .

17.- Halla la variación que tiene lugar en la frecuencia y en el período de un péndulo cuando hacemos su longitud cuatro veces mayor.
R.: El período se hace el doble; la frecuencia se reduce a la mitad.

18.- Un estudiante observa a unos obreros que tiran de una cuerda para elevar un peso con una polea instalada en lo alto de un edificio. El estudiante se propone hallar la altura del edificio cuando comprueba que el fardo dio 10 oscilaciones en 80 s antes de iniciar la subida. ¿Qué altura tiene el edificio? ***R.: 15,9 m.***

19.- El período de un péndulo simple es de 4,2 s cuando su longitud es d m. Si acortamos la longitud del péndulo en 1 m, el período es de 3, 7 s. Halla el valor de g y la longitud primitiva.
R.: 10 m/s^2 4,5 m.

20.- Un cuerpo de 5 kg de masa está sujeto por un muelle cuya constante es 50 N/m. Si lo estiramos 10 cm de su longitud natural y lo soltamos, hallar la frecuencia de la oscilación. Escribir las ecuaciones del movimiento.
R.: f = 0,5 Hz x(t) = 0,1.cos ($\sqrt{10}$t) v(t) = - 0,32.sen ($\sqrt{10}$t) a(t) = - cos ($\sqrt{10}$t)

21.- Un cuerpo de 2 kg está suspendido de un resorte cuya constante es 200 N.m^{-1} Lo alargamos 10 cm de su posición de equilibrio y lo soltamos. Hallar la frecuencia de oscilación y escribir la expresión de la longitud del resorte en función del tiempo, sabiendo que su longitud natural es 0,5 m. Hallar la velocidad del cuerpo cuando la longitud del resorte sea 65 cm.
R.: f = 1,59 Hz l(t) = 0,60 + 0,1.cos(10t) Cuando l = 0,65 m, v = $\pm$ 0,87 m/s

22.- Para medir el tiempo disponemos de un péndulo simple de 1 s de periodo en una posición de la Tierra donde g = 9,80 m.s^{-2}. Si medimos el tiempo con dicho péndulo en un lugar donde g = 9,82 m.s^{-2}, determinar el error al cabo de un día completo.
R.: Se adelanta 88,03 s por día

23.- La longitud natural de un muelle, cuya constante es 400 N.m^{-1}, es de 1 m. Un extremo del muelle está fijo en el techo y del otro suspendemos un cuerpo de 2 kg. Luego estiramos el muelle hasta que alcanza 1,2 m, y posteriormente lo soltamos. Hallar la velocidad del cuerpo cuando la longitud del muelle es de 1 m. ¿Cuál es la longitud mínima que alcanza el muelle? ¿En qué instante alcanza la longitud de 1 m por 1ª vez?
R.: 2'02 m/s hacia arriba.- Mínima longitud del muelle, l_{min} = 0'898 m.- Alcanza la longitud l = 1 m por 1ª vez en el instante t = 0'134 s.

24.- Un cuerpo está suspendido de un hilo de 2,5 m de longitud. Lo separamos de su posición de equilibrio hasta que el hilo forme con la vertical un ángulo de 30º, y lo soltamos. Hallar la velocidad que tiene el cuerpo al pasar por la posición más baja. Comparar el resultado con el que hubiéramos obtenido si considerásemos el sistema como un péndulo simple.
R.: v = 2,560 m/s v' = 2,592 m/s ε_r = 1,14 %

25.- Un péndulo está constituido por una bola de plástico de 0'5 g de masa, cargada eléctricamente con una carga positiva de 1 μC, y un hilo aislante de 1'5 m de longitud. Sometido a pequeñas oscilaciones en el seno de un campo eléctrico constante, vertical hacia arriba, presenta un periodo de oscilación de 4 s. ¿Cual es el valor del campo eléctrico? Si éste se invierte, ¿cuál es el nuevo valor del periodo?
R.: E = 3050 N/C T' = 1'93 s

T E M A 5.-

FENÓMENOS ONDULATORIOS

SUMARIO:

5.1.- Propagación de una perturbación
5.2.- Ondas armónicas
5.3.- Superposición de ondas de igual frecuencia
5.4.- Ondas estacionarias.- Aplicaciones:
a) Cuerdas vibrantes
b) Tubos sonoros
5.5.- Ondas en el espacio: conceptos
5.6.- Energía de una onda
5.7.- Principio de Huygens
5.8.- Algunas propiedades de las ondas:
a) Reflexión y refracción
b) Interferencias
c) Difracción
d) Polarización

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

www.yoquieroaprobar.es

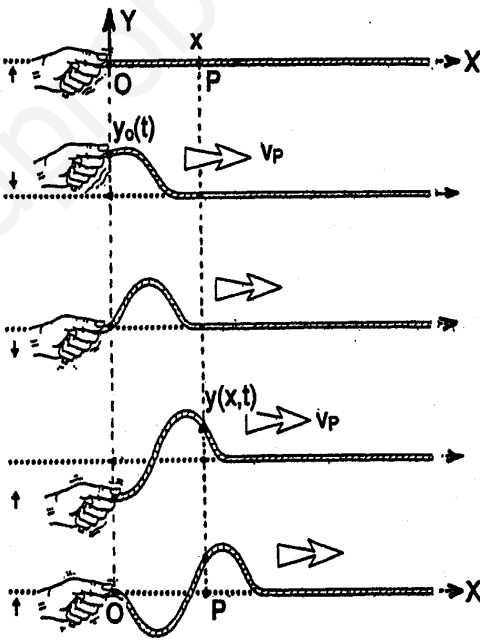
1.- PROPAGACIÓN DE UNA PERTURBACIÓN

Supongamos un medio material en *equilibrio*. Denominamos *perturbación* a cualquier fenómeno que rompa este equilibrio. Si un punto O del medio experimenta una perturbación que lo saca del equilibrio (por ejemplo, que O comience a oscilar con un movimiento vibratorio), la experiencia enseña que los demás puntos próximos, al cabo de cierto tiempo, también se ven afectados por dicha perturbación. El tiempo que tardan estos puntos en ser perturbados depende de su distancia a la fuente de perturbación, O.

Es fácil interpretar esto hecho. El punto O, inicialmente en equilibrio, está ligado a los demás puntos por fuerzas interiores (fuerzas de unión de unos puntos materiales con otros) siendo su resultante nula. Al comenzar O su movimiento, se rompe el equilibrio de dichas fuerzas, y, como consecuencia, el movimiento de O se trasmite y alcanza posteriormente a los demás puntos.

Así pues, si un estado vibratorio se inicia en O, se va trasmitiendo a los puntos próximos. El estado vibratorio se traslada así en el espacio: se "*propaga*" en él. La propagación de esta vibración se denomina ***movimiento ondulatorio***, y a la perturbación que se propaga, ***onda***.

Un ejemplo: supongamos una cuerda horizontal, muy larga, tensa, en equilibrio. Produzcamos en su extremo O un movimiento de vaivén. Llamemos y_0 a la separación de este punto material extremo, hacia arriba y hacia abajo, en sentido perpendicular a la cuerda, respecto de la posición O de equilibrio; a y_0 lo vamos a denominar ***elongación*** del punto O. Esta elongación varía con el tiempo, por lo que podemos expresarla como función de esta variable: y_0 (t).



Esta elongación en O se trasmite al resto de la cuerda con cierta velocidad v_P, que llamaremos ***velocidad de propagación*** de la onda.

Sea O el origen de coordenadas, y situemos el eje X según la cuerda en reposo. Un punto P, a una distancia x de O, también se verá afectado por esta elongación; será alcanzado por ella al cabo de un cierto tiempo, y su movimiento podemos describirlo mediante una función y(x, t). Esta función describe el valor de la elongación en cada punto de abscisa x, en cada instante t.

Evidentemente, $y(0, t) = y_0(t)$.

De modo análogo, existen otras perturbaciones que se propagan como la elongación precedente en la cuerda:

+ la perturbación sonora, originada por un foco sonoro (vibraciones en el foco) se propaga mediante el aire cercano, produciendo en él compresiones y depresiones sucesivas.

+ la perturbación originada en un punto de la superficie libre de un líquido en reposo se trasmite en círculos concéntricos a su alrededor (véase la foto de la derecha).

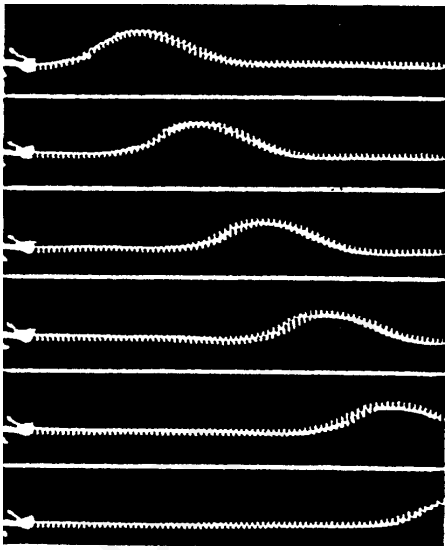
+ una perturbación luminosa, producida por la interacción de los campos electromagnéticos variables, también se propaga por el espacio; y por cierto, sin necesidad de medio material de trasmisión.

En todos los casos se da una serie de características comunes, aunque la naturaleza de los fenómenos sea diferente:

+ Tiene lugar la propagación de una perturbación, que llamamos ***onda***, con una ***velocidad de propagación*** (constante para medios homogéneos).

+ No es la materia o los puntos materiales los que se trasladan, sino la perturbación; ésta lo hace a través de dichos puntos materiales que "oscilan" en torno a sus posiciones de equilibrio.

+ En principio, "parece" que se requiere un medio material como soporte del movimiento ondulatorio. No es cierto para las ondas electromagnéticas (por ejemplo, la luz); en este caso, el vacío se comporta como un medio.



Generación y propagación de un pulso trasversal sobre un muelle.
(Ph.S.S.C., *Physics*, ***Heath, Boston, 1965)***

A.- FUNCIÓN DE ONDA

En adelante sólo consideraremos ondas que se propagan en una sola dirección: ***ondas unidimensionales***. En general, llamaremos ***función de onda***, y(x, t), a la función que proporciona el valor de la elongación a lo largo de dicha dirección y del tiempo.

Veamos, a continuación, cuál es la forma de esta función de onda y(x, t).

Sea un punto O (x = 0); en un instante t, sea $y_0(t)$ la perturbación que afecta a dicho punto. La unión material de O con los demás puntos próximos hace que la perturbación se propague. Sea v_P, constante, la velocidad de propagación. La perturbación llegará a un punto genérico P, de abscisa x, al cabo de un tiempo $\tau = x/v_P$; por lo tanto, si no existe amortiguamiento de la onda en su recorrido, el estado de perturbación en P, en el instante t, es el mismo que existía en O en el instante anterior $t - \tau$. Por consiguiente:

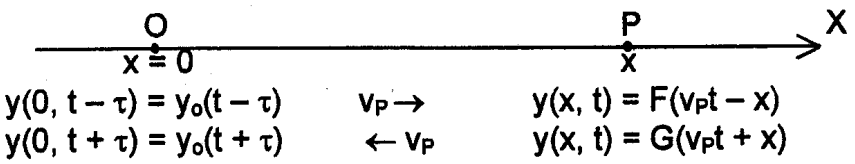
$$y(x, t) = y(0, t - \tau) = y_0(t - \tau) = y_0(t - x/v_P) \equiv F(v_P t - x) \qquad (1)$$

Por tanto, la función $F(v_P t - x)$ representa una onda que se propaga según la dirección del eje X, en sentido positivo (de izquierda a derecha).

Es fácil ver que una onda propagándose en sentido negativo (de derecha a izquierda) podrá escribirse así:

$$y(x, t) = y(0, t + \tau) = y_0(t + \tau) = y_0(t + x/v_P) \equiv G(v_P t + x) \qquad (2)$$

pues el estado de perturbación en P, en el instante t, es el mismo que tendrá lugar en O en un instante posterior $t + \tau$, ya que la perturbación llega antes a P que a O.



En general, cualquier onda unidimensional que se propague sin amortiguamiento según la dirección X, con velocidad constante v_P, podrá describirse mediante una función de onda que sea combinación lineal de ambas (1) y (2):

$$y(x, t) = \lambda_1 F(v_P t - x) + \lambda_2 G(v_P t + x) = \lambda_1 F(u) + \lambda_2 G(w) \qquad (3)$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes, y F y G funciones <u>arbitrarias</u> de las variables $u \equiv v_P t - x$ y $w \equiv v_P t + x$.

B.- CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS

1) Según *la naturaleza de la perturbación y del medio propagador*, las ondas pueden ser materiales o electromagnéticas:

Ondas materiales: Las partículas del medio ejercen la misión propagadora, desplazándose de sus posiciones de equilibrio, ya sea en forma oscilatoria y elástica (ondas elásticas, por ejemplo en una barra o en un muelle o en una varilla...), o bien produciendo zonas de compresión o depresión (ondas de presión en el seno de un gas, como en el caso del sonido).

En el primer caso, la perturbación que se propaga es una elongación, y(x, t); se mide en unidades de longitud. En el segundo caso, es una fluctuación de la presión, $\Delta p(x, t)$, en torno al valor de equilibrio p_0; se mide en unidades de presión.

En ambos casos, la onda transporta energía y momento sin transporte de materia: ésta no actúa como "vehículo" trasmisor sino como "vía" de trasmisión.

Ondas electromagnéticas: Una fuente de ondas electromagnéticas (osciladores electromagnéticos) genera en un punto del espacio P(x, y, z) próximo a ella un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$, ambos variables con el tiempo e interconectados por las ecuaciones del electromagnetismo (*ecuaciones de Maxwell*). Las variaciones temporales de $\vec{E}(x,y,z,t)$ y $\vec{B}(x,y,z,t)$ no quedan reducidas a dicho punto sino que afectan a los demás puntos, propagándose incluso en el espacio vacío, en virtud del comportamiento físico de dichos campos. Tal es el caso de la luz, de las ondas de radio, de otras radiaciones...

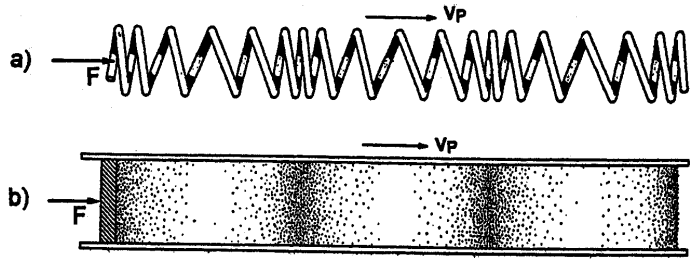
2) Atendiendo *al modo como se propagan*, las ondas pueden ser longitudinales o trasversales:

Ondas longitudinales: Se produce una onda longitudinal cuando las partículas del medio se desplazan de sus posiciones de equilibrio según la dirección de propagación.

Así ocurre en el caso de la figura a) de la página siguiente, en la que en uno de los extremos de un muelle se produce una perturbación oscilatoria en la dirección de dicho muelle, que se propaga a lo largo del mismo.

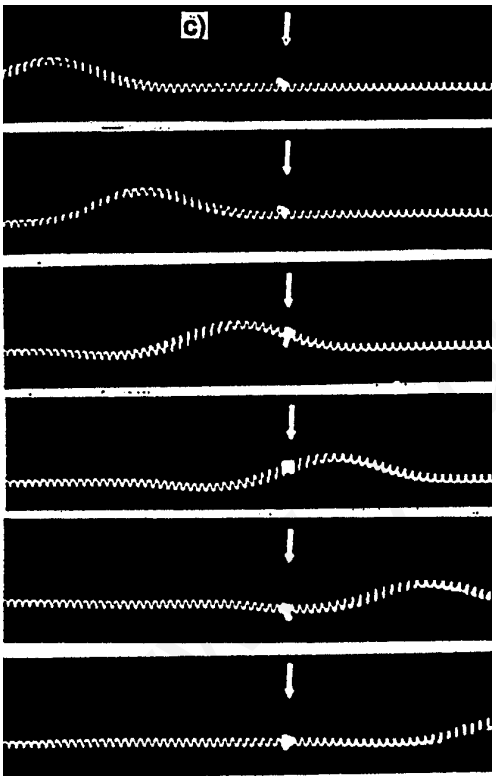
www.yoquieroaprobar.es

La figura b) representa, análogamente, una onda longitudinal: los puntos representan partículas de aire perturbado por efecto de cierta oscilación ocurrida en uno de los extremos (izquierdo, en este caso).



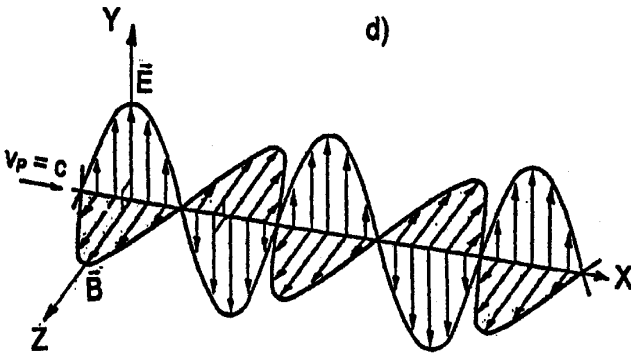
<u>Ondas trasversales</u>: Son aquéllas en las que la perturbación es, en cada punto, perpendicular a la dirección de propagación.

Tal es el caso de una cuerda vibrante, o un resorte como el de la figura c). Asimismo, también es el caso de las ondas electromagnéticas, para las que su dirección de propagación es perpendicular a las de ambos campos, eléctrico y magnético, ambos a su vez perpendiculares entre sí; figura d).



c).- Propagación de un pulso en un resorte. Las secciones del resorte se mueven hacia arriba y hacia abajo a medida que el pulso avanza desde la izquierda hacia la derecha.

d).- Propagación de una onda electromagnética armónica. Campos eléctrico y magnético, y dirección de propagación.



C.- VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN

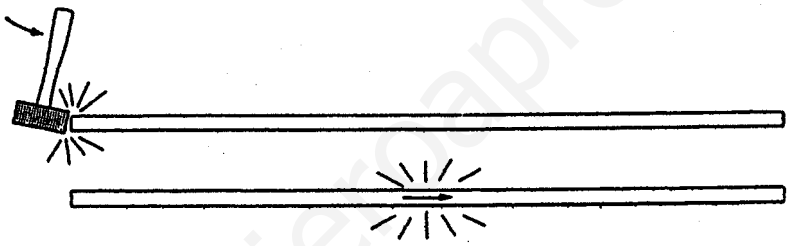
La velocidad de propagación de las ondas depende de su naturaleza y del medio de propagación. A título de información, se presentan algunas fórmulas que permiten calcular esa velocidad en algunos casos:

a) $v_P = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ b) $v_P = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ c) $v_P = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ d) $v_P = l.\sqrt{\frac{k}{m}}$ e) $v_P = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ f) $v_P = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}}$

a) Ondas trasversales elásticas en una cuerda o muelle, como el de la figura c). En la fórmula correspondiente, τ es la tensión de la cuerda o del muelle, en equilibrio; μ es la densidad lineal de la cuerda.

b) Ondas trasversales elásticas en una varilla vibrante, un diapasón, ... Se golpea la varilla o el diapasón, para que vibre, perpendicularmente a su longitud. G es el módulo de rigidez elástica, y ρ la densidad cúbica de la varilla.

c) Ondas longitudinales elásticas en una barra. Véase la figura siguiente: se golpea uno de sus extremos en la dirección longitudinal de dicha barra. En este caso, Y es el módulo de Young y ρ la densidad cúbica de la barra.



d) Ondas longitudinales elásticas en un muelle como el de la figura a). k es la constante elástica del resorte, l su longitud en reposo, y m su masa.

e) Ondas de presión en un gas. K es el módulo de compresibilidad del gas y ρ la densidad cúbica del mismo. Este caso es aplicable a la velocidad de propagación del sonido, la cual depende de la temperatura, y puede escribirse así:

$$v_P = v_{Po}\sqrt{\frac{T}{273}}$$

donde v_{Po} = 331,45 m/s es la velocidad del sonido a 0ºC, y T es la temperatura absoluta, en kelvin.

f) Ondas electromagnéticas, en el vacío. Figura anterior, d).

$$v_P = c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}}$$

ε_o es la permitividad dieléctrica del vacío. Su valor es: $\varepsilon_o = 8{,}8544 \times 10^{-12}\ C^2/N.m^2$
μ_o es la permeabilidad magnética del vacío. Su valor es: $\mu_o = 1{,}2566 \times 10^{-6}\ kg.m/C^2$
De acuerdo con estos valores:

$$v_P = c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}} = 2{,}9979 \times 10^8\ m/s \cong 3 \times 10^8\ m/s$$

www.yoquieroaprobar.es

2.- ONDAS ARMÓNICAS

En la expresión general de una onda:

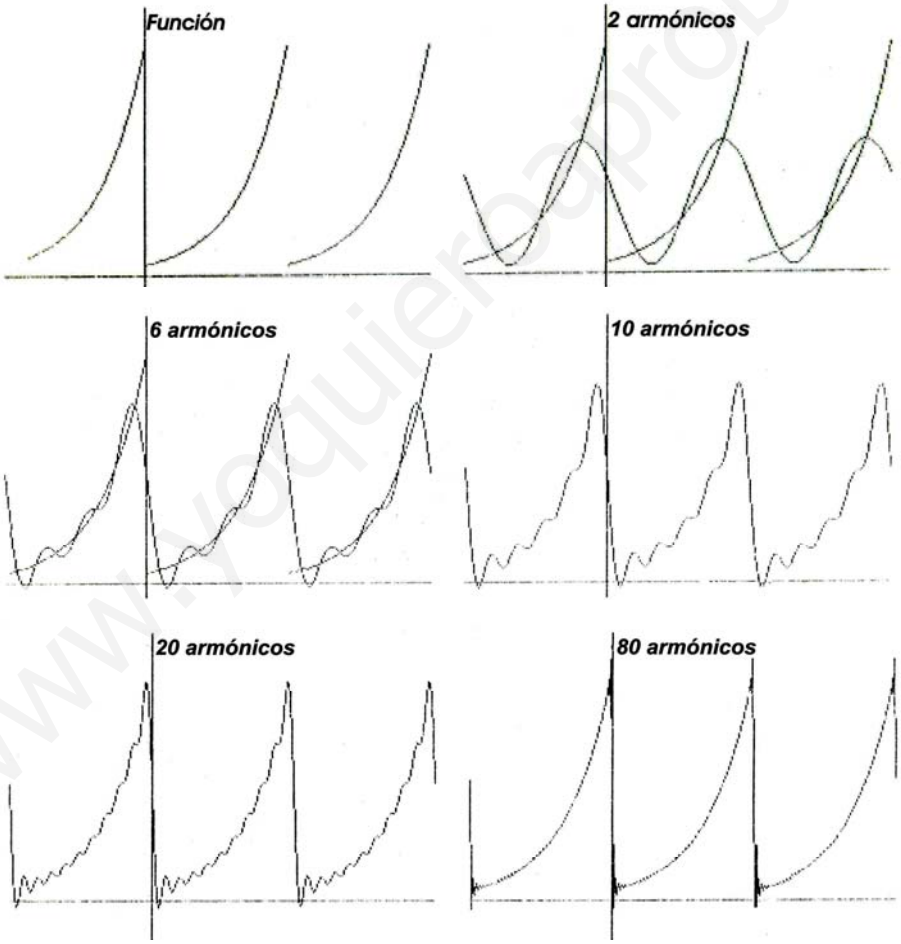
$$y(x, t) = \lambda_1 F(v_P t - x) + \lambda_2 G(v_P t + x) = \lambda_1 F(u) + \lambda_2 G(w)$$

las funciones de onda F(u) y G(w) son funciones ***arbitrarias*** de las variables $u \equiv v_P t - x$ y $w \equiv v_P t + x$, respectivamente.

Se acostumbra, sin embargo, a tomar como tales a funciones ***armónicas*** (seno o coseno), lo cual equivale a decir que en cada punto la perturbación varía sinusoidalmente, al modo de una vibración armónica, de la forma $A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_o)$.

Es ésta una aparente restricción al caso general. Pero es muy útil, y existen razones prácticas poderosas para ello, así como fundamentos teóricos que permiten restringir el estudio ondulatorio a este tipo de soluciones armónicas (Análisis de Fourier).

En los esquemas inferiores se presenta una función periódica y su generación a partir de armónicos, tomando en cada caso los primeros términos de la serie de Fourier.



Por ello, en lo que sigue, sólo estudiaremos perturbaciones armónicas, que se propagan en forma de ***ondas armónicas***.

www.yoquieroaprobar.es

Sea la frecuencia de la perturbación f = 1/T. La frecuencia angular o pulsación es entonces $\omega = 2\pi f$. Por lo tanto, podemos expresar la perturbación en O (x = 0) así:

$$y_o(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

Mediante un razonamiento análogo al presentado en 1.A, podemos expresar la onda armónica, propagándose a lo largo del eje X, en sentido positivo (de izquierda a derecha). Si es v_p la velocidad de propagación de la onda, ésta tarda en llegar desde O a un punto P, de abscisa x, un tiempo τ dado por $\tau = x / v_p$. El estado de perturbación en P en el instante t, y(x, t), es el mismo que había en O en el instante $t - \tau$, $y_0(t - \tau)$. Por tanto:

$$y(x, t) = y_o(t - \tau) = A\ \text{sen}[\omega(t - \tau) + \varphi_o] = A\ \text{sen}[\omega t - \omega\tau + \varphi_o] =$$

Hagamos $k \equiv \omega / v_P$, valor que llamaremos "***<u>número de onda</u>***". Entonces:

$$y(x, t) = A\ \text{sen}(\omega t - \omega \frac{x}{v_P} + \varphi_o) = A\ \text{sen}(\omega t - kx + \varphi_o)$$

Por tanto: $$\boxed{y(x, t) = A\ \text{sen}(\omega t - kx + \varphi_o)} \qquad (4)$$

representa una onda armónica propagándose en el sentido positivo del eje X.

Si la onda armónica se propaga en el sentido negativo de dicho eje (de derecha a izquierda), la forma de la función resultaría ser:

$$y(x, t) = y_o(t + \tau) = A\ \text{sen}[\omega(t + \tau) + \varphi_o] = A\ \text{sen}(\omega t + \omega \frac{x}{v_P} + \varphi_o) = A\ \text{sen}(\omega t + kx + \varphi_o)$$

o sea: $$\boxed{y(x, t) = A\ \text{sen}(\omega t + kx + \varphi_o)} \qquad (5)$$

puesto que la onda afecta al punto O un tiempo $\tau = x / v_p$ posterior al instante en que afectó a P.

Éstas son las funciones de onda armónica. Para una determinada onda armónica, se distinguen las siguientes constantes:

+ La amplitud de la onda: A	en m, cm o mm
+ La frecuencia angular de la onda: ω	en rd/s
+ El número de onda: k	en rd/m
+ La constante de fase: φ_o	en rd

A la función $\Phi \equiv \omega t - kx + \varphi_o$ se le denomina ***<u>fase</u>*** de la onda. En ella se encuentra la funcionalidad de la onda respecto de las dos variables x y t. Cuando x = 0 y t = 0, entonces $\Phi \equiv \varphi_o$; por ello, la constante de fase φ_o representa la *<u>fase inicial en el origen</u>*.

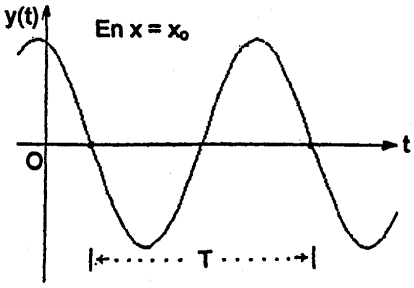
A.- DOBLE PERIODICIDAD

La función de onda armónica y (x, t) = A sen($\omega t + kx + \varphi_o$) presenta una doble periodicidad: temporal y espacial.

<u>a) Periodicidad temporal</u>: (Véase la gráfica).
<u>Fijado un punto</u> de abscisa $x = x_o$, en dicho punto se tendrá:

$$y(x_o, t) = A\ \text{sen}(\omega t - kx_o + \varphi_o)$$

que representa una función sólo de t, pudiéndose escribir así:



www.yoquieroaprobar.es

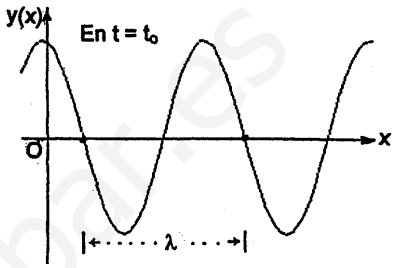
$$y(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \delta_1)$$

habiendo llamado $\delta_1 \equiv \varphi_o - kx_o$ Esta función representa el estado vibratorio de dicho punto, de abscisa x_o .

Es, como se ha visto, periódica, y su periodo T, su frecuencia f y su pulsación ω se relacionan, como quedó visto en el tema anterior, así:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

b) Periodicidad espacial: *Fijado un instante* determinado, $t = t_o$, en él el "perfil de la onda" viene dado por la gráfica adjunta, pues



$$y(x,t_o) = A\ \text{sen}(\omega t_o - kx + \varphi_o)$$

y haciendo $\omega t_o + \varphi_o \equiv \pi - \delta_2$ lleva a:

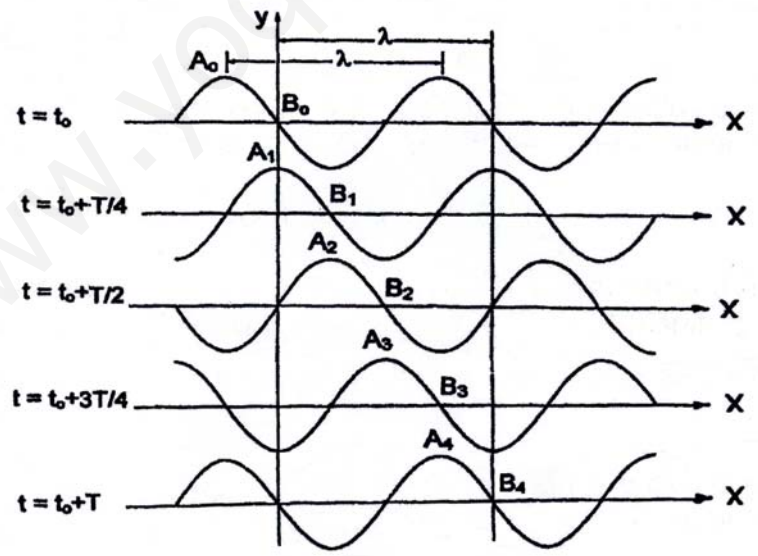
$$y(x) = A\ \text{sen}(kx + \delta_2)$$

que es una función sólo de x, armónica en el espacio, cuyo periodo espacial, que llamaremos ***longitud de onda***, λ, está relacionado con el número de onda k (de modo análogo a la relación entre T y ω) así:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$$

Así como "el periodo T es el tiempo mínimo entre dos estados de vibración iguales, para un punto cualquiera", así ahora diremos que

la longitud de onda λ es la distancia mínima entre dos puntos que se encuentran en todo instante en igual estado de vibración.



www.yoquieroaprobar.es

La relación entre ambos periodos, temporal T y espacial λ, es:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega/v_P} = \frac{2\pi v_p}{2\pi/T} = v_p T \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = v_P\, T \qquad (6)$$

Según esta última expresión

la longitud de onda representa el camino recorrido por la onda en un periodo de tiempo.

La diferencia de fase de la onda entre dos puntos P y P' de abscisas x y x', respectivamente es:

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi' = (\omega t - kx + \varphi_o) - (\omega t - kx' + \varphi_o) = k(x' - x) = k\,\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

$$\boxed{\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x} \qquad (7)$$

Si la distancia entre P y P' es justamente una longitud de onda, $\Delta x = \lambda$, entonces la diferencia de fase es $\Delta\Phi = 2\pi$, lo cual sugiere otra nueva interpretación de la longitud de onda:

la longitud de onda es la distancia entre dos puntos para los que la diferencia de fase entre ellos es 2π.

Siendo n un número entero, se dice que

+ puntos cuya diferencia de fase es $2n\pi$ ***están en fase.***
+ puntos cuya diferencia de fase es $(2n + 1)\pi$ ***están en oposición de fase.***
+ puntos cuya diferencia de fase es $(2n + 1)\pi/2$ ***están en cuadratura.***

3.- SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE IGUAL FRECUENCIA

Cuando dos o más ondas homogéneas (de la misma naturaleza) alcanzan un punto determinado, su estado oscilatorio es, en todo instante, el resultante de "sumar" los efectos de ambas ondas en dicho punto, como si actuaran independientemente. A esta suma se le denomina "***superposición***". Y extendida a todos los puntos alcanzados por las ondas, "***superposición de ondas***".

Así pues, si son $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ las funciones de dos ondas que se propagan en un medio común, la onda resultante tiene por función de onda la suma de las funciones de onda individuales:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (8)$$

Sean dos ondas progresivas que se propagan en la misma dirección y sentido, de igual frecuencia f y longitud de onda λ. Sea δ el desfase entre ambas. Y sean A_1 y A_2 sus respectivas amplitudes:

$$y_1(x, t) = A_1\, \text{sen}(\omega t - kx) \qquad\qquad y_2(x, t) = A_2\, \text{sen}(\omega t - kx + \delta)$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\omega = 2\pi f$, y donde δ es el desfase de la segunda onda respecto de la primera (adelanto).

www.yoquieroaprobar.es

Al superponerlas, la función de onda resultante, y(x, t), es:

$$y(x, t) = y_1 + y_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \delta) =$$

$$= A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx).\cos\delta + A_2 \cos(\omega t - kx).\operatorname{sen}\delta$$

$$y(x, t) = (A_1 + A_2 \cos\delta).\ \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A_2 \operatorname{sen}\delta.\ \cos(\omega t - kx) \qquad (9)$$

Llamando $\begin{cases} A_1 + A_2 \cos\delta = A\cos\beta \\ A_2 \operatorname{sen}\delta = A \operatorname{sen}\beta \end{cases}$ donde las constantes A y β pueden calcularse mediante este sistema de ecuaciones, la expresión anterior (9) adopta la forma:

$$y(x, t) = A \cos\beta.\ \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A \operatorname{sen}\beta.\ \cos(\omega t - kx) =$$

$$= A\ [\cos\beta.\ \operatorname{sen}(\omega t - kx) + \operatorname{sen}\beta.\ \cos(\omega t - kx)]$$

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \beta) \qquad (10)$$

que es la ecuación de la onda resultante. Se ve que es una onda armónica, de la misma frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ y longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ que las componentes.

Hemos de calcular la amplitud A y el desfase β de la onda resultante a partir del sistema de ecuaciones $\begin{cases} A.\cos\beta = A_1 + A_2 \cos\delta \\ A.\operatorname{sen}\beta = A_2 \operatorname{sen}\delta \end{cases}$

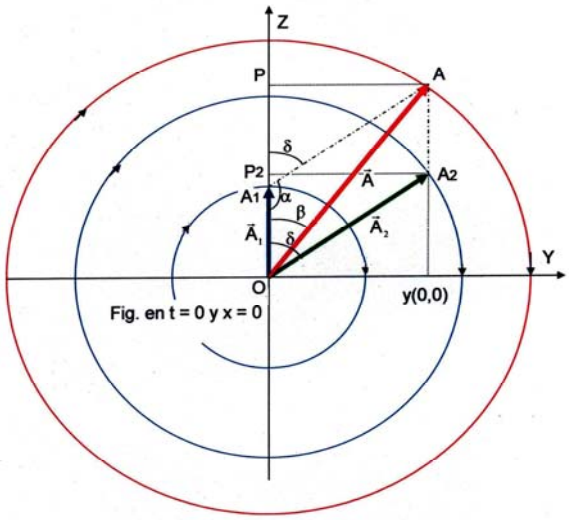
- elevando al cuadrado y sumando:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta} \qquad (11)$$

- dividiendo la segunda entre la primera:

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{A_2 \operatorname{sen}\delta}{A_1 + A_2 \cos\delta}} \qquad (12)$$

Las fórmulas (11) y (12) para calcular la amplitud resultante A y el desfase β (respecto de la primera onda) pueden ser obtenidas muy fácilmente utilizando la representación fasorial de Fresnel. Tomando la representación para x = 0 y t = 0, se dibujan los favores $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ (figura) y se suman vectorialmente, calculando $\vec{A}$. Geométricamente pueden obtenerse A y β.



En el triángulo OA_1A, aplicamos "la ley trigonométrica del coseno":

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\alpha$$

www.yoquieroaprobar.es

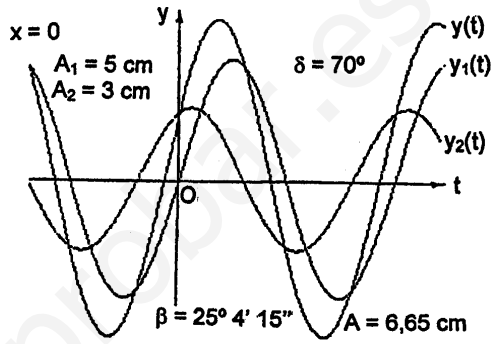
Como $\alpha + \delta = \pi \rightarrow \cos\alpha = \cos(\pi - \delta) = \cos\pi \,.\, \cos\delta + \text{sen}\,\pi \,.\, \text{sen}\,\delta = -\cos\delta$

$$\Rightarrow \qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

En el triángulo OPA, y teniendo en cuenta que PA = P_2A_2, se puede escribir:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{PA}{OP} = \frac{P_2A_2}{OA_1 + A_1P} = \frac{A_2\text{sen}\,\delta}{A_1 + A_2\cos\delta} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\,\beta = \frac{A_2\text{sen}\delta}{A_1 + A_2\cos\delta}$$

Ejemplo:
Dadas las ondas (x en cm y t en s): $y_1(x,t) = 5.\text{sen}(\omega t - kx)$ $y_2(x,t) = 3.\text{sen}(\omega t - kx + 70^o)$ calculamos la onda resultante,



hallando A por (11) y β por (12):

$$A^2 = 25 + 9 + 30.\cos 70^o = 44{,}26$$

$$\Rightarrow \qquad A = 6{,}65 \text{ cm}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{3.\text{sen}70^o}{5 + 3.\cos 70^o} = 0{,}4678$$

$\Rightarrow$ $\beta = 25{,}07087^o = 25^o\ 4'\ 15'' = 0{,}139\pi$ rd

Por tanto, la función de onda resultante es: ***$y(x, t) = 6.65\ \text{sen}(\omega t - kx + 0{,}139\pi)$***

Un caso particular especial es aquél en el que las amplitudes de las dos ondas son iguales, $A_1 = A_2 \equiv A_o$.

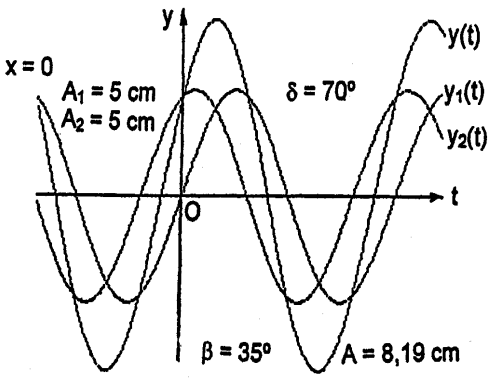
Entonces la onda resultante presentará la amplitud A y la fase inicial β, obtenidas de (11) y (12), [teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas para un ángulo cualquiera α:

$$1 + \cos\alpha = 2.\cos^2(½\,\alpha) \ \text{ y } \ \text{sen}\alpha = 2.\text{sen}(½\,\alpha).\cos(½\,\alpha)]:$$

$$A^2 = 2\ A_o^2(1 + \cos\delta) = 4\ A_o^2\cos^2(½\,\delta) \qquad \Rightarrow \qquad A = 2\ A_o\cos(½\,\delta)$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{A_o\text{sen}\delta}{A_o(1+\cos\delta)} = \frac{\text{sen}\delta}{1+\cos\delta} = \frac{2.\text{sen}(\delta/2).\cos(\delta/2)}{2.\cos^2(\delta/2)} = \text{tg}\,(½\,\delta) \quad \Rightarrow \quad \beta = ½\,\delta$$

Ejemplo: ***Dadas las ondas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, progresivas, en el mismo sentido:***
$y_1(x,t) = 5.\text{sen}(\omega t - kx)$ $y_2(x,t) = 3.\text{sen}(\omega t - kx + 70^o)$



la amplitud y la fase inicial de la resultante son:

$A = 10.\cos 35^o = 8{,}19$ cm y $\beta = 35^o = 0{,}194\pi$ rd

La función de onda resultante es:

$$y(x, t) = 8{,}19.\text{sen}(\omega t - kx + 0{,}194\pi)$$

4.- ONDAS ESTACIONARIAS

Cuando una onda se propaga en una dirección y choca frontalmente contra un obstáculo, experimenta una reflexión (al menos en parte), siendo devuelta en sentido contrario, de modo que la onda reflejada se superpone con la incidente.

Es el caso que ocurre en una cuerda tensa, fija en un extremo. La onda que avanza hacia él experimenta una reflexión, volviendo (al menos en parte) en sentido contrario, pudiendo superponerse con la onda de ida en cada punto de la cuerda.

Es éste un caso muy común de superposición de dos ondas de igual frecuencia, que interfieren entre sí al avanzar en sentidos opuestos: en cada punto y en cada instante se han de superponer los efectos de estas dos ondas, de ida y de vuelta.

Por facilitar el estudio, consideremos ambas ondas de igual amplitud, A. Podemos tomar sus fases iniciales nulas (lo cual no limita la generalidad del estudio, pues siempre se pueden elegir adecuadamente el origen O (x = 0) del referencial, sobre la dirección de propagación, así como el origen de tiempos, t = 0, para que las constantes de fase de ambas ondas sean nulas). Así pues, sean las ondas, en sentidos opuestos:

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A.\text{sen}(\omega t - kx) \\ y_2(x,t) = A.\text{sen}(\omega t + kx) \end{cases} \qquad (13)$$

Superponiendo ambas ondas, la onda resultante es:

$$y(x, t) = A\,[\text{sen}(\omega t - kx) + \text{sen}(\omega t + kx)]$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica sen(a + b) + sen(a – b) = 2 . sen a . cos b, se tiene:

$$\boxed{y(x, t) = 2A\ \cos(kx)\ .\ \text{sen}(\omega t)} \qquad (14)$$

Para interpretar esta onda, llamemos previamente:

$$\boxed{\mathcal{A}(x) \equiv 2\,A\cos(kx)} \qquad \text{Entonces,} \qquad \boxed{y(x, t) = \mathcal{A}(x)\ \text{sen}(\omega t)} \qquad (15)$$

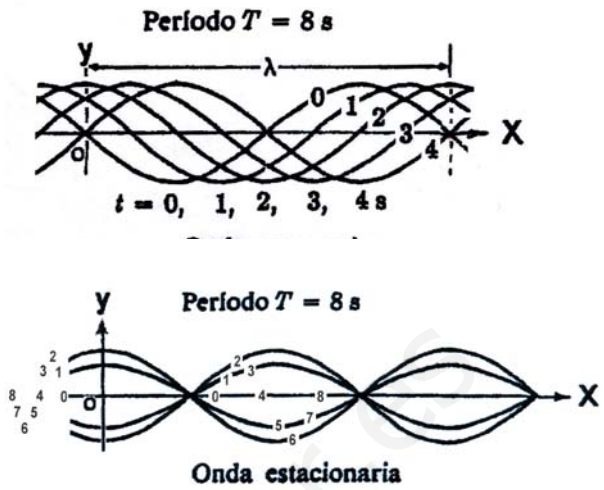
Nótese que (14) muestra la función de una onda especial. La llamaremos ***onda estacionaria***, en contraposición a ***ondas progresivas*** como las estudiadas hasta ahora.

1.- Una onda armónica que llamamos progresiva, y(x, t) = A sen(ωt – kx), se caracteriza por la doble funcionalidad de su fase, de las variables x y t.

En el caso de la onda estacionaria armónica, y(x, t) = $\mathcal{A}$(x) sen(ωt), la fase de la onda, ωt, sólo depende del tiempo; es decir, todos los puntos de la dirección de propagación (eje X) se encuentran en todo instante con la misma fase, ωt; ésta varía con el tiempo, pero adquiriendo el mismo valor para todo x.

2.- La amplitud de esta onda estacionaria, $\mathcal{A}$(x) = 2 A cos(kx), difiere de unos puntos a otros; es función armónica de la posición del punto, x, y no depende del tiempo, t. Esto quiere decir que en cada punto de abscisa x la vibración y(x, t) adquiere un valor máximo dado por $\mathcal{A}$(x), característico de él, mientras que varía con el tiempo, con frecuencia angular ω.

www.yoquieroaprobar.es



Onda progresiva y onda estacionaria, ambas armónicas. En ambos casos, la frecuencia y el periodo son iguales, T = 8 s. Las curvas representan los frentes de onda para t = 0, 1, 2, 3 y 4 s.

a).- Hay ciertos puntos para los que la amplitud de la onda es mínima nula. Son aquéllos de abscisa x_N tales que:

$$\mathscr{A}(x_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A\cos(kx_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(kx_N) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad kx_N = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{siendo } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{Y ya que } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_N = (2n+1)\frac{\lambda}{4}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (16)$$

A estos puntos x_N se les denomina ***nodos*** de la onda estacionaria. Estos puntos no salen del equilibrio en ningún momento, no vibran, pues para ellos su amplitud es nula.

b).- Hay otros puntos, de abscisa x_A, para los que la amplitud es máxima. Son aquéllos para los que:

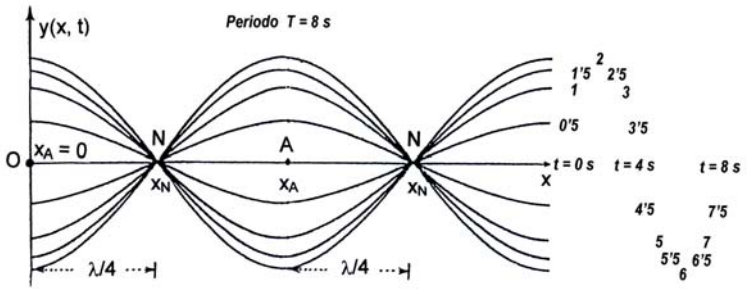
$$\mathscr{A}(x_A) = 2A \quad \Rightarrow \quad \cos(kx_A) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx_A = n\pi \quad \text{siendo } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_A = n\frac{\lambda}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (17)$$

Estos puntos se denominan ***vientres*** o ***antinodos*** de la onda estacionaria. Son los que experimentan las máximas variaciones de elongación en las vibraciones, pues para ellos la amplitud es máxima e igual a 2A.

De (16) y (17) se deduce que nodos y vientres se suceden alternativamente. La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es obviamente $\lambda/2$. Y la distancia entre un nodo y el vientre siguiente es $\lambda/4$.

Estúdiese la figura siguiente. En ella se presentan los perfiles sucesivos de una onda armónica estacionaria, cuando se toman instantes de tiempo tales que la fase es $\omega t = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$, etc... (es decir, el tiempo t = 0, 0'5, 1, 1'5, etc... segundos).

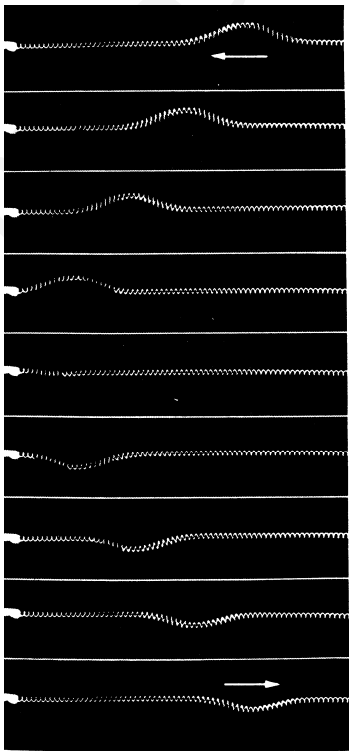


Atención

Para la obtención de la función de onda estacionaria (14) o (15) hemos partido del sistema (13): dos ondas progresivas, que avanzan en sentidos opuestos, ambas independientes, por lo que sus constantes de fase pueden considerarse nulas, tomando convenientemente los orígenes de posición (x = 0) y de tiempo (t = 0).

En el caso de una reflexión, sin embargo, no puede decirse que ambas ondas sean independientes; por el contrario, la onda devuelta por el elemento reflector presenta a veces frente a la onda incidente un desfase de π radianes, producido en el mismo punto de reflexión.

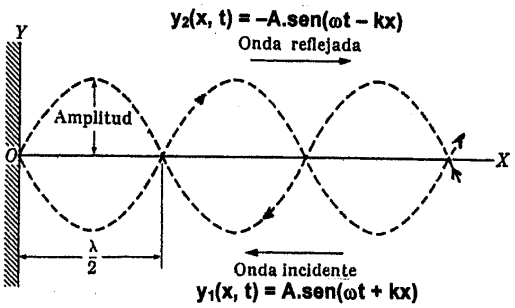
Tal es el caso de la onda que avanza por una cuerda con un extremo fijo. En dicho extremo, la onda experimenta un desfase en π radianes, como se ve en la figura adjunta.



Tomando dicho extremo fijo como origen, x = 0, la onda incidente que llega desde la derecha es $y_1(x, t) = A\ sen(\omega t + kx)$, y la onda reflejada, $y_2(x, t) = A\ sen(\omega t - kx + \pi) = -A\ sen(\omega t - kx)$.

Así pues:
$$\begin{cases} y_1(x,t) = A.sen(\omega t + kx) \\ y_2(x,t) = -A.sen(\omega t - kx) \end{cases} \qquad (13')$$

Cambio de fase de una onda reflejada sobre una cuerda que tiene un extremo fijo.- *(Fotografía cortesía del Educational Services, Inc.)*



Superponiendo ambas ondas, la onda resultante es :

$$y(x, t) = A\,[\text{sen}(\omega t + kx) - \text{sen}(\omega t - kx)]$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica sen(a + b) - sen(a – b) = 2 . cos a . sen b, se tiene:

$$\boxed{y(x, t) = 2A\ \text{sen}(kx)\ .\ \cos(\omega t)} \qquad (14')$$

La amplitud de dicha onda es $\mathscr{A}(x) \equiv 2\,A\,\text{sen}(kx)$ y la onda estacionaria se expresa así:

$$\boxed{y(x, t) = \mathscr{A}(x)\cos(\omega t)} \qquad (15')$$

Un razonamiento análogo al desarrollado anteriormente nos lleva a situar los nodos y los vientres o antinodos en las siguientes posiciones (como puede probar el alumno):

Nodos: $x_N = n\dfrac{\lambda}{2}$ Vientres: $x_A = (2n + 1)\dfrac{\lambda}{4}$ donde n = 0, 1, 2, ... (16')

A.- APLICACIÓN: CUERDAS VIBRANTES

Consideremos una cuerda tensa, de longitud L, sujeta en sus extremos, por ejemplo, una cuerda de guitarra o de violín. Produzcamos en un punto de ella una vibración. Ésta se propaga a lo largo de la cuerda en ambos sentidos. Reflejada en sus extremos, la onda de vuelta se superpone con la de ida, por lo que se establece en la cuerda una onda estacionaria. ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de dicha onda estacionaria?

Ante todo, al ser los extremos de la cuerda <u>puntos fijos</u>, dichos puntos, x = 0 y x = L, deben ser ***<u>nodos</u>*** de la onda. Por tanto, la onda ha de satisfacer estas dos condiciones:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

La función de onda (14) no es válida en este estudio, porque no puede satisfacer la primera condición, y(0, t) = 0, al corresponder al punto x = 0 un vientre, no un nodo, según (17). Sí es válida, en cambio, la función de onda (14'): y(x, t) = 2A sen(kx) . cos(ωt), pues para ella y(0, t) = 0 para todo t, correspondiendo a un nodo de la onda estacionaria.

La segunda condición: y(L, t) = 0, $\forall$ t, $\Rightarrow$ sen(kL) = 0 $\Rightarrow$ kL = nπ $\Rightarrow$ $\dfrac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

Este resultado expresa que en la cuerda vibrante sólo se asientan ondas estacionarias cuyas longitudes de onda son las dadas por:

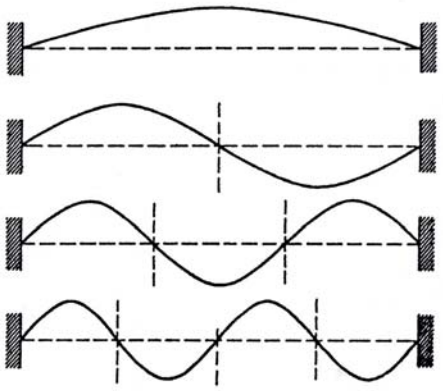
$\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ (n = 1, 2, 3...) es decir: $\lambda_1 = 2\,L$ $\lambda_2 = L$ $\lambda_3 = \dfrac{2L}{3}$ $\lambda_4 = \dfrac{L}{2}$ $\lambda_5 = \dfrac{2L}{5}$ ...

Las frecuencias asociadas a dichas longitudes de onda ($f_n = v_P / \lambda_n$) vienen dadas por:

$f_n = n\dfrac{v_P}{2L}$ (n = 1, 2, 3...) es decir: $f_1 = \dfrac{v_P}{2L}$ $f_2 = \dfrac{v_P}{L}$ $f_3 = 3\dfrac{v_P}{2L}$ $f_4 = 2\dfrac{v_P}{L}$ $f_5 = 5\dfrac{v_P}{2L}$ ...

donde v_P es la velocidad de propagación que depende, como se vio, de la tensión de la cuerda τ y de la densidad lineal de masa μ ($v_P = \sqrt{\tau/\mu}$).

La cuerda, pues, al vibrar, lo hace sólo según estos modos de vibración: los correspondientes a estas longitudes de onda y estas frecuencias asociadas. Son los llamados ***modos normales*** de vibración de la cuerda.



$n = 1$	$\lambda_1 = 2L$	$f_1 = \frac{v_P}{2L}$
$n = 2$	$\lambda_2 = L$	$f_2 = \frac{v_P}{L}$
$n = 3$	$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$	$f_3 = \frac{3v_P}{2L}$
$n = 4$	$\lambda_4 = \frac{1}{2}L$	$f_4 = \frac{2v_P}{L}$
$n \ldots$	$\lambda_n = \frac{2}{n}L$	$f_n = n\frac{v_P}{2L}$

La frecuencia $f_1 = \frac{v_P}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{T/\mu}$ se denomina ***frecuencia fundamental***. En vibraciones sonoras f_1 da el ***tono*** del sonido, y corresponde a la frecuencia del sonido fundamental. Las demás frecuencias, f_2, f_3, ... corresponden a los sonidos ***armónicos*** sucesivos.

Cuando se pulsa, golpea o frota una cuerda sonora, se produce un sonido fundamental que lleva superpuestos diferentes armónicos; de las amplitudes de estos armónicos superpuestos depende el ***timbre*** del sonido emitido, cualidad sonora por la cual se puede distinguir un sonido procedente, por ejemplo, de un violín o de una flauta, ambos del mismo tono.

Nótese que la frecuencia fundamental de una cuerda vibrante es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, y depende de su tensión (τ) y de su densidad lineal de masa.

B.- APLICACIÓN: TUBOS SONOROS

Se da este nombre a tubos, generalmente cilíndricos, capaces de producir sonidos por entrar en vibración el aire que contienen. Esta vibración se origina por una corriente de aire que se envía por uno de sus extremos y que proviene de la boca del músico (flauta, ...), o de un fuelle (órgano, ...).

La fuente de vibraciones se sitúa en un extremo del tubo, llamado embocadura, donde se encuentra la lengüeta (si existe). En este extremo, (x = 0), se asienta un vientre (máxima vibración). Por ello, la función de onda (14) en este caso sí es adecuada para explicar el fenómeno.

La onda producida en x = 0 avanza hacia el otro extremo del tubo, se refleja en él y retorna superponiéndose a la de ida en cada punto.

En el extremo del tubo, x = L, se pueden dar dos casos:

+ extremo abierto: tubos sonoros abiertos.
+ extremo cerrado: tubos sonoros cerrados.

En los tubos abiertos, x = L es la posición de un vientre; por ello, $\mathcal{A}(L) = 2\,A\cos(kL) = \pm 2A$

En los tubos cerrados, x = L es la posición de un nodo; por tanto, $\mathcal{A}(L) = 2\,A\cos(kL) = 0$

a) Tubos abiertos: el extremo opuesto a la fuente es abierto; en él se asienta un vientre.

La condición $\mathcal{A}(L) = \pm 2A \Rightarrow \cos(kL) = \pm 1 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

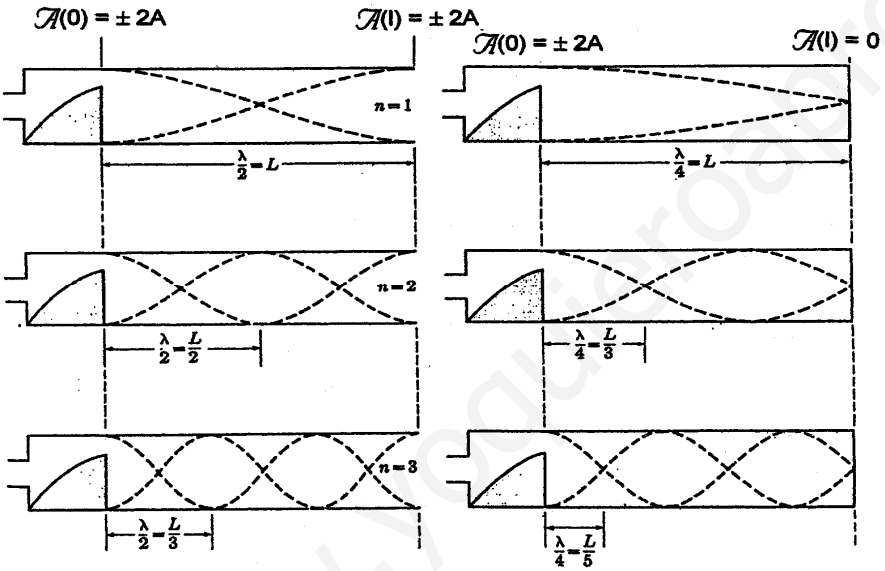
que son las longitudes de onda únicas que pueden asentarse en el tubo. Las frecuencias correspondientes son: $f_n = n\frac{v_P}{2L}$ (n = 0, 1, 2, ...)

donde v_P es la velocidad del sonido en el aire. Así pues:

+ Longitudes de onda: $2L \quad L \quad \frac{2}{3}L \quad \frac{1}{2}L \quad \frac{3}{5}L \quad ... \quad \frac{2}{n}L$

+ Frecuencia fundamental y armónicos:

$$\frac{v_P}{2L} \quad \frac{v_P}{L} \quad \frac{3v_P}{2L} \quad \frac{2v_P}{L} \quad \frac{5v_P}{2L} \quad ... \quad n\frac{v_P}{2L}$$



Ondas estacionarias en una columna de aire a) abierta (izq., tubo sonoro abierto) y b) cerrada (der., tubo sonoro cerrado) en un extremo.

Se verifica pues (leyes de Bernoulli, para los tubos sonoros abiertos):

+ La frecuencia del sonido fundamental es proporcional a la velocidad del sonido en el aire, e inversamente proporcional a la longitud del tubo.

+ La longitud de onda del sonido fundamental es igual al doble de la longitud del tubo.

+ Un tubo abierto puede emitir, además del sonido fundamental, la serie ***completa*** de todos sus armónicos.

b Tubos cerrados

En este caso, el extremo opuesto a la fuente vibrante es cerrado. En él se ha de situar, entonces, un nodo, mientras que en el extremo en el que se encuentra el vibrador se sitúa un vientre. Por consiguiente, $\mathcal{A}(0) = \pm 2A$ y $\mathcal{A}(L) = 0$. Esta última condición implica:

$$\cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{4L}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

son las longitudes de onda únicas que pueden asentarse en el tubo. Las frecuencias correspondientes son: $f_n = (2n+1)\frac{v_P}{4L}$ (n = 0, 1, 2, …)

+ Longitudes de onda: $4L \quad \frac{4}{3}L \quad \frac{4}{5}L \quad \frac{4}{7}L \quad \frac{4}{9}L \quad \ldots \quad \frac{4}{2n+1}L$

+ Frecuencia fundamental y armónicos:

$$\frac{v_P}{4L} \quad 3\frac{v_P}{4L} \quad 5\frac{v_P}{4L} \quad 7\frac{v_P}{4L} \quad 9\frac{v_P}{4L} \quad \ldots (2n+1)\frac{v_P}{4L}$$

Se verifica, pues (leyes de Bernoulli, para tubos sonoros cerrados):

+ La frecuencia del sonido fundamental es proporcional a la velocidad del sonido en el aire, e inversamente proporcional a la longitud del tubo.

+ La longitud de onda del sonido fundamental es cuatro veces la longitud del tubo.

+ Un tubo cerrado puede emitir, además del sonido fundamental, la serie de sus armónicos ***impares***.

+ El sonido fundamental de un tubo cerrado es la octava grave del que produce uno abierto de igual longitud.

www.yoquieroaprobar.es

5.- ONDAS EN EL ESPACIO: CONCEPTOS

Cuando una perturbación producida en un foco O se propaga en el espacio, lo hace en todas direcciones, en forma de ***ondas tridimensionales***.

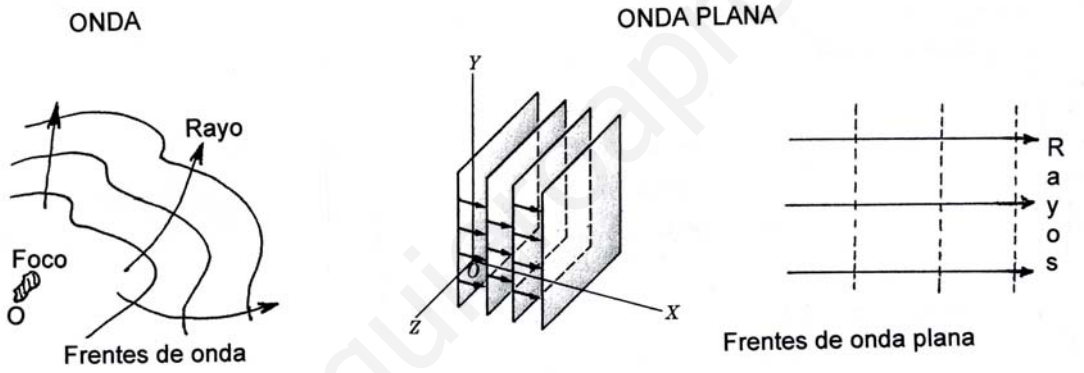
La función de onda, generalmente, deberá expresarse como una función de las coordenadas y del tiempo: F(x, y, z; t).

Frente de onda: Llamamos frente de onda de una onda, en el espacio, al conjunto de puntos alcanzados por la onda al mismo tiempo, y que en todo instante posterior se hallan en el mismo estado de perturbación.

Este conjunto de puntos generalmente se sitúa en una superficie, por lo que también se le denomina ***superficie de onda***.

Cuando la ***onda es armónica***, los puntos de una superficie de onda cualquiera se caracterizan por estar en fase. Dicho de otro modo, la fase de una onda en todos los puntos de un frente de onda presenta el mismo valor.

En adelante, sólo consideraremos ondas armónicas.

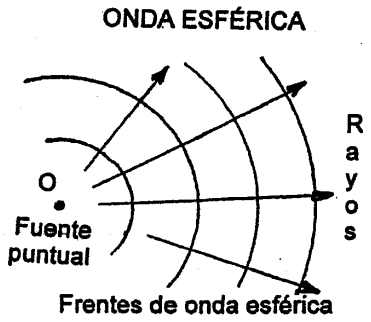


Ondas planas: Decimos que una onda es plana cuando sus frentes de onda son planos. La dirección perpendicular a los frentes de onda es la dirección de propagación de la misma. En los medios isótropos, a esta dirección se le denomina ***rayo***.

Aunque una onda plana es tridimensional, la función de onda correspondiente coincide con la asignada a una onda unidimensional en la dirección del rayo, si se toma esta dirección como un eje coordenado. Por ello, adoptando el rayo como dirección del eje X, resulta que la expresión:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

representa también una onda plana en el sentido del rayo.



Ondas esféricas: En un medio homogéneo, la perturbación producida en un punto (foco puntual) se propaga de modo que los frentes de onda son superficies esféricas, de centro en el foco. Por ello, las ondas se llaman ***ondas esféricas***.

Si además, la vibración del foco es armónica, los frentes de onda esféricos serán también armónicos, y las ondas se llaman ***ondas armónicas esféricas***. También en este caso las superficies de onda verifican que todos sus puntos están en fase, en todo instante.

6.- ENERGÍA DE UNA ONDA

A.- TRASMISIÓN DE LA ENERGÍA POR UNA ONDA

El movimiento ondulatorio no transporta materia. Transporta energía y momento lineal de unos puntos a otros. Nos ceñiremos exclusivamente al transporte de energía. Ésta puede ser mecánica o electromagnética, dependiendo de la naturaleza de la onda.

Cuando la perturbación ondulatoria alcanza una partícula, que inicialmente estaba en reposo, hace que comience a oscilar: la partícula se convierte en un oscilador (supongámoslo, armónico), adquiriendo una energía mecánica dada por $E_m = ½\, m_p\, v^2 + ½\, k\, y^2 = ½\, k\, A^2 = ½\, m_p\, v_{max}^2$, donde m_p es la masa de la partícula (Cf. UI-T3.9.b). Puesto que $v_{max} = \omega A = 2\pi f A$, resulta que la energía de cada oscilador es:

$$E_m = 2\pi^2 m_p f^2 A^2 \qquad (18)$$

Supongamos una onda plana que se propaga con velocidad v_P a la largo de la dirección X. Consideramos un volumen ΔV, como el de la figura, al que llega la onda:

$\Delta V = S.\Delta x$. (S = Área del rectángulo ABCD)

Sea N el número de partículas de dicho volumen.

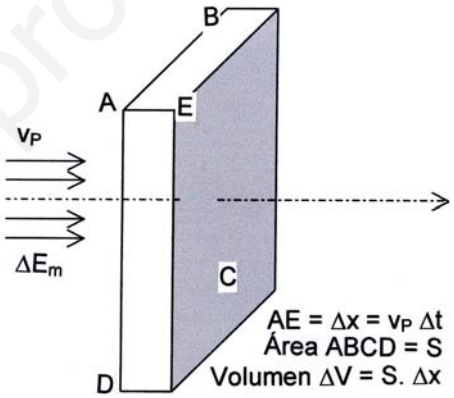
Su masa m será: $m = N\, m_P$

Si llamamos ρ a la densidad de dicho volumen, podemos escribir: $m = \rho\, \Delta V = \rho\, S\, \Delta x$

Podemos razonar así:

- inicialmente, la energía mecánica de las N partículas del volumen es nula, pues la onda no ha llegado aún.

- en un tiempo Δt, la onda se propaga una distancia $\Delta x = v_P\, \Delta t$, y alcanza a las N partículas del volumen; la onda les transfiere la energía necesaria para que oscilen:



$$\Delta E_m = N\, E_m = 2\pi^2 N\, m_p f^2 A^2 = 2\pi^2 m\, f^2 A^2 = 2\pi$$

- la potencia media transferida al volumen es, pues: $\overline{P} = \dfrac{\Delta E_m}{\Delta t} = 2\pi^2 \rho\, S\, v_P\, f^2 A^2$ (20)

y podemos observar que dicha potencia (energía por unidad de tiempo) es proporcional al <u>cuadrado</u> de dos magnitudes propias de la onda: de su <u>frecuencia</u> y de su <u>amplitud</u>.

Para caracterizar mejor la propagación de la energía de una onda se define la magnitud denominada ***<u>intensidad</u>*** de la onda en cada punto:

Intensidad de una onda en un punto es la energía que se trasmite, por unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie normal (perpendicular) a su dirección de propagación.

$$I = \frac{\text{Energía trasmitida}}{\text{Tiempo x Superficie normal}} = \frac{\Delta E_m}{\Delta t.S} = \frac{\overline{P}}{S}$$

La intensidad es por tanto una potencia por unidad de superficie. Por ello, la unidad de intensidad es vatios por metro cuadrado (W/m^2).

Según (20):

$$\boxed{I = 2\pi^2 \rho\, v_P\, f^2 A^2} \qquad (21)$$

que señala ***que la intensidad de una onda en cada punto es proporcional al cuadrado de su frecuencia y de su amplitud.***

B.- AMORTIGUACIÓN DE LAS ONDAS

Se llama amortiguación a la disminución de la intensidad de la misma a medida que se propaga. Pueden darse dos causas:

- la ***atenuación*** de la onda, debida a su expansión espacial, fenómeno que se da por razones puramente geométricas.

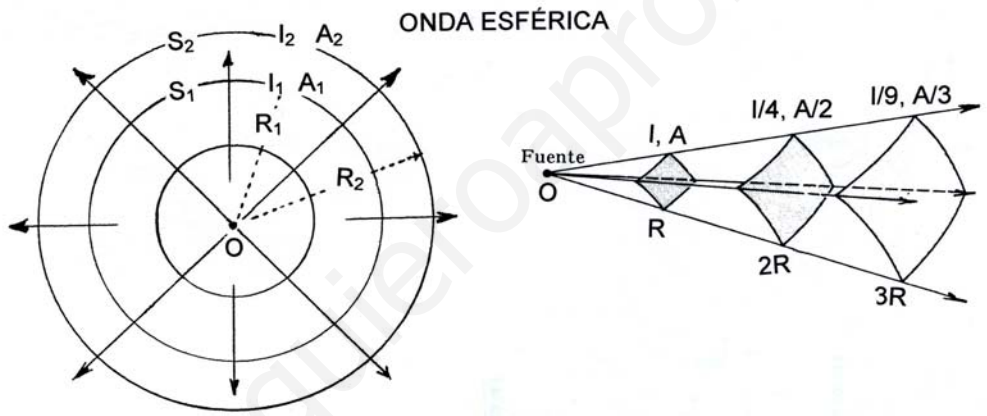
- la ***absorción*** de parte de la energía de la onda por el medio material en el que se propaga.

a) Atenuación

Se produce en las ondas al propagarse en todas direcciones, cuando sus superficies de onda son cerradas. En efecto, la energía que proporciona el foco o fuente de ondas ha de distribuirse cada vez en frentes de onda más grandes.

Consideremos, por ejemplo, una onda esférica. La energía propagada por un frente de onda esférico de radio R (y por tanto de área $4\pi R^2$), en un tiempo Δt, es:

$\Delta E_m = \overline{P}\,\Delta t = I\,S\,\Delta t = 4\pi R^2\,I\,\Delta t$ siendo I la intensidad de la onda en ese frente.



Si consideramos dos frentes consecutivos, de radios R_1 y R_2, intensidades I_1 e I_2, y amplitudes A_1 y A_2, respectivamente, la energía ΔE_m atraviesa sucesivamente ambos frentes de onda esféricos en el mismo tiempo Δt.

Por tanto: $\Delta E_m = 4\pi R_1^2\,I_1\,\Delta t = 4\pi R_2^2\,I_2\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2}$ (22)

⇒ ***La intensidad de la onda esférica decrece en relación inversa al cuadrado de la distancia al foco: $I :: 1/R^2$***

Como por otro lado, según (21), la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, también se verificará:

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}} \quad (23) \qquad \text{Por consiguiente, también:} \quad \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}} \quad (24)$$

⇒ ***La amplitud de una onda esférica decrece en relación inversa a su distancia al foco emisor: $A :: 1/R$***

b) Absorción

En general, los medios en los que se propagan las ondas son *disipativos o absorbentes*. Las ondas ceden, en su propagación, una parte de su energía al medio, que como consecuencia se calienta. La disminución de energía se traduce en un decrecimiento de la intensidad de la onda, y por ende, en un decrecimiento de su amplitud y un amortiguamiento de las oscilaciones de los puntos materiales a medida que es mayor la distancia al foco emisor.

Experimentalmente, se observa que la intensidad de las ondas planas disminuye exponencialmente con el espesor atravesado (*Ley de Lambert):*

$$\boxed{I = I_o e^{-\beta x}} \qquad (25)$$

donde I_o e I son las intensidades de la onda antes y después de atravesar un espesor x del material, caracterizado por su ***coeficiente de absorción β.*** Este coeficiente se mide en m^{-1}. Y depende también de la frecuencia de la onda. Por ejemplo, para el agua vale 0,08 m^{-1}.

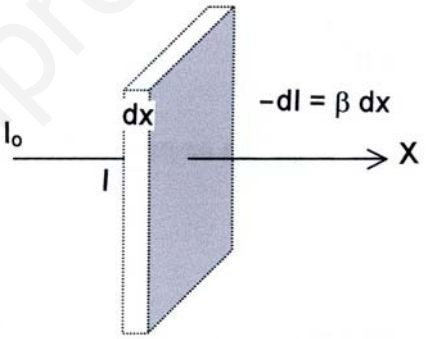
Podemos llegar a esta fórmula (25) así: La pérdida de intensidad $-dI$ de la onda al propagarse una distancia dx depende, proporcionalmente, del valor en cada punto de la intensidad I y del espesor dx recorrido (dato experimental). Sea β la constante de proporcionalidad, característica del medio absorbente; por tanto:

$$-dI = \beta\, I\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\beta . dx$$

Integrando: $\displaystyle\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\beta \int_0^x dx$

$$\Rightarrow \quad \ln I - \ln I_o = -\beta\, x \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\beta x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\beta x} \quad \Rightarrow \quad I = I_o e^{-\beta x}$$



En las ondas mecánicas, la absorción se atribuye al hecho de que los materiales no son perfectamente elásticos: parte de la energía es absorbida por el medio y transformada generalmente en calor. En las ondas electromagnéticas, la energía absorbida por los átomos y moléculas del material también se transforma en calor. La absorción produce una disminución de la intensidad y de la amplitud de las ondas pero no modifica su frecuencia.

Algunas de las múltiples aplicaciones prácticas de la absorción son:

+ *Sonorización* de las salas de audición (conferencias, cines, espectáculos, ...) La buena o mala audición del local viene determinada por sus condiciones acústicas. Al espectador le llega tanto el sonido directo como el reflejado, dependiendo éste de la absorción de las paredes, del techo y del suelo, la cual, a su vez, depende del material que los recubre (corcho, materiales porosos, ...).

+ *Análisis químico cualitativo*. La espectroscopía de absorción consiste en el reconocimiento de grupos funcionales y enlaces porque cada uno de ellos presenta máximos de absorción para frecuencias características (generalmente, en la zona del infrarrojo).

+ *Análisis químico cuantitativo*. La absorción que efectúa la disolución de una sustancia determinada depende de su concentración. Empíricamente se tiene que (*ley de Lambert y Beer*):

www.yoquieroaprobar.es

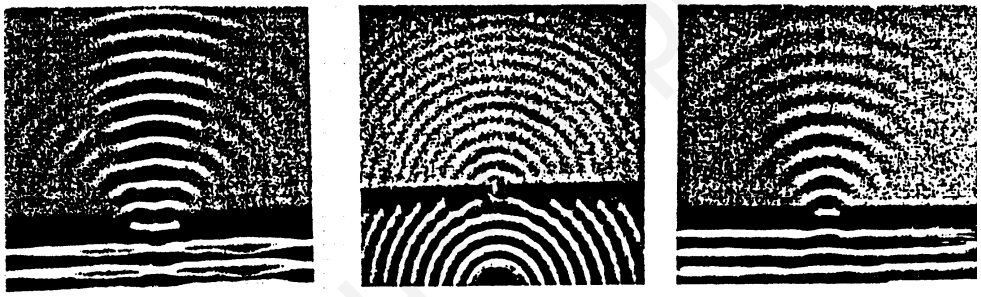
$$\ln(I_o / I) = \alpha L c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{\ln(I_0/I)}{\alpha L}$$

siendo I_o e I las intensidades (generalmente de luz visible o ultravioleta) antes y después de atravesar la cubeta de longitud L que contiene una disolución de concentración molar c y de constante de extinción α. El aparato diseñado a tal efecto *(espectrofotómetro)* permite establecer la concentración a partir de la variación de la intensidad.

7.- PRINCIPIO DE HUYGENS

Alrededor de 1680, el físico holandés Christian Huygens propuso un mecanismo simple para explicar la propagación de las ondas, tratando la perturbación de modo explícito, como "algo" que se traslada de unos puntos a otros. La idea de Huygens probablemente fue sugerida por el comportamiento de las ondas en el agua.

En concreto, se observa que cuando las ondas que avanzan alejándose del foco o fuente encuentran un obstáculo dotado de una abertura, ésta parece actuar exactamente como una fuente puntual, a partir de la cual se propagan ondas circulares. No importa cómo sean las ondas originales que llegan a la abertura: en todos los casos, tras ella, las ondas son circulares, de centro en dicha abertura. Véanse las imágenes fotográficas.

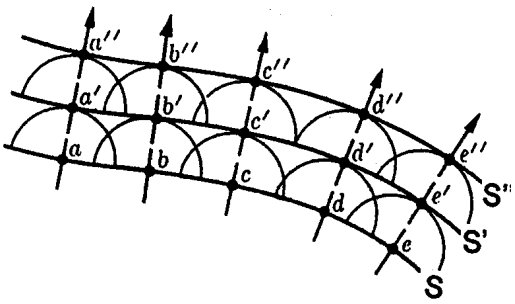


Esto es muy razonable, porque el efecto del obstáculo es suprimir toda la propagación de la perturbación original excepto la que se propaga a través de la abertura.

La observación experimental de éstos y otros fenómenos condujeron a Huygens a emitir el siguiente principio:

> ***"Un frente de ondas progresa como si cada uno de sus puntos emitiera ondas esféricas elementales, siendo la posición del frente de ondas en un instante posterior la envolvente de dichas ondas elementales."***

Expliquemos este enunciado. Consideremos una superficie de onda S (figura). Cuando el movimiento ondulatorio alcanza esta superficie, cada partícula a, b, c, ... de ella se constituye en una fuente de ondas, que emite ondas secundarias (indicadas por pequeñas semiesferas), que alcanzan la próxima capa de partículas del medio, a', b', c', ... Entonces, estas partículas inician el movimiento oscilatorio, formando la siguiente superficie de onda S''.



La superficie S' es tangente a todas las ondas secundarias debidas a a, b, c, ... de S (es la envolvente de ellas). El proceso se repite a partir de los puntos a', b', c', ... de S', resultando en definitiva la propagación de la onda a través del medio.

8.- ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS ONDAS

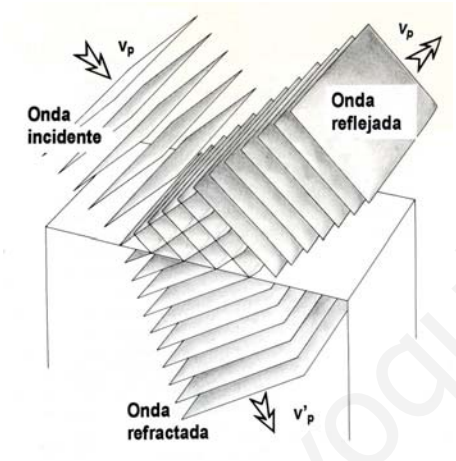
A continuación vamos a estudiar una serie de fenómenos ondulatorios que se explican de modo sencillo por aplicación del anterior Principio de Huygens: la reflexión y refracción de ondas al incidir sobre la superficie de separación de dos medios homogéneos diferentes; la interferencia de dos ondas que alcanzan un punto, superponiéndose en él; la difracción de una onda al encontrar en su propagación algún obstáculo.

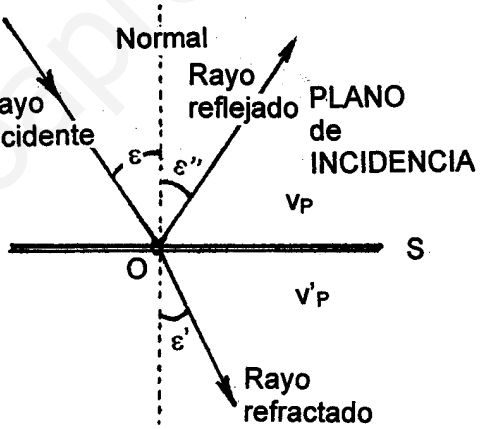
Veremos también, en lo que respecta a las ondas trasversales, la propiedad de polarización que poseen.

A.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Cuando una onda, que se propaga en un medio, incide en la superficie de separación con otro medio, experimenta en general un desdoblamiento en dos ondas:

+ una se trasmite al segundo medio: ***onda refractada*** o ***trasmitida***; es el fenómeno de ***refracción*** de la onda.
+ otra se refleja en la superficie, permaneciendo en el medio original, cambiando la dirección de propagación: ***onda reflejada***; es el fenómeno de ***reflexión*** de la onda.





Vamos a considerar una onda plana (***onda incidente***) que llega a la superficie (plana) S de separación de dos medios, que consideraremos homogéneos, siendo v_P y v'_P las velocidades de propagación de la onda en ambos medios, respectivamente.

Si tomamos un rayo en dicha onda (***rayo incidente***), llamemos ***normal*** a la perpendicular a la superficie S en el ***punto de incidencia*** O. El ángulo que este rayo incidente forma con la normal, ε, se llama ***ángulo de incidencia.*** En general, la onda, y el rayo, se desdoblan: la ***onda reflejada*** se propaga en la dirección del ***rayo reflejado*** (sea ε'' el ***ángulo de reflexión***, ángulo formado por la dirección del rayo reflejado con la normal), mientras que la ***onda trasmitida*** o ***refractada*** lo hace según la dirección del ***rayo refractado*** (llamemos ε' al ***ángulo de refracción***, ángulo formado por el rayo refractado y la normal).

Vamos a estudiar las leyes que rigen estos fenómenos.

Experimentalmente, ya en el siglo XVII se conocían estas leyes geométricas. Se las denominaba "***leyes de Descartes***". Están expresadas en términos de rayos (direcciones de propagación, en medios isótropos):

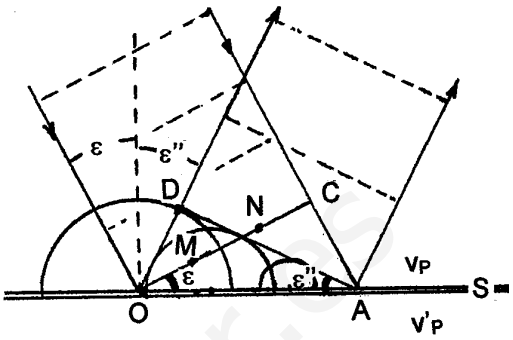
i) El rayo incidente, el reflejado, el refractado y la normal en el punto de incidencia están en el mismo plano, llamado ***plano de incidencia***.

ii) El ángulo de reflexión ε" es igual al ángulo de incidencia ε: $\varepsilon = \varepsilon''$

iii) Entre el ángulo de refracción ε' y el de incidencia ε se verifica: $\frac{\text{sen}\varepsilon}{\text{sen}\varepsilon'}$ = constante

Esta constante depende de ambos medios.

a) Explicación ondulatoria de la ley de la reflexión



La onda incidente alcanza en un instante dado a la superficie S en el punto O de su frente de onda plano OC. Según el principio de Huygens, este punto comienza a emitir ondas secundarias que se propagarán en ambos medios; prestemos nuestra atención a las que se propagan en el mismo medio.

Si es t el tiempo que tarda en recorrer la onda incidente la distancia CA, se verifica que CA = v_P t. En este tiempo, la onda secundaria que se inició en O da lugar a un frente de onda semiesférico, de radio OD = v_P t.

Otros puntos (por ejemplo, M y N) alcanzan posteriormente la superficie S y comienzan a emitir ondas secundarias más tarde que O; al cabo del tiempo t, los frentes de onda semiesféricos de estas ondas secundarias son de radios inferiores a v_P t, pero se sitúan de modo que la envolvente de todos ellos es el plano AD, nuevo frente plano de la onda reflejada.

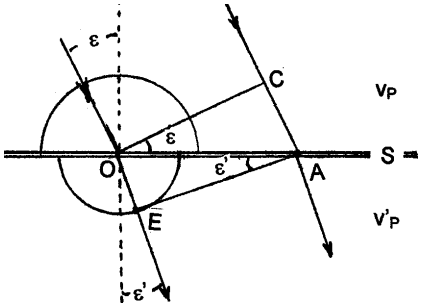
En la figura, consideremos los triángulos OCA y ODA: son iguales, pues son triángulos rectángulos con la hipotenusa OA común y un cateto igual, OD = CA = v_P t. Por tanto, sus ángulos correspondientes son iguales:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon''} \qquad (26)$$

b) Explicación ondulatoria de la ley de la refracción

En el segundo medio, el punto O, en el tiempo t, también ha emitido una onda secundaria cuyo frente de onda semiesférico tiene como radio OE = v'_P t. Otros puntos del frente de onda incidente OC alcanzarán posteriormente la superficie S y comenzarán a emitir en el segundo medio ondas secundarias cuyos frentes de onda semiesféricos se situarán de modo que el plano AE sea envolvente de todos ellos: este plano AE es el nuevo frente de onda de la onda refractada.

En los triángulos OCA y OEA se verifica:



$$\text{sen}\,\varepsilon = \frac{CA}{OA} = \frac{v_P t}{OA} \qquad \text{sen}\,\varepsilon' = \frac{OE}{OA} = \frac{v'_P\, t}{OA}$$

$$\boxed{\frac{\text{sen}\varepsilon}{\text{sen}\varepsilon'} = \frac{v_p}{v'_p}}$$

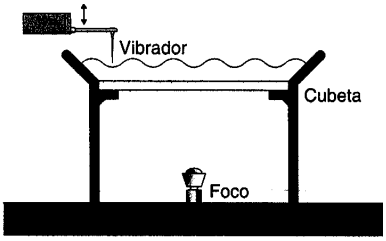
Añadiremos, sin demostrar, que en el proceso de refracción de la onda ***se conserva su frecuencia***. Por tanto, <u>no se conserva la longitud de onda</u>, verificándose:

$$\begin{cases} v_P = \lambda f \\ v'_P = \lambda' f \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{v_P}{v'_P} = \frac{\lambda}{\lambda'}} \qquad (28)$$

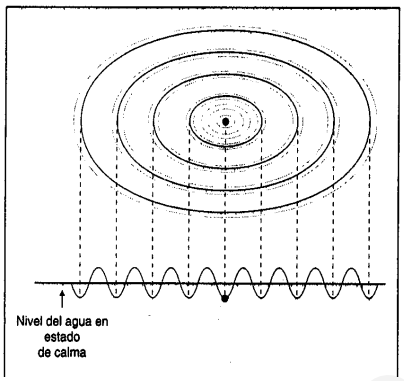
B.- INTERFERENCIAS

♦ Cuando una región del espacio es alcanzada por dos (o más) ondas de la misma naturaleza, decimos que en ella se produce el fenómeno de las interferencias: en cada punto y en cada instante, ambas ondas se superponen. O lo que es lo mismo, la perturbación en cada punto es igual a la suma de las perturbaciones que, individual e independientemente, originaría en dicho punto cada una de ellas (***principio de superposición de ondas***).

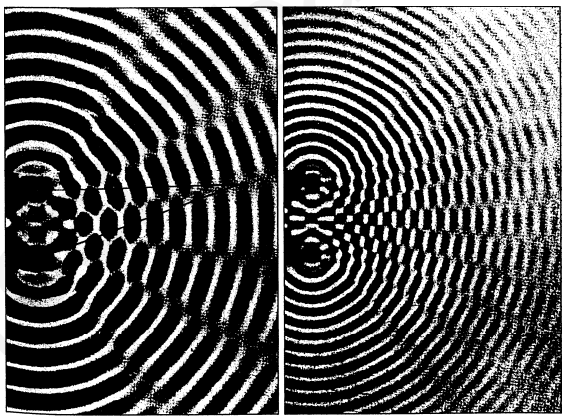
♦ En una cubeta de ondas (figura izquierda) se observan fácilmente las interferencias de dos movimientos ondulatorios de igual frecuencia y amplitud (figura derecha): los dos focos emisores vibran en fase; aparecen zonas en la que la perturbación resultante es menor (interferencia destructiva) y otras en la que es máxima (interferencia constructiva). Ambas fotografías difieren en que la frecuencia de la de la b) es mayor que la de a).



Cubeta de ondas.



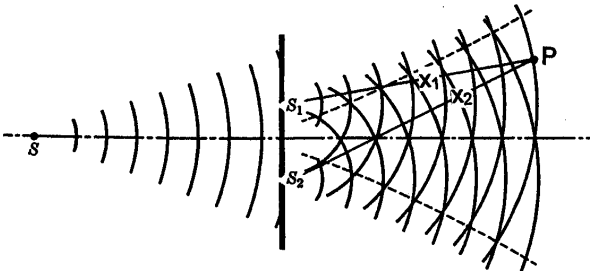
Representación de las ondas generadas en una cubeta de ondas



a) b)

♦ Supongamos dos ondas armónicas, de igual frecuencia f (igual frecuencia angular, $\omega = 2\pi f$), producidas por dos fuentes emisoras S_1 y S_2. Supongamos que ambas fuentes emiten con la misma intensidad, y que entre ellas existe una diferencia de fase δ (S_2 adelantada en δ respecto de S_1).

♦ En un punto P del espacio, ambas ondas interfieren con un desfase que también depende de las distancias recorridas por cada onda, desde sus fuentes hasta P: $x_1 = S_1P$ y $x_2 = S_2P$. Suponemos que x_1 y x_2 son valores próximos, de modo que las amplitudes de ambas ondas en P son prácticamente iguales (A_o), así como las intensidades (I_o).



♦ Podemos escribir las dos ondas en P así: $\begin{cases} y_1(x_1,t) = A_o \text{sen}(\omega t - kx_1) \\ y_2(x_2,t) = A_o \text{sen}(\omega t - kx_2 + \delta) \end{cases}$

♦ La diferencia de fase $\Delta\Phi$ en P entre ambas ondas en un instante t es:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t - kx_2 + \delta) - (\omega t - kx_1) = k(x_1 - x_2) + \delta$$

$$\boxed{\Delta\Phi = k(x_1 - x_2) + \delta} \qquad (29)$$

Se observa que este desfase tiene dos términos:

+ δ : desfase entre las dos fuentes S_1 y S_2. Si ambas fuentes están relacionadas entre sí en su emisión, puede ocurrir que <u>δ sea constante</u>: entonces se dice que ambas fuentes son coherentes, y las ondas son ***<u>ondas coherentes</u>***.

+ $k(x_1 - x_2)$: desfase que procede de la diferencia de caminos recorridos por las ondas, desde sus fuentes al punto P considerado.

El estado interferencial en P depende fundamentalmente de este desfase. Si $\Delta\Phi$ es constante, en P las ondas interfieren <u>en todo instante del mismo modo</u>: la interferencia es ***estable***. Pero ello ocurre sólo si δ es constante (***condición de coherencia***). Así lo supondremos en adelante; más aún, por abreviar el estudio, también supondremos que $\delta = 0$, es decir, que las fuentes emiten en fase.

♦ Entonces, vamos a ver cómo el resultado de la superposición de ambas ondas armónicas es una onda también armónica cuya amplitud depende del desfase.

$$y(x_1, x_2, t) = y_1(x_1, t) + y_2(x_2, t) = A_o \text{ sen}(\omega t - kx_1) + A_o \text{ sen}(\omega t - kx_2)$$

Recordemos la identidad trigonométrica: sen a + sen b = 2 sen½ (a + b).cos½(a – b)

Hagamos $\begin{cases} a = \omega t - kx_2 \\ b = \omega t - kx_1 \end{cases}$ Entonces $\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b) = \omega t - k\frac{x_1 + x_2}{2} = \omega t - kx_m \\ \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2) = \Delta\Phi/2 \end{cases}$

donde llamamos $x_m \equiv ½ (x_1 + x_2)$ a la distancia media de las fuentes al punto P.

Resulta así: $y(x_1, x_2, t) = 2 A_o \cos(½ \Delta\Phi).\ \text{sen}(\omega t - kx_m)$

O de otro modo: $\boxed{y(x_1, x_2, t) = \mathscr{A}\,\text{sen}(\omega t - kx_m) \quad \text{donde} \quad \mathscr{A} \equiv 2 A_o \cos(½ \Delta\Phi)}$ (30)

que representa una onda armónica cuya amplitud $\mathscr{A}$ depende en cada punto del desfase con el que llegan las ondas a él: $\Delta\Phi = k(x_1 - x_2)$.

♦ Puesto que la intensidad de cada onda en P, I_o, verifica: $I_o :: A_o^2$, y la intensidad de la onda resultante de la superposición, I, verifica: $I :: \mathscr{A}^2$ (recuérdese la expresión (21)), se tiene que

$$\boxed{I = 4\, I_o \cos^2(½ \Delta\Phi)} \qquad (31)$$

www.yoquieroaprobar.es

Esta expresión muestra que la intensidad I en P depende fundamentalmente del valor de la diferencia de fase $\Delta\Phi$ con la que ambas ondas llegan a dicho punto. La intensidad adquiere, según dicho valor $\Delta\Phi$, para ciertas posiciones, un valor máximo; para otras, un valor mínimo nulo.

a) Máximos de interferencia.

En aquellos puntos en los que $\cos^2(½\,\Delta\Phi) = 1$, las ondas interfieren con máxima intensidad, $I = 4\,I_o$, que es cuatro veces la de cada fuente individual. Estos puntos son aquéllos para los que:

$$½\,\Delta\Phi = n\,\pi \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\Phi = 2\,n\,\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

es decir, puntos en los que las ondas ***interfieren en fase***. Para ellos, veamos la diferencia de distancias desde las fuentes:

$$\Delta\Phi \equiv k(x_1 - x_2) = 2\,n\,\pi \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = \frac{2n\pi}{k} = \frac{2n\pi}{2\pi/\lambda} = n\lambda$$

o sea, la diferencia de distancias debe ser un número entero de longitudes de onda.

En resumen:

En un punto se da un máximo de intensidad cuando las ondas que interfieren en él lo hacen en fase; es decir, cuando la diferencia de distancia desde las fuentes al punto es un número entero de longitudes de onda. Entonces, la intensidad resultante en dicho punto es cuatro veces la aportada por cada fuente, si actuase sola.

Máximo: $I_{max} = 4\,I_o$	$\Delta\Phi = 2\,n\,\pi$	$x_1 - x_2 = n\,\lambda$	$(n = 0, 1, 2, \ldots)$	(32)

Estos fenómenos son especialmente importantes en ondas sonoras y luminosas:

Si las ondas son $\begin{cases}\text{sonoras}\\ \text{luminosas}\end{cases}$ en un punto habrá $\begin{cases}\text{máximo volumen sonoro}\\ \text{intensidad máxima de luz}\end{cases}$ cuando la diferencia de distancias de las fuentes $\begin{cases}\text{sonoras}\\ \text{luminosas}\end{cases}$ al punto sea un número entero de longitudes de onda.

b) Mínimos de interferencia.

En aquellos puntos en los que $\cos^2(½\,\Delta\Phi) = 0$, las ondas interfieren dando un mínimo de intensidad nula, $I = 0$. Estos puntos son aquéllos para los que:

$$½\,\Delta\Phi = (2\,n + 1)\pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\Phi = (2\,n + 1)\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

es decir, puntos en los que las ondas ***interfieren en oposición de fase***. Para ellos, veamos la diferencia de distancias desde las fuentes:

$$\Delta\Phi \equiv k(x_1 - x_2) = (2\,n + 1)\pi \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2\pi/\lambda} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

o sea, la diferencia de distancias debe ser un número impar de semilongitudes de onda.

En resumen:

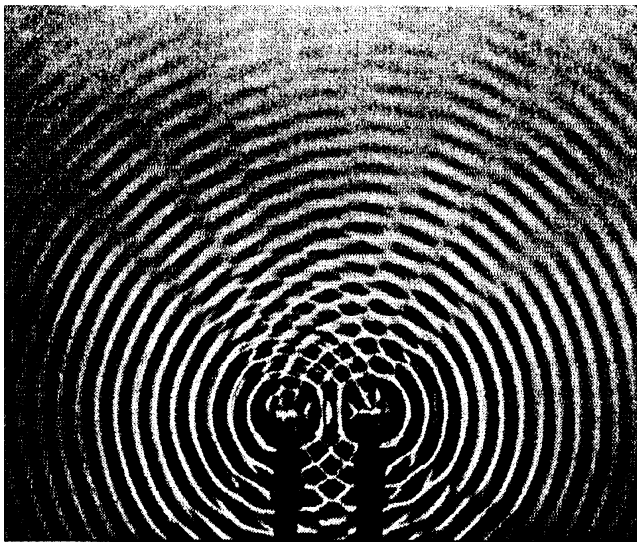
En un punto se da un mínimo de intensidad cuando las ondas que interfieren en él lo hacen en oposición de fase; es decir, cuando la diferencia de distancia desde las fuentes al punto es un número impar de semilongitudes de onda. Entonces, la intensidad resultante en dicho punto es nula.

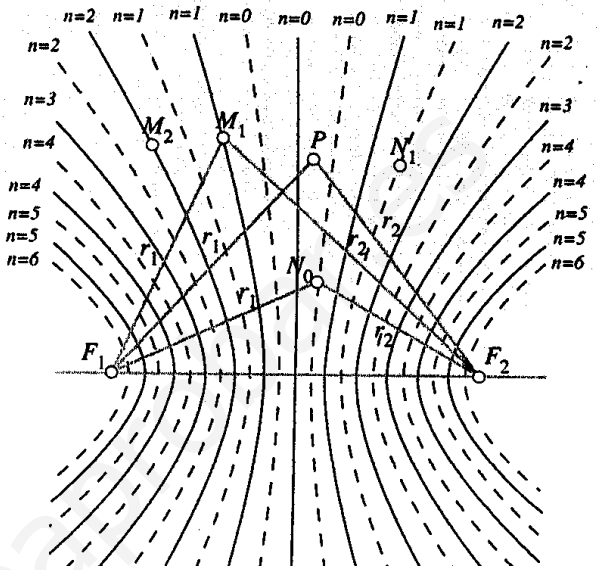
Mínimo: $I_{min} = 0$	$\Delta\Phi = (2\,n + 1)\pi$	$x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$	$(n = 0, 1, 2, \ldots)$	(33)

www.yoquieroaprobar.es

En ondas sonoras y luminosas:

Si las ondas son $\begin{cases} \text{sonoras} \\ \text{luminosas} \end{cases}$ en un punto $\begin{cases} \text{no habrá sonido} \\ \text{habrá oscuridad} \end{cases}$ cuando la diferencia de distancias de las fuentes $\begin{cases} \text{sonoras} \\ \text{luminosas} \end{cases}$ al punto sea un número impar de semilongitudes de onda.





♦ Desde el punto de vista energético, el fenómeno interferencial supone una redistribución de la energía transportada por las ondas. Ésta se ubica en ciertos puntos del espacio con valores máximos, reduciéndose en otros a valores mínimos, según sus posiciones relativas a las fuentes emisoras.

♦ Este breve estudio de las interferencias no es general. Se ha supuesto que:

+ las dos fuentes coherentes emiten con igual amplitud, A_0 , e igual intensidad, I_0
+ ambas fuentes emiten en fase, $\delta = 0$
+ Las distancias de las fuentes al punto genérico P, x_1 y x_2, no son muy diferentes ni muy grandes, para que las amplitudes de las ondas en P hayan variado sensiblemente.

<u>Un caso más general</u> contempla las <u>ondas coherentes</u>, de igual frecuencia, llegan a P con amplitudes diferentes:

$$\begin{cases} y_1(x_1,t) = A_1 \text{sen}(\omega t - kx_1) \\ y_2(x_2,t) = A_2 \text{sen}(\omega t - kx_2 + \delta) \end{cases}$$

La diferencia de fase sigue siendo

$$\Delta\Phi = k(x_1 - x_2) + \delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \delta \qquad (29')$$

llamando $\Delta x = x_2 - x_1$ a la diferencia de recorridos y siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ el nº de onda.

Entonces, la onda resultante, de amplitud $\mathscr{A}$, es:

$$y(x_1, x_2, t) = \mathscr{A}\,\text{sen}(\omega t - k x_m) \quad \text{donde} \quad \mathscr{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\Delta\Phi) \qquad (30')$$

Puesto que la intensidad de la 1ª onda en P, I_1, verifica: $I_1 :: A_1^2$, y la intensidad de la 2ª onda verifica: $I_1 :: A_1^2$, así como la onda resultante de la superposición, I, verifica: $I :: \mathscr{A}^2$ (recuérdese la expresión (21)), se tiene que

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\Phi)} \qquad (31)$$

Esta expresión (30') muestra que la intensidad I en P depende fundamentalmente del valor de la diferencia de fase $\Delta\Phi$ con la que ambas ondas llegan a dicho punto. La intensidad adquiere, según dicho valor de $\Delta\Phi$, para ciertas posiciones, un valor máximo; para otras, un valor mínimo no siempre nulo.

a) <u>Máximos de interferencia.</u>

. En aquellos puntos en los que $\cos(\Delta\Phi) = +1$, las ondas interfieren con máxima intensidad,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

. Estos puntos son aquéllos para los que:

$$\Delta\Phi = 2n\,\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

es decir, puntos en los que las ondas ***<u>interfieren en fase</u>***. Para ellos, veamos la diferencia de distancias desde las fuentes:

$$\Delta\Phi \equiv k(x_1 - x_2) + \delta = \Rightarrow 2\,n\,\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a) <u>Mínimos de interferencia.</u>

. En aquellos puntos en los que $\cos(\Delta\Phi) = -1$, las ondas interfieren con mínima intensidad,

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

. Estos puntos son aquéllos para los que:

$$\Delta\Phi = (2n+1)\,\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

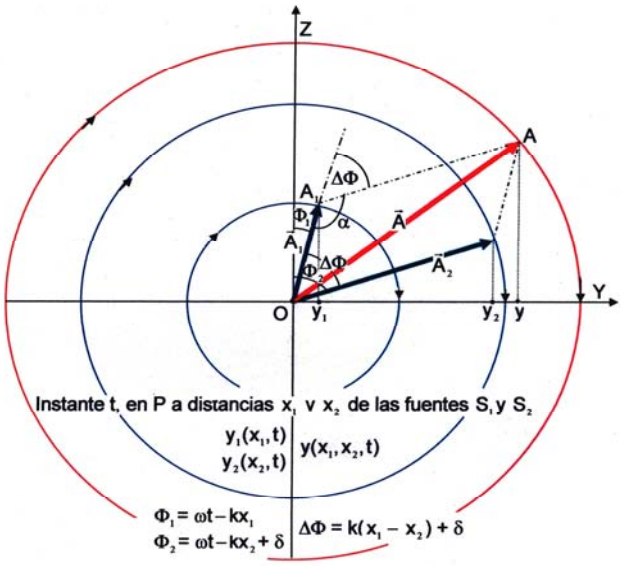
es decir, puntos en los que las ondas ***<u>interfieren en oposición de fase</u>***. Para ellos, veamos la diferencia de distancias desde las fuentes:

$$\Delta\Phi \equiv k(x_1 - x_2) + \delta = (2\,n+1)\,\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

A este mismo resultado se llega utilizando la <u>representación fasorial</u> en la obtención de la relación (30'):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1 A_2 \cos(\Delta\Phi)$$

Se puede seguir la figura adjunta, aplicar la ley del coseno al triángulo O A_1 A, teniendo en cuenta que $\alpha + \Delta\Phi = \pi \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\Delta\Phi$, de modo análogo al desarrollo realizado en UII.-T.5 nº3



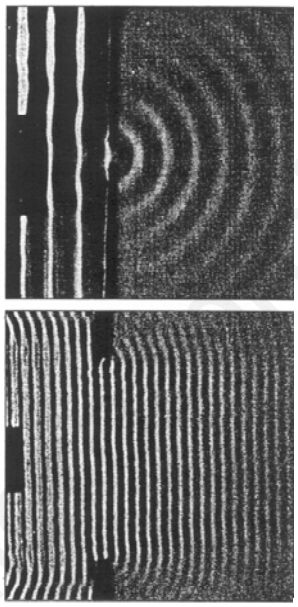
www.yoquieroaprobar.es

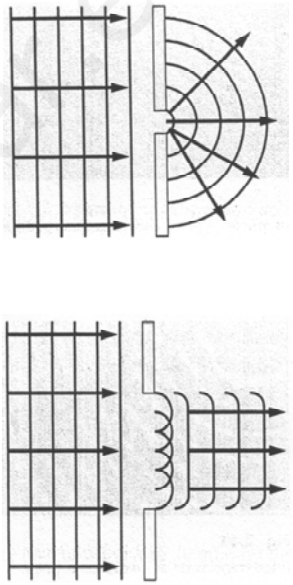
C.- DIFRACCIÓN

Si una onda que se propaga encuentra en su avance un obstáculo, se observa que la onda es capaz de bordearlo, propagándose detrás de él. Si en vez de un obstáculo, halla un orificio, la onda es capaz de pasar a través de él.

Sin embargo, la forma de la onda tras el obstáculo o tras el orificio difiere considerablemente de la incidente, y tanto más cuando las dimensiones del obstáculo o del orificio son comparables a la longitud de onda.

A este fenómeno se le denomina ***difracción***, y tiene lugar siempre que el frente de onda se ve obstaculizado en su propagación, de modo que no todos sus puntos pueden constituirse en centros emisores de ondas secundarias (aplicando el modelo de Huygens), a causa del obstáculo supresor.





Las fotografías muestran la difracción de ondas planas, en una cubeta de ondas. Las ondas planas (que provienen de la izquierda) son difractadas por la abertura que encuentran en su camino. De todos los puntos del frente de onda incidente sólo pueden ser centros de emisión secundaria los que se encuentran en la rendija; los demás son obstaculizados para emitir. La relación entre la longitud de onda y el tamaño de la abertura determina la forma del nuevo frente de onda difractado. Nótese cómo cuanto más pequeña es esta abertura, mayor es el efecto de difracción (compárense ambas fotografías).

Las ondas de radio tienen longitudes de onda muy grandes: las de la banda estándar (onda media, OM o AM) abarcan de 180 hasta 6000 metros, lo que les permite superar con facilidad los objetos que podrían perturbar su propagación (edificios, montañas, etc.). En cambio, la banda de FM (frecuencia modulada) comprende valores de λ entre 2,7 y 3,7 metros; este hecho es una de las razones por la que, a menudo, la recepción de FM es deficiente en lugares en los que la de AM se capta de forma intensa y clara. Asimismo, la falta de difracción de las ondas de televisión (λ entre 0,1 y 10 m) por los obstáculos urbanos o geográficos explica que sea preciso instalar equipos de repetición de estas ondas (y en lugares elevados).

También la difracción es el motivo por el que no se puede ver lo que sucede detrás de una esquina (la luz tiene λ muy pequeñas, del orden de $5x10^{-7}$ m) pero sí oírse (difracción del sonido).

D.- POLARIZACIÓN

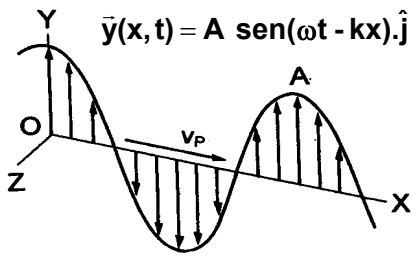
Otro fenómeno ondulatorio de gran importancia es la ***polarización***. *Es exclusivo de las ondas transversales.* Carece de sentido para ondas longitudinales.

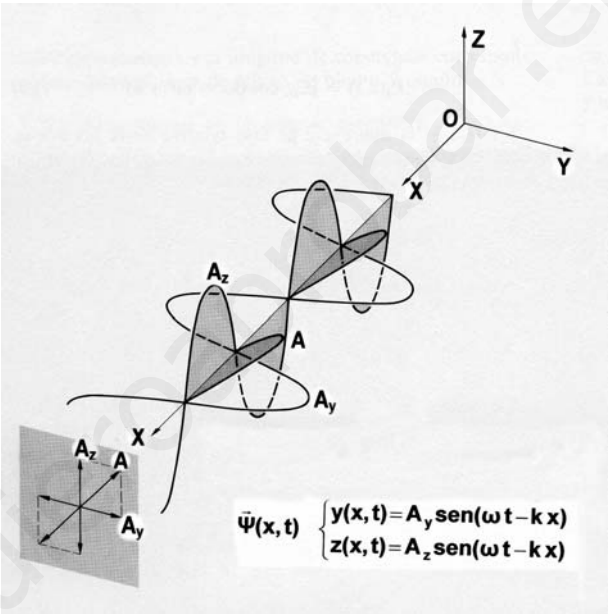
En las ondas transversales las partículas vibran siempre perpendicularmente a la dirección de propagación. Se puede asociar a cada partícula que vibra un vector, de origen en su centro de

oscilación y extremo en la propia partícula. El plano determinado por este vector y la dirección de propagación se denomina ***plano de polarización*** de la onda. Este plano, en algunos casos es constante: cuando la partícula se mueve con un MAS, y el extremo del vector asociado a ella describe una recta (ondas linealmente polarizadas, OLP). Pero en el caso general, la partícula (o sea, el extremo del vector asociado) describe una trayectoria, que en el plano perpendicular a la dirección de propagación puede ser, en otras ocasiones, una circunferencia (ondas circularmente polarizadas, OCP) o una elipse (ondas elípticamente polarizadas, OEP). Veamos sucintamente estos casos.

1.- Ondas linealmente polarizadas (OLP).- Si la vibración se opera siempre en la misma recta el vector está situado siempre en la misma dirección. El plano de polarización se mantiene constante. Se dice entonces que la onda está *linealmente polarizada*.

Ejemplos: Perfiles de onda, en un instante dado.





+ Figura izquierda de la página anterior. Una onda trasversal linealmente polarizada, cuyo plano de polarización es el plano XY, propagándose según el eje X, se escribe así:

$$\vec{y}(x,t) = \vec{A}.sen(\omega t - kx) = A.sen(\omega t - kx)\hat{j}$$

+ Figura derecha de la página anterior. Una onda trasversal linealmente polarizada según otro plano de polarización, propagándose en la dirección del eje X, se escribe así:

$$\vec{\Psi}(x,t) = \vec{A}.sen(\omega t - kx)$$

Puede descomponerse en dos ondas componentes cuyos planos de polarización son los planos XY y XZ, así:

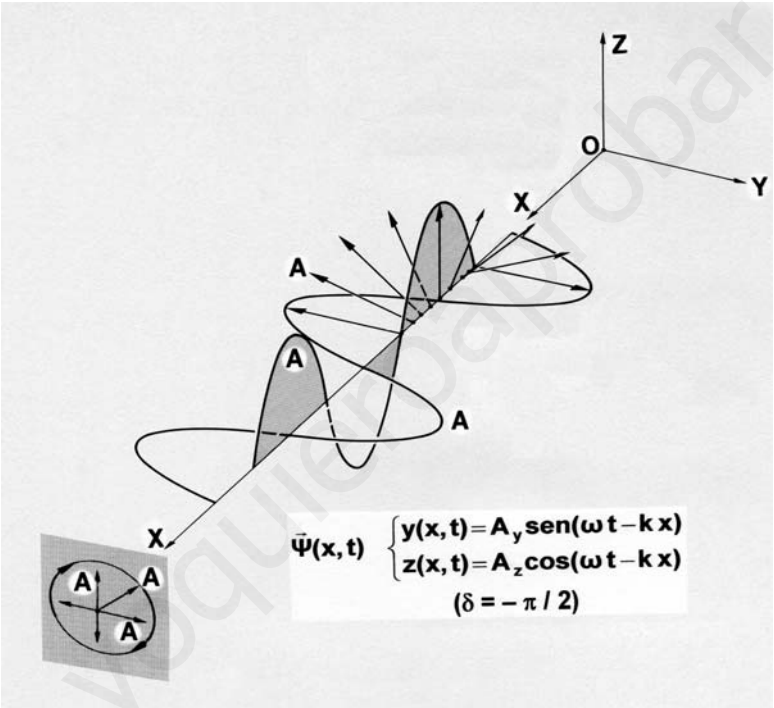
$$\vec{\Psi}(x,t) = y(x,t).\hat{j} + z(x,t).\hat{k} = A_y.sen(\omega t - kx).\hat{j} + A_z.sen(\omega t - kx).\hat{k}$$

donde, evidentemente, $\vec{A} = A_y.\hat{j} + A_z.\hat{k}$, o sea, $A = \sqrt{A_y^2 + A_z^2}$.

Las ondas $\begin{cases} y(x,t) = A_y.\text{sen}(\omega t - kx) \\ z(x,t) = A_z.\text{sen}(\omega t - kx) \end{cases}$ se denominan, precisamente, ondas componentes de la OLP inicial, $\vec{\Psi}(x,t)$.

Una OLP puede atravesar una rendija colocada paralelamente a su dirección de vibración sin experimentar cambio alguno; pero si la rendija se coloca oblicuamente, actuará como filtro, permitiendo el paso exclusivamente de la componente según esa dirección de la rendija; y anularía incluso la onda si rendija y vibración son perpendiculares entre sí.

2.- Ondas circularmente polarizadas (OCP).- Si las componentes de una onda trasversal $\vec{\Psi}(x,t)$, son de igual amplitud, $A_y = A_z \equiv A$, y además están desfasadas en $\pm\pi/2$, decimos que dicha onda $\vec{\Psi}(x,t)$ es una onda *circularmente polarizada*. Las partículas vibrantes giran propiamente describiendo trayectorias circulares de radio igual a la amplitud A



.
En efecto, las componentes se escriben:

$$\begin{cases} y(x,t) = A.\text{sen}(\omega t - kx) \\ z(x,t) = A.\text{sen}(\omega t - kx \pm \pi/2) \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} y(x,t) = A.\text{sen}(\omega t - kx) \\ z(x,t) = \pm A.\cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Se puede obtener la trayectoria de la partícula vibrante eliminando las variables x y t en el anterior sistema, cosa que podemos conseguir elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas a continuación, con lo que resulta:

$$y^2 + z^2 = A^2 \quad \text{(ecuación de la circunferencia en el plano YZ)}$$

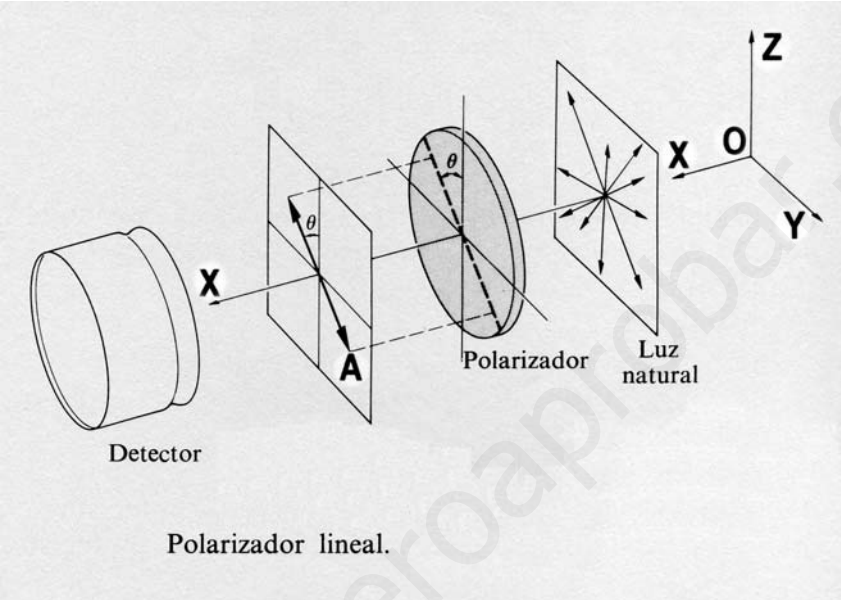
3.- Ondas elípticamente polarizadas (OEP).- Se dan cuando las componentes de la onda $\vec{\Psi}(x,t)$ presentan un desfase δ distinto de 0, $\pm\pi$, $\pm\pi/2$, tengan o no iguales las amplitudes A_y y A_z. Asimismo, si $\delta = \pm\pi/2$ y $A_y \neq A_z$

Entonces, en general $\vec{\Psi}(x,t)$ $\begin{cases} y(x,t) = A_y.\text{sen}(\omega t - kx) \\ z(x,t) = A_z.\text{sen}(\omega t - kx + \delta) \end{cases}$

En estos casos, las partículas vibrantes describen trayectorias elípticas en planos perpendiculares a la dirección de propagación.

4.- Se dice que las ondas están ***no polarizadas*** cuando son igualmente posibles todas las direcciones de vibración de las partículas del medio, a lo largo del tiempo.

Los ***polarizadores*** son dispositivos que al interceptar ondas no polarizadas, tras ellos la onda emergente es una OLP. La rendija del comentario anterior es un simple polarizador. En la figura inferior, luz natural (es decir, luz no polarizada) incide sobre un polarizador. Éste sólo permite el paso de las componentes de luz según su dirección de polarización (ángulo θ respecto del eje Z)



Polarizador lineal.

La polarización tiene gran importancia en el caso de la luz, debido a sus múltiples y valiosas aplicaciones (Cf.: U III,T 10, 3).

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un oscilador de 2 Hz de frecuencia actúa en el extremo de una piscina. Un observador se da cuenta que la perturbación tarda 20 s en recorrer los 10 m que hay hasta el otro extremo, donde un corcho se eleva 5 cm por encima de su posición de equilibrio. ¿Cuál es la expresión matemática que describe este movimiento?

Hay que determinar en $y(x, t) = A\ sen(\omega t - kx + \varphi_o)$ las constantes A, ω, k y φ_o.

La amplitud es A = 5 cm = 0,05 m

La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rd/s

La velocidad de propagación es $v_P = 10/20 = 0,5$ m/s

La longitud de onda es $\lambda = v_p/f = 0,5/2 = 0,25$ m

El número de onda es $k = 2\pi/\lambda = 8\pi$ rd/m

El ángulo de fase φ_o puede tomarse nulo; no hay datos que fijen su valor.

$\Rightarrow$ ***$y(x, t) = 0,05\ sen4\pi(t - 2x)$***

2.- La ecuación de una onda que se propaga a lo largo de una cuerda es en unidades del S.I.: $y(x, t) = 0.05\ cos2\pi(4t-2x)$

a) Determina las expresiones de la velocidad v(x, t) y de la aceleración a(x, t) trasversal de un elemento de cuerda.

b) Determina las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración de un punto situado a 1 m del origen y sus valores máximos.

c) Calcula la elongación, velocidad y aceleración del citado punto en el instante t = 3 s.

d) Idem, en x = 0'7 m y t = 0'2 s

Según la ecuación de la onda, A = 0,05 m; $\omega = 8\pi$ rd/s, T = 0,25 s, f = 4 Hz; $k = 4\pi$ rd/m, $\lambda = 0,5$ m, $v_P = 2$ m/s.

a) Velocidad trasversal: $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=const} = -0,05.8\pi.sen2\pi(4t-2x) =$ ***$-0,4\pi.sen2\pi(4t-2x)$***

Aceleración trasversal: $a(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{x=const} = -0,4\pi.8\pi.cos2\pi(4t-2x) =$ ***$-3,2\pi^2.cos2\pi(4t-2x)$***

b) Elongación en x = 1 m: $y(1, t) = 0,05.cos2\pi(4t -2) = 0,05.cos(8\pi t - 4\pi) =$ ***$0'05.cos(8\pi t)$***

Valor máximo, la amplitud, $y_{max} = A =$ ***0'05 m***

Velocidad en x = 1 m: $v(1, t) = -0,4\pi.sen(8\pi t) =$ ***$-1'257.sen(8\pi t)$***

Valor máximo, $v_{max} = \omega A =$ ***1,257 m/s***

Aceleración en x = 1m: $a(1, t) = -3,2\pi^2.cos(8\pi t) =$ ***$-31'58.cos(8\pi t)$***

Valor máximo, $a_{max} = \omega^2 A =$ ***31'58 m/s²***

c) Elongación en x = 1 m en el instante t = 3 s: $y(1, 3) = 0,05.cos(24\pi) =$ ***0.05 m***

Velocidad en x = 1 m en el instante t = 3 s: $v(1, 3) = -1,257.sen(24\pi) =$ ***0 m/s***

Aceleración en x = 1 m en el instante t = 3 s: $a(1, 3) = -31,58.cos(24\pi) =$ ***-31.58 m/s²***

En x = 1 m en el instante t = 3 s, el punto en vibración se encuentra en el extremo positivo de la vibración, la velocidad es nula y la aceleración es máxima estando dirigida hacia el centro de vibración.

d) En x = 0'7 m en el instante t = 0'2 s:

Elongación $y(0'7; 0'2) = 0'05.cos(216º) =$ ***–0'04 m***

Velocidad $v(0'7; 0'2) = –0'4\ \pi\ sen(216º) =$ ***0'74 m/s***

Aceleración $a(0'7; 0'2) = –3'2\ \pi^2\ cos(216º) =$ ***25'5 m/s²***

www.yoquieroaprobar.es

En x = 0'7 m en el instante t = 0'2s, el punto en vibración se encuentra 4 cm a la izquierda del centro de la vibración, la velocidad es 0'74 m/s hacia la derecha y la aceleración es 25'5 m/s^2 estando dirigida hacia el centro de vibración, es decir hacia la derecha.

3.- Un foco sonoro emite ondas de 400 Hz de frecuencia y 0,1 pascal de amplitud. Si la onda se propaga a lo largo del sentido positivo del eje X a 340 m/s de velocidad, y en el instante inicial hay un máximo de presión en el foco, determina: a) la ecuación que describe la vibración del foco. b) la ecuación que describe la onda. c) la presión en un punto situado a 1,7 m del foco en el instante t = 2,5 s.

Como en el instante inicial la presión en el foco (x = 0) es máxima, utilizamos la función coseno en la descripción. Las constantes del movimiento son:
A = 0,1 Pa; f = 400 Hz, T = 2,5x10^{-3} s, $\omega = 2\pi f = 800\pi$ rd/s; v_P = 340 m/s, $\lambda = v_P\,T$ = 0,85 m, $k = 2\pi/\lambda = (40/17)\pi$ rd/m.

a) Ecuación que describe la vibración del foco: ***y(t) = 0,1.cos(800πt) Pa.***
b) Ecuación que describe la onda: y(x, t) = 0,1.cos(800πt – 40/17)πx) = ***0,1.cos40π(20t – x/17) Pa***
c) Presión en el punto dado x = 1,7 m en el instante t = 2,5 s:

$$y(1{,}7;\ 2{,}5) = 0{,}1.\ \cos 40\pi(20\ .\ 2{,}5\ - 1{,}7/17) = 0{,}1.\cos(1996\pi) = \mathbf{0{,}1\ Pa.}$$

4.-La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda, expresadas en unidades del S.I., es:

$$y(x,\ t) = 0{,}06\ \cos 2\pi(\ 4t - 2x)\ \text{metros}$$

Se pide:
a) Amplitud, periodo, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula cualquiera de la cuerda entre los instantes t_1 = 0 s, t_2 = 0,5 s y t_3 = 0,625 s.
c) Diferencia de fase entre los estados de vibración en un instante cualquiera para las partículas de la cuerda situadas en las posiciones x_1 = 0 m, x_2 = 1 m y x_3 = 1,25 m.

a) A = ***6 cm***; T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} =$ ***0'25 s***, f = $\frac{1}{T} =$ ***4 Hz***; $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} =$ ***0'5 m***, $v_P = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}5}{0{,}25} =$ ***2 m/s***

b) $\Delta\Phi = (\omega t_2 - kx + \varphi_o) - (\omega t_1 - kx + \varphi_o) = \omega(t_2 - t_1) \rightarrow \Delta\Phi = \omega(t_2 - t_1) = 8\pi(\ 0{,}5 - 0) =$ ***4π rd.***
$\Delta\Phi = (\omega t_3 - kx + \varphi_o) - (\omega t_1 - kx + \varphi_o) = \omega(t_3 - t_1) \rightarrow \Delta\Phi = \omega(t_3 - t_1) = 8\pi(\ 0{,}625 - 0) =$ ***5π rd***.
$\Delta\Phi = (\omega t_3 - kx + \varphi_o) - (\omega t_2 - kx + \varphi_o) = \omega(t_3 - t_2) \rightarrow \Delta\Phi = \omega(t_3 - t_2) = 8\pi(\ 0{,}625 - 0{,}5) =$ ***π rd***.
Así pues, los estados vibratorios 1º y 2º están en fase; los 1º y 3º en oposición de fase; y los 2º y 3º también en oposición de fase.

c) $\Delta\Phi = (\omega t - kx_1 + \varphi_o) - (\omega t - kx_2 + \varphi_o) = k(x_2 - x_1) \rightarrow \Delta\Phi = k(x_2 - x_1) = 4\pi(1 - 0) =$ ***4π rd***
$\Delta\Phi = (\omega t - kx_1 + \varphi_o) - (\omega t - kx_3 + \varphi_o) = k(x_3 - x_1) \rightarrow \Delta\Phi = k(x_3 - x_1) = 4\pi(1{,}25 - 0) =$ ***5π rd***
$\Delta\Phi = (\omega t - kx_2 + \varphi_o) - (\omega t - kx_3 + \varphi_o) = k(x_3 - x_2) \rightarrow \Delta\Phi = k(x_3 - x_2) = 4\pi(1{,}25 - 1) =$ ***π rd***
Así pues, en cualquier instante los estados de vibración de las partículas 1ª y 2ª están en fase; los de la 1ª y 3ª en oposición, y asimismo los de las partículas 2ª y 3ª.

5.- Un oscilador vibra con una frecuencia de 500 Hz y genera ondas que se propagan con una velocidad de 350 m/s. Determina:
a) La separación de dos puntos consecutivos que vibren con una diferencia de fase de 60º.
b) El intervalo de tiempo que transcurre entre dos estados de vibración consecutivos de un punto con una diferencia de fase de 180º.- Idem, de 127º.

c) Diferencia de fase en un instante dado entre dos puntos separados por una distancia de 3,15 m.- Idem, 2.18 m.

f = 500 Hz, T = 2 ms, ω = 1000π rd/s; v_P = 350 m/s, $\lambda = v_P T$ = 0,7 m, k = $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{20}{7}\pi$ rd/m

a) $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \;\wedge\; \Delta\Phi = 60º = \frac{\pi}{3}$ rd $\Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}\lambda = \frac{\pi}{3.2\pi}.0{,}7 =$ ***0,117 m***

b) Elemental: si la diferencia de fase es 180º, el intervalo de tiempo es la mitad del periodo, es decir Δt = ***1 ms.***

$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \;\wedge\; \Delta\Phi = 127º = 0{,}706\pi$ rd $\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}T$ = ***706 μs***

c) $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0{,}7}3{,}15$ = 28,2743 rd = 9π rd = π rd = ***180º***

$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0{,}7}2{,}18$ = 6,23π rd = 0,23π rd = 41,1429º = ***41º 8' 34''***

6.- La frecuencia de un movimiento ondulatorio es de 50 ciclos por segundo y su longitud de onda 2 metros. Se sabe que en t = 0 la elongación de un punto a 1,7 metros del origen vale – 0,5 metros y su velocidad – 17 m/s. Especificar la función de onda, calculando sus constantes.

f = 50 Hz, $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rd/s; λ = 2 m, k = $\frac{2\pi}{\lambda} = \pi$ rd/m

La función de onda general es: y(x, t) = A sen(ωt – kx + φ_o). Hay que determinar aún A y φ_o.
y(1'7, 0) = - 0'5 = A sen(-1'7π + φ_o) = A sen ϕ_o llamando $\phi_o \equiv$ -1'7π + φ_o
v(1'7, 0) = - 17 = ωA cos(-1'7π + φ_o) = 100πA cos ϕ_o

Se dispone del sistema $\begin{cases} A\text{sen}\phi_o = -0'5 \\ A\cos\phi_o = -0'17/\pi \end{cases}$ para calcular A y ϕ_o. Se resuelve fácilmente elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas (recuerda que sen$^2\alpha$ + cos$^2\alpha$ = 1).
Resulta: A = 0'503 m. Para hallar ϕ_o, se divide la 1ª por la 2ª; se tiene así:

tg $\phi_o = \frac{-0'5}{-0'054} = 9'2400$ que proporciona dos soluciones: $\begin{cases} \phi_o = 83'8232º \\ \phi_o = 263'8232 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} \phi_o = 0'4657\pi \text{ rd} \\ \phi_o = 1'4657\pi \text{ rd} \end{cases}$

que corresponden a $\varphi_o = \phi_o$ + 1'7π $\begin{cases} \varphi_o = 2'1657\pi \text{ rd} = 389'8º = 29'8232º = 29º\ 49'\ 23'' \\ \varphi_o = 3'1657\pi \text{ rd} = 569'8232º = 209'8232º = 209º\ 49'\ 23'' \end{cases}$

De estas dos soluciones no es válida la primera (para ella, y(1'7, 0) = 0'5; v(1'7, 0) = 17). La segunda sí es válida (φ_o = 209'8232º = 1'1638 rd), y conduce a:

y(x, t) = 0'503 senπ(100t – x + 1'164) metros

7.- Un foco emite ondas esféricas con una potencia de 20 W. Calcula la intensidad de la onda a 2 m del foco y a 7 m. ¿Cuál es la relación entre las intensidades y las amplitudes a esas distancias del foco?

La intensidad de una onda esférica a una distancia R del foco es I = $\frac{\overline{P}}{S} = \frac{\overline{P}}{4\pi R^2}$

Por tanto, $\begin{cases} I_1 = \dfrac{\overline{P}}{4\pi R_1^2} = \dfrac{20}{4\pi 2^2} = 0'3979 \ \ W/m^2 \\ I_2 = \dfrac{\overline{P}}{4\pi R_2^2} = \dfrac{20}{4\pi 7^2} = 0'03248 \ \ W/m^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{0'3979}{0'03248} = 12.25 = \left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$

La relación de las amplitudes es $\dfrac{A_1}{A_2} = \sqrt{\dfrac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\dfrac{0'33979}{0'03248}} = 3'5 = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} = \dfrac{R_2}{R_1}$

8.- Una onda que se propaga por una cuerda responde a la ecuación, en unidades del S.I.,

$$y_{inc}(x, t) = 3.10^{-3} \text{ sen}(80t - 6x)$$

Si la cuerda tiene un extremo fijo en una pared, escribe la función de onda de la reflejada. Escribe, también la onda estacionaria que resulta de la superposición de ambas.

La onda reflejada se propaga hacia la izquierda; pero ha experimentado en la reflexión un desfase en 180º = π rd, por lo que es:

$$y_{ref}(x, t) = 3.10^{-3} \text{ sen}(80t + 6x + \pi) = -3.10^{-3} \text{ sen}(80t + 6x)$$

La onda estacionaria es $y(x, t) = y_{inc} + y_{ref} = 3.10^{-3} \text{ sen}(80t - 6x) - 3.10^{-3} \text{ sen}(80t + 6x)$

$$y(x, t) = -6.10^{-3} \text{ sen}(6x) \cos(80t) = 6.10^{-3} \text{ sen}(6x) \cos(80t + \pi)$$

9.- Una onda estacionaria, de ecuación $y(x, t) = 0'02 \text{ sen}(\frac{10}{3}\pi x) \cos(40\pi t)$, en unidades del S.I., se propaga por una cuerda. Determinar la amplitud, frecuencia y longitud de onda de las ondas que se superponen para dar la descrita. Calcula la distancia entre los nodos de la cuerda.

Amplitud: 2A = 0'02 m $\Rightarrow$ A = ***0,01m***. Frecuencia: $f = \omega/2\pi$ = ***20 Hz***.
Longitud de onda: $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(10\pi/3)$ = ***0'6 m***
La distancia entre dos nodos sucesivos es media longitud de onda: $x_N - x_{N-1} = \lambda/2$ = ***0'3 m***.

10.- Una cuerda tensa y fija por un extremo vibra según la ecuación:

$$y(x, t) = 0'05 \text{ sen}(\frac{\pi}{6} x) \cos(20\pi t)$$

con x e y en cm y t en s. Determina la frecuencia de vibración y la distancia entre dos nodos consecutivos.

Frecuencia, $f = \omega/2\pi = 20\pi/2\pi$ = ***10 Hz***. Longitud de onda, $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(\pi/6)$ = 12 cm. La distancia entre dos nodos consecutivos es $\Delta x_N = \lambda/2$ = ***6 cm***

11.- Una cuerda de guitarra de 1 m de largo fija por ambos extremos vibra formando cuatro nodos. Los puntos centrales de la cuerda tienen un desplazamiento máximo de 4 mm. Si la velocidad de las ondas en la cuerda es 660 m/s, determina la frecuencia fundamental de vibración de la cuerda y los dos primeros armónicos.

Si la cuerda forma cuatro nodos (dos de ellos en los extremos), quiere decir que la longitud de la cuerda corresponde a 3/2 de la longitud de onda (tres semilongitudes de onda):

www.yoquieroaprobar.es

$L = \frac{3}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}L = 0'667$ m y la frecuencia de vibración es $f = \frac{v_P}{\lambda} = 990$ Hz.

Las frecuencias de vibración de una cuerda con los extremos fijos es $f_n = n\frac{v_P}{2L}$; la frecuencia fundamental corresponde a n = 1 $\Rightarrow$ $f_1 = \frac{660}{2} =$ ***330 Hz***. Entonces, los dos primeros armónicos, que corresponden a n = 2 y n = 3, serán f_2 = ***660 Hz*** y f_3 = ***990 Hz***, respectivamente.

12.- Se desea construir una flauta de forma que cuando están tapados todos sus agujeros emita una nota de 264 Hz. Si la flauta se comporta como un tubo de extremos abiertos, determina la longitud de la misma. Se supone que es 340 m/s la velocidad del sonido en el aire.

Las ondas estacionarias en un tubo abierto tienen dos vientres en los extremos; por tanto, para el sonido fundamental la longitud de onda debe ser doble de su longitud.

$$\lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{340}{264} = 1'288\,\text{m} \quad \wedge \quad \lambda = 2L \quad \Rightarrow \quad L = \lambda/2 = \textbf{\textit{0.643 m}}$$

13.- Al oscilador de una cubeta de ondas se acopla un accesorio que consta de dos punzones separados por una distancia de 4 cm. Al incidir sobre la superficie del agua generan ondas coherentes con una frecuencia de 24 Hz, que se propagan con una velocidad de 12 cm/s. Determinar el tipo de perturbación que existirá en los siguientes puntos.

A, que dista 10 cm de un foco y 12 cm del otro.
B, que dista 10 cm de un foco y 9'5 cm del otro.
C, que dista 8 cm de un foco y 9'75 cm del otro.

La longitud de onda de las ondas que van a interferir en A, B y C es: $\lambda = \frac{v_P}{f} = \frac{12}{24} = 0'5$ cm

a) $\Delta x_A = x_{1A} - x_{2A}$ = 2 cm = 4 λ (nº entero de λ) $\Rightarrow$ En A hay un ***máximo*** interferencial, pues las ondas se superponen en fase.

b) $\Delta x_B = x_{1B} - x_{2B}$ = 0.5 cm = λ (nº entero de λ) $\Rightarrow$ En B hay un ***máximo*** interferencial, pues las ondas se superponen en fase.

c) $\Delta x_C = x_{1C} - x_{2C}$ = 1.75 cm = 3λ + ½ λ = 7 semilongitudes de onda (nº impar de semilongitudes de onda) $\Rightarrow$ En C hay un ***mínimo*** interferencial; las ondas llegan en oposición de fase, por lo que se destruyen entre sí.

14.- Dos fuentes de ondas coherentes emiten sonidos de 200 Hz y 0'02 mm de amplitud. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en un punto P que dista 4 m de la primera y 6 m de la segunda? Velocidad de propagación, v_p = 340 m/s.

La longitud de onda que emite las fuentes es $\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340}{200}$ = 1'7 m

La diferencia de recorrido es Δx = 2 m

Por tanto, la diferencia de fase entre las ondas es $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{1'7}2 = 2'353\,\pi$ rd

La amplitud de la onda resultante es A = 2 A_0 cos(½ $\Delta\Phi$) = 0'034 mm = ***3'4x10^{-2} mm = 34 micras***

15.- Dos ondas sonoras de ecuación p(x, t) = 1'2 cos2π(170t – 0'5x) pascales proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m del otro foco. Determina la perturbación que originan en el punto P cada uno de los focos, en el instante t = 1 s. Calcula la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado y determina la amplitud de la perturbación total en el citado punto.

Longitud de onda, $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/\pi = 2$ m Diferencia de recorrido, $\Delta x = 5$ m Diferencia de fase, $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{2}5 = 5\pi$ rd $\Rightarrow$ Las ondas interfieren en P en ***oposición de fase*** (interferencia destructiva). Vamos a comprobarlo, calculando las perturbaciones en P por separado, para cada uno de los focos:

+ $p_1(20, 1) = 1'2 \cos 2\pi(170 - 0'5.20) = 1'2 \cos(320\pi) = 1'2$ Pa
+ $p_2(25, 1) = 1'2 \cos 2\pi(170 - 0'5.25) = 1'2 \cos(315\pi) = 1'2 \cos(\pi) = -1'2$ Pa

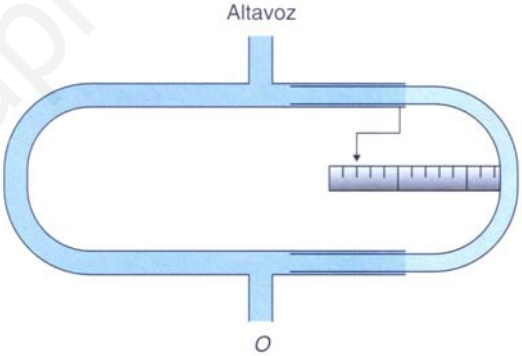
La perturbación total es la suma de las dos perturbaciones: $p = p_1 + p_2 = 0$

16.- El aparato de la figura se utiliza para medir la longitud de onda de un sonido. Al generar el sonido en el altavoz, las ondas se dividen y, tras recorrer dos caminos diferentes, llegan al detector. Si dentro del tubo hay aire, se observa que el cursor señala una diferencia de 3'30 cm entre las posiciones de un mínimo de intensidad y del siguiente. Determina la frecuencia de la fuente. Velocidad del sonido en el aire, 340 m/s.

Como el cursor marca 3'30 cm, la diferencia de caminos por una rama y por la otra es el doble. Así que: $\Delta x = 6'60$ cm. Esta diferencia de recorridos equivale a una longitud de onda, pues se pasa de un mínimo al siguiente

$\Rightarrow$ $\lambda = 6'60$ cm = 0'066 m

$\Rightarrow$ $f = v_P/\lambda = 340/0'066 =$ ***5151 Hz.***



17.- Dos fuentes de ondas coherentes emiten ondas de 30 Hz. Se propagan con una velocidad de 12 cm/s. La intensidad de las mismas, en un punto P es, respectivamente, de 0'4 y 0'7 W/m², cuando emiten por separado. Hallar la intensidad cuando emiten a la vez y en fase, sabiendo que:

a) P se encuentra a 15'0cm de S_1 y 16'2 cm de S_2.
b) P se encuentra a 17'5cm de S_1 y 18'9 cm de S_2.
c) P se encuentra a 17'0cm de S_1 y 16'3 cm de S_2.

Utilizamos las relaciones: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\Phi)$ $\Delta\Phi = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ ($\delta = 0$)

Longitud de onda, $\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{12 \text{ cm/s}}{30 \text{ s}^{-1}} = 0'4$ cm

a) $\Delta x = 16'2 - 15 = 1'2$ cm $\rightarrow$ $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0'4}1'2 = 6\pi$ rd $\rightarrow$ nº par de π rd

$\rightarrow$ En P hay un ***máximo*** de intensidad.

Su valor es: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 0'4 + 0'7 + 2\sqrt{0'4 x 0'7} =$ ***2'16 W/m²***

b) Δ x = 18'9 – 17'5 = 1'4 cm $\rightarrow$ $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0'4}1'4 = 7\pi$ rd $\rightarrow$ nº impar de π rd

$\rightarrow$ En P hay un ***mínimo*** de intensidad.

Su valor es: $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ = 0'4 + 0'7 –2$\sqrt{0'4x0'7}$ = ***0'0417 W/m²***

b) Δ x = 17 – 16'3 = 0'7 cm $\rightarrow$ $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{0'4}0'7 = 3'5\pi$ rd $\rightarrow$ ni nº par ni impar de π rd

$\rightarrow$ En P no hay ni ***máximo*** ni ***mínimo*** de intensidad. Su valor es:

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\Phi)$ = 0'4 + 0'7 + 2$\sqrt{0'4x0'7}$ cos(3'5 π) =

= 1'1 + 1'058 cos(630º) = 1'1 + 1'058x0 = ***1'1 W/m²***

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Halla la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio sabiendo que su longitud de onda es 0'25 m y su frecuencia es 500 Hz. ***R.- 125 mls.***

2.- La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. Calcula:
a) La longitud de onda para una frecuencia de 250 Hz.
b) La frecuencia para una longitud de onda de 0'75 m.
R.- a) 1'36 m; b) 453'3 Hz.

3.- ¿Cuál es la velocidad de un movimiento ondulatorio cuya longitud de onda es de 30 cm y su frecuencia es de 5 megaciclos por segundo? ***R.- 1500 km/s.***

4.- Sea una onda armónica de la forma y (x, t) = 0'5 sen (0'1x - 0,4t), donde todas las magnitudes vienen expresadas en unidades del SI. Determina la longitud de onda y la velocidad de propagación. ***R.- 62'83 m; 4 m/s.***

5. - Si se duplica la frecuencia de una onda armónica, indica cómo varían las siguientes magnitudes de la onda: la amplitud; la velocidad de la onda; la longitud de onda; el número de onda.
R.: A' = A; v_p' = v_p; λ' = ½ λ; k' = 2k

6.- En una cuerda se propaga una onda transversal: y(x, t) = 0'02 sen 2π(10t – 0'1x), en el S.I. Determina:
a) el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación
b) la velocidad y la aceleración máximas en un punto de la cuerda.
R.: a) T = 0,1 s λ = 10 m v_p = 100 m/s b) v_{max} = 1,26 m/s a_{max} = 79 m/s^2

7.- La ecuación de propagación de una onda que se genera en una cuerda se puede expresar en la forma: y (x, t) = 0'3 cos (300 π t – 10x + π/2) donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcula la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
R.: f = 150 Hz λ = 0,63 m v_p = 94,25 m/s

8. - La ecuación de una onda viene dada por la expresión: y(x, t) = 0'5 cos 8π(40t – 0'5x) en el S.I. Calcula la diferencia de fase que existirá entre dos puntos del medio de propagación si están separados por una distancia de 0'25 m.
R.: $\Delta\Phi = \pi$ rd

9.- Un tren de ondas se propaga según la ecuación y = 10 sen $2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$ en el S.I. Si la longitud de onda es de 2 m, calcula en un instante dado la diferencia de fase correspondiente a dos partículas separadas 0,75 m en la dirección de propagación.
R.: ***$\Delta\Phi = \frac{3}{4}\pi$ rd = 135º***

10.- Una onda armónica se propaga en sentido positivo del eje Ox con las siguientes características: 8 cm de amplitud, 100 Hz de frecuencia y 20 m/s de velocidad. Escribe la ecuación de la onda. ***R.: y(x,t) = 0,08 sen10π(20t-x) metros***

11.- Una onda se propaga según la ecuación y = 0'3 cos (400t –0'5x) en el S.I. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación. ***R.: λ =12,57 m v_p = 800 m/s***

12. - Una onda periódica se propaga por una cuerda tensa. Su ecuación es
y(x, y) = 0'4 sen (50t – 0'20x) en unidades de S.I. Calcula:
a) el periodo de vibración y la longitud de onda. ***T = 0,126 s λ = 31,42 m/s***
b) la velocidad máxima de oscilación de los puntos de la cuerda. ***v_{max} = 20 m/s***

13.- La ecuación de un m.a.s. viene dada por la expresión y = 0'5 sen(10πt) en unidades del S.I. Si la velocidad de propagación de las ondas que origina es 5 m/s, calcula la frecuencia, la velocidad máxima de vibración y la longitud de onda.
R.: f = 5 Hz v_{max} = 15,71 m/s λ = 1 m

14.- Un movimiento periódico viene dado por la ecuación y = 8 sen$\left(\frac{2\pi}{6}t+\varphi\right)$, donde y viene dado en cm y t en segundos.
a) ¿Qué representa φ? ¿Cuánto vale la frecuencia?
b) ¿Con qué velocidad se propaga este movimiento vibratorio si la longitud de onda es 120 cm?
c) ¿Cuál es, en grados, la diferencia de fase entre dos instantes separados por un intervalo de 1 s?
R.- a) El desfase inicial, 1/6 Hz ; b) 20 cm/s ; c) 60° .

15.- En un punto O de la superficie libre de un líquido dejamos caer regularmente gotas de agua a razón de 90 por minuto. Si la velocidad de propagación de las ondas que se originan es de 30 cm/s,
a) ¿cuál es la distancia entre dos crestas consecutivas?
b) Supongamos que a 135 cm de O hay un corcho flotando y que empieza a oscilar con una amplitud de 5 cm cuando las ondas inciden en él. Escribe la ecuación del movimiento del corcho. ***R.: a) Δx = 20 cm b) y(t) = - 5 cos (3πt) cm***

16.- Una onda armónica cuya frecuencia es 50 Hz se propaga en la dirección positiva del eje Ox. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de π/2 rdn, determina:
a) el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
b) En un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre dos desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de tiempo de 0'01 s?
R.: T = 0,02 s λ = 0,8 m v_p = 40 m/s $\Delta\Phi = \pi$ rd

17.- Una partícula vibra entre dos posiciones extremas, separadas 8 cm. La duración de cada vibración es de 0'25 s. Al cabo de 4 s la vibración se ha propagado una distancia de 60 m. Calcula la amplitud, la frecuencia, la pulsación, la velocidad de propagación y la longitud de onda. ***R.: A = 4 cm f = 4 Hz $\omega = 8\pi$ rd/s v_p = 15 m/s λ = 3,75 m***

18.- En el centro de una piscina circular de 6 m de radio se origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. La onda tarda 8 s en llegar a la orilla, y la distancia entre dos crestas consecutivas es de 0'75 m. Calcula:
a) la frecuencia del movimiento
b) la amplitud, si al cabo de 0,2 s de comenzar el movimiento, en el centro la elongación es de 4 cm
c) la elongación de un punto situado a 3 m del foco emisor al cabo de 2 s.
R.: f = 1 Hz A = 4,21 cm y(3;2) = 0

www.yoquieroaprobar.es

19.- En un punto O de la superficie de un estanque golpeas suave y periódicamente el agua con un palo a razón de 120 golpes por minuto. Observas que se forman ondas circulares en las que dos crestas consecutivas distan entre sí 50 cm. Halla la velocidad de propagación de dichas ondas. ***R.- 1 m/s.***

20.- Una onda en una cuerda está dada por la ecuación y(x, t) = 0'2 . sen (πx). cos $(100\pi t)$ en donde x está comprendida entre 0 y 6 m. Calcula:

a) la longitud de onda y la frecuencia de la onda ***λ = 2 m f = 50 Hz***

b) el número de nodos, incluidos los extremos ***Siete nodos***

c) la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda. ***v_p = 100 m/s***

d) Escribe la ecuación de la onda de frecuencia fundamental

R.: $y(x,t) = A\ sen\left(\frac{\pi}{6}x\right) cos\left(\frac{50}{3}\pi t\right)$

21.- Una onda estacionaria viene definida por la ecuación y = 0'1 cos(250x). sen(1000t), en el S.I. Calcula la distancia que hay entre dos vientres (o antinodos) consecutivos. ***Δx = 1'26 cm***

22.- Una onda estacionaria viene expresada por la ecuación y = 0'4 cos(0.1x). cos(200t) en el S.I. Calcula la distancia internodal y la longitud de onda. ¿A qué distancia del origen se encuentra el nodo nº 15? ***R.: Δx = 31,4 m λ = 62,8 m x_{15} = 455,53 m***

23.- Una onda estacionaria se encuentra establecida en una cuerda de 6 m de longitud, con sus dos extremos fijos. La velocidad de las ondas en la cuerda es de 300 m/s, y se forman tres nodos en ella, sin contar los de los extremos. Hallar la frecuencia de la onda. ***R.: 100 Hz.***

24.- En una cuerda tensa, de 3 m de longitud y con extremos fijos, se establece una onda estacionaria. Cuáles son las tres longitudes de onda más largas que pueden propagarse en la cuerda, y localizar nodos y vientres en las anteriores circunstancias.

λ_1 = 6 m; x_{N1} = 0 m x_{A1} = 1'50 m x_{N2} = 3'00 m

λ_2 = 3 m; x_{N1} = 0 m x_{A1} = 0'75 m x_{N2} = 1'50 m x_{A2} = 2'25 m x_{N3} = 3'00 m

λ_1 = 2 m; x_{N1} = 0 m x_{A1} = 0'50 m x_{N2} = 1'00 m x_{A2} = 1'50 m x_{N3} = 2'00 m

x_{A3} = 2'50 m x_{N4} = 3'00 m

25.- Hallar la longitud de un tubo sonoro abierto para que su sonido fundamental corresponda a la frecuencia de 440 Hz. En el aire, v_p = 340 m/s. ***R.: 38'6 cm.***

Para que una cuerda de 25 cm. de longitud y 1'25 gr. de masa tenga esa misma frecuencia fundamental, ¿a qué tensión ha de ser sometida? ***R.: 242 N.***

26.- La frecuencia fundamental de 440 Hz corresponde a un La_3. Hallar las frecuencias de los siete armónicos primeros que acompañan a esta nota, y (para los músicos) deducir las notas musicales a que corresponden, sabiendo que la relación de frecuencias en la escala normal es:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

R.: Frecuencias (en Hz.): 440 880 1320 1760 2200 2640 3080 3520

Notas: La_3 La_4 Mi_5 La_5 $Do\#_6$ Mi_6 Sol_6 La_6

27.- Una onda que se propaga en una cuerda responde a la ecuación, en unidades del S.I., y (x, t) = 0'003.sen (80t - 6x). Si la cuerda tiene un extremo fijo en la pared, escribe la ecuación de la onda reflejada. ***R.: y(x,t) = - 0,003 sen(80t + 6x)***

28.- Un alambre de cobre, de 2'55 m de longitud y 20 g de masa, tiene un extremo fijo, y el otro está unido a un diapasón que vibra a 1000 Hz. Se forman ondas estacionarias tales que los nodos están separados por una distancia internodal de 10 cm. Determinar la longitud de onda y la velocidad de las ondas estacionarias, así como la tensión a que está sometido el alambre. La vibración del diapasón ¿a qué armónico corresponde en la cuerda?
R.: 20 cm. 200 m/s. 313'7 N. Armónico 25

29.- El extremo de una cuerda horizontal se sujeta a un diapasón que vibra a 400 Hz, y el otro extremo a una polea de la que pende una masa de 50 Kg. La densidad lineal de masa de la cuerda es 0'1 g/cm. Determinar: a) la velocidad de las ondas transversales producidas en la cuerda.- b) la distancia entre los nodos de la onda estacionaria en la cuerda.- c) la longitud de la cuerda, si se forman tres nodos en ella.- d) la frecuencia fundamental.- e) el orden del armónico correspondiente al diapasón.
R.: a) 221 m/s b) 27'7 cm c) 69'2 cm d) 79'8 Hz e) n = 5

30.- Desde el extremo fijo de una cuerda de 1 m de longitud se envía un pulso hacia el otro extremo, también fijo; al llegar a él, se refleja y vuelve al extremo inicial; el tiempo invertido en el recorrido es de 0'1 s. - a) Hallar las frecuencias de las ondas permitidas en la cuerda. - b) Escribir las funciones de las ondas estacionarias asociadas a dichas frecuencias.
R.: a) 10n Hz. (n = 1,2,3, ...) b) $y_n(x,t) = 2A_n \text{ sen } n\pi x \,.\, \cos 20n\pi t$

31.- Un tubo de órgano abierto tiene una longitud de 4 pies (1 pie = 0'3048 m.) ¿Con qué frecuencia fundamental emite y cuáles son sus tres armónicos primeros? Velocidad del sonido en el aire, 340 m/s.
R.: Frec. fund. = 139.4 Hz.; armónicos: 1º: 278.9 Hz 2º: 418.3 Hz 3º: 557.7 Hz

32.- a) Si se duplica la amplitud de un movimiento ondulatorio, ¿cuánto aumenta la energía del movimiento? ¿Y si se duplica la frecuencia?
b) Si se quiere aumentar 10 veces la energía de un movimiento ondulatorio, ¿qué variación debe darse a la amplitud?
R.- a) Se hace cuatro veces mayor en ambos casos; b) $\sqrt{10}$ ***veces mayor.***

33.- Una onda plana de 1'5 cm de longitud de onda se propaga en un medio con una velocidad de 20 cm/s. El frente de ondas incide bajo un ángulo de 30° con la superficie de separación con otro medio. Si la longitud de onda en este segundo medio es de 1 cm, deduce la nueva dirección de propagación de la onda. ***R.:*** $\varepsilon' = 19{,}4712º = 19º\ 28'\ 16''$

34.- Dos focos puntuales emiten ondas transversales de igual amplitud pero en oposición de fase. Su frecuencia es de 25 Hz y la velocidad de propagación es 3'5 m/s. ¿Cómo será la interferencia de ambas ondas en un punto que dista 80 cm de uno de los focos y 45 cm del otro?
R.: Hay un máximo de intensidad

35.- Dos focos coherentes emiten ondas con la misma frecuencia y con velocidad de propagación de 500 m/s, estando situados a 4'6 m de distancia. En la recta que une los focos, el punto medio tiene máximo y el siguiente máximo está situado a 1 m de él. Hallar la frecuencia de las ondas. ***R.: 250 Hz***

36.- Dos ondas, en fase en el origen, de 10^{-3} m de amplitud, 0'5 m de longitud de onda y 200 Hz de frecuencia, interfieren en un punto a 4'000 m y 6'125 m, respectivamente de los focos. Escribir la forma de la onda resultante, y determinar si en dicho punto existe máximo o mínimo. Calcular la vibración en él.
R.: $y(x_1;x_2;t) = 0{,}002.\cos 2\pi(x_1 - x_2).\text{sen}\, 2\pi[200t - (x_1 + x_2)]$
$y(4;6{,}125;t) = 1{,}41.10^{-3}.\text{sen}\, 2\pi(200t - 1/8)$

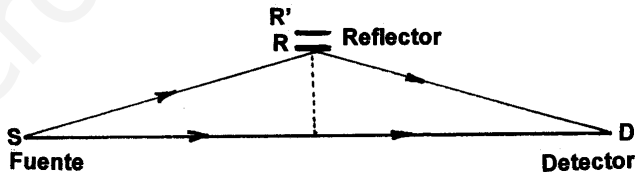
37.- Dos focos coherentes emiten en fase ondas sonoras de 90 Hz y velocidad de 360 m/s. En un punto P, distante 14 y 6 m de los focos, cada onda tiene una intensidad de 10 W/cm^2. ¿Qué intensidad tiene el sonido cuando se superponen las dos ondas sonoras? ¿Y en el punto a 5 y 7 m de los focos, respectivamente? ¿Idem, a 5 y 6 m? ¿Idem a 9'25 y 13'5 m?
R.: 40 W/cm^2 0 W/cm^2 20 W/cm^2 38'48 W/cm^2

38.- Dos focos sonoros coherentes S_1 y S_2 emiten con la misma frecuencia. En el punto O, equidistante de ambos, no se detecta sonido alguno. Alejándonos de este punto, el nivel sonoro va aumentando y alcanza un valor máximo en P, tal que PS_1 = 2'5 m y PS_2 = 2 m. Sabiendo que la velocidad de la onda es de 340 m/*s,* hallar su frecuencia. ¿Emiten los focos sonoros en fase? ***R.: 340 Hz .- Los focos sonoros emiten en oposición de fase.***

39.- Repetir el problema anterior, si en O y en P hay sendos máximos consecutivos de intensidad sonora. ***R.: 680 Hz .- Los focos sonoros emiten en fase.***

40.- Dos ondas coherentes, en oposición de fase en el origen, con velocidad de 800 m/*s* y frecuencia 400 Hz, interfieren en una región del espacio. La intensidad de cada onda es de 25 W.m^{-2}. Dados cuatro puntos, distantes de los focos: P_1 a 5 y 12 m; P_2 a 6 y 10 m; P_3 a 2'5 y 4 m, y P_4 a 3'5 y 2'75 m, determinar el tipo de interferencia en ellos, así como la intensidad de la onda resultante en cada caso.
R.: P_1: $\Delta\Phi_1 = 8\pi$ rd (max.) 100 W.m^{-2} P_2: $\Delta\Phi_2 = 5\pi$ rd (min.) 0 W.m^{-2}
P_3 : $\Delta\Phi = 5\pi/2$ rd (ni max. ni min.) 50 W.m^{-2}
P_4: $\Delta\Phi_4 = \frac{7}{4}\pi$ rd (ni max. ni min.) 85'4 W.m^{-2}

41.- En la posición D de la figura, se recibe la onda directa y la reflejada por un reflector R, de una onda sonora emitida en S.
La distancia entre S y D es 1000 m, y el reflector se encuentra equidistante de ambos, a una altura inicial de 27'3 m. En esta posición, en D se detecta un mínimo nulo de intensidad sonora.



Al desplazar el reflector verticalmente hacia R', la intensidad sonora crece primero hasta un máximo, y luego vuelve a decrecer hasta anularse.
El corrimiento en vertical del reflector es de 3'6 m. Determinar la longitud de onda del sonido y su frecuencia, si su velocidad en el aire es de 340 m/s.
R.: λ =41,8 cm f = 812,8 Hz

www.yoquieroaprobar.es

T E M A 6.-

S O N I D O

SUMARIO:

6.1.- Naturaleza del sonido
6.2.- Intensidad sonora y sonoridad
6.3.- Algunas propiedades del sonido
6.4.- Cualidades del sonido
6.5.- El efecto Doppler
6.6.- Contaminación acústica

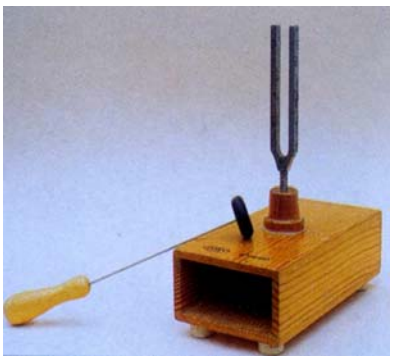
Actividades desarrolladas
Actividades propuestas
Actividad comentada: Ultrasonidos

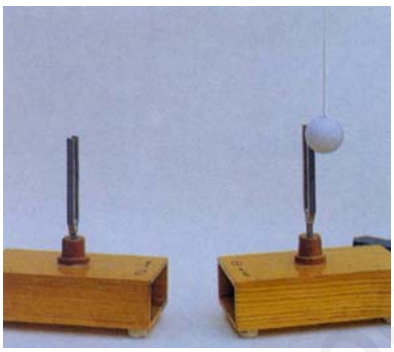
www.yo

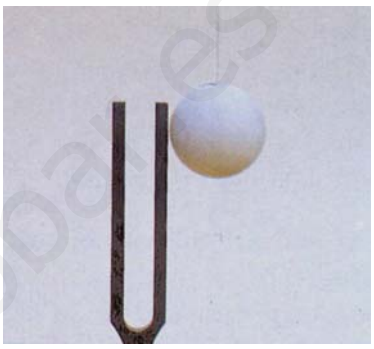
1.- NATURALEZA DEL SONIDO

Al golpear una de las ramas de un diapasón se aprecia el ***sonido*** que produce. Este sonido es el resultado de la vibración del diapasón. Aunque no se puede apreciar con la vista, es fácil comprobar que éste vibra: basta acercarle un pequeño objeto, como una pelota de pimpón colgada de un hilo, para observar la vibración trasmitida a ella.

Si hay dos diapasones iguales montados en sus respectivas cajas de resonancia, uno de ellos vibra al hacer vibrar el otro. Si se detiene con la mano la vibración del diapasón perturbado, se escuchará el sonido que produce el otro: la perturbación (vibración) se ha ***propagado***, a través del aire, de uno al otro.







*¿**Por qué se oye** el diapasón?* La vibración producida en sus ramas se transmite a las moléculas del aire en el que se encuentra; éstas, a su vez, transmiten esa vibración de unas a otras. De este modo, la vibración puede alcanzar, después de un breve tiempo, a las moléculas del aire que están en contacto con el tímpano (membrana del oído), las cuales, a su vez, hacen que éste vibre; los diferentes componentes del oído transmiten y transforman la vibración del tímpano de forma que nuestro cerebro nos proporciona la sensación sonora.

Igual que en el caso del diapasón, si el emisor (violín, claxon, persona que habla...) produce sonido, es porque alguna parte de él vibra (cuerda, membrana elástica, cuerdas vocales...). Las vibraciones del emisor se transmiten a las partículas del medio en el que se encuentra y éstas las transmiten de unas a otras (propagación del sonido), hasta llegar al tímpano del oído el cual vibra. Subjetivamente, *el sonido es la sensación que experimenta el órgano del oído ante la vibración de algún cuerpo.* Objetivamente, *es el movimiento ondulatorio que da lugar a dicha sensación.*

Desde el punto de vista físico, el sonido consiste pues en la propagación de una vibración: es una onda *mecánica* puesto que requiere de un medio material para propagarse; *el sonido no se propaga en el vacío*.

El oído humano puede percibir, *oir*, los sonidos de frecuencias entre 20 y 20000 Hz. Las ondas sonoras con frecuencia inferior a 20 Hz se conocen como **infrasonidos;** las de frecuencia superior a 20000 Hz se denominan **ultrasonidos.**

El sonido es un movimiento ondulatorio ***longitudinal*** puesto que la dirección de vibración y la de propagación es la misma. Las partículas del medio alcanzadas por la perturbación *vibran* pero no experimentan un desplazamiento neto. No es el aire en sí, sino la vibración, la que *viaja* (se propaga).

Otro modo de considerar la onda sonora: la vibración empuja y comprime las capas de aire cercanas; esta compresión se transmite a las capas contiguas, de forma que todo sucede como si la compresión se propagara hacia afuera, a partir de la fuente sonora. A la compresión le sucede

una disminución de la presión (enrarecimiento). Así, a base de compresiones y enrarecimientos, se propaga la onda sonora: *el sonido es una onda de presión.*

La velocidad de propagación del sonido no depende de su mayor o menor intensidad, ni de la fuente sonora, ni de su frecuencia, sino del medio en el que se propaga.

En un medio determinado (homogéneo e isótropo) se propaga con *velocidad constante* que depende de las *propiedades* del medio (densidad, temperatura, grado de humedad, presión...). En general, los sólidos son mejores transmisores del sonido que los líquidos o los gases.

La mayor o menor velocidad de propagación depende de la rigidez del medio; cuanto más rígida sea la unión entre las moléculas (o átomos) que lo constituyen, más rápidamente recuperarán su posición al ser alcanzados por la vibración, y por tanto, más rápidamente se propagará en ellos el sonido.

En *condiciones normales* (273 K y 10^5 Pa), en el aire seco, el sonido se propaga a 331 m/s. La velocidad del sonido en el aire prácticamente no depende de la presión atmosférica, sino de la temperatura y de la humedad. Aproximadamente, por cada grado que se eleva la temperatura del aire, la velocidad del sonido aumenta 0,6 m/s. Si v_{Po} es la velocidad de propagación a 0 °C (T_o = 273 K), para una temperatura de t °C (T), la velocidad de propagación viene dada, de forma aproximada, por la relación:

$$v_P = v_{Po}\sqrt{1+\frac{t}{273}} = v_{Po}\sqrt{\frac{T}{T_o}}$$

Por ejemplo, a 15 °C resultaría de unos 340 m/s. El incremento de la velocidad de propagación del sonido en el aire con la temperatura se explica porque el aumento de la agitación térmica facilita la propagación de la vibración. La humedad también influye: a mayor humedad corresponde mayor velocidad de propagación.

2.- INTENSIDAD SONORA Y SONORIDAD

En general, la intensidad del sonido es muy pequeña en relación con la de otros movimientos ondulatorios que nos son familiares, como la luz. Por ejemplo, la intensidad del sonido que emite una persona cuando habla con voz normal es del orden de 10^{-8} W m^{-2}; la audición es posible gracias a la gran sensibilidad de nuestro oído.

Como se ha visto anteriormente, (cf. Tema 5, nº 6, ec. (21)), la intensidad de un movimiento ondulatorio es proporcional al cuadrado de su amplitud y de su frecuencia. Es lo que ocurre también en el caso del sonido:

$$I :: A^2 :: f^2 \qquad (1)$$

Cuando al oído llega una onda sonora, la sensación que recibe se denomina *sensación sonora* o ***sonoridad***. El oído no percibe doble sensación sonora ante un sonido de doble intensidad que otro; es decir, no existe proporcionalidad entre la sensación sonora percibida y la intensidad del sonido que la produce. La sonoridad β, expresada en *decibelios* (dB), viene dada por la relación:

$$\boxed{\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}} \qquad (2)$$

siendo I_o la ***intensidad umbral*** de audición para el oído humano, cuyo valor es $I_o = 10^{-12}$W.m^{-2}, es decir, la intensidad mínima por debajo de la cual el oído no percibe el sonido.

Según la anterior expresión, a un sonido de intensidad igual a la umbral le corresponde una sonoridad nula, $\beta = 10 \log 1 = 0$. Si la intensidad de un sonido se hace 10, 100, 1000 veces mayor que la umbral, su sonoridad es de 10 dB, 20 dB, 30 dB, respectivamente; es decir, a una multiplicación por diez en la intensidad corresponde un incremento de 10 dB en la sonoridad.

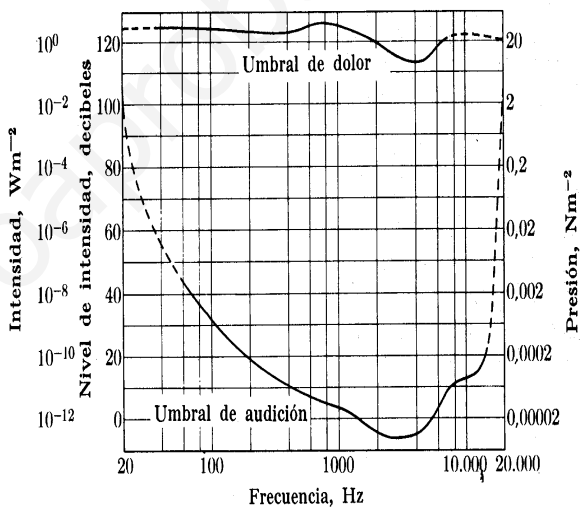
A partir de (2), $\frac{\beta}{10} = \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 10^{\frac{\beta}{10}} = \frac{I}{I_0} \rightarrow \boxed{I = I_0\, 10^{\frac{\beta}{10}}}$ (3)

En el cuadro de esta página se muestra una tabla con las sonoridades de algunos sonidos más familiares. De acuerdo con los valores de la tabla, los sonidos más intensos que se toleran tienen una intensidad de un billón de veces superior a los sonidos apenas audibles: una amplia gama de valores que es capaz de percibir el oído humano, desde 10^{-12} W.m^{-2} (β = 0 dB) hasta

Sonoridad de algunos sonidos corrientes

Sonido	Intensidad (W m^{-2})	Sonoridad (dB)	
Umbral de audición humana	10^{-12}	0	Apenas perceptible
Laboratorio de acústica muy acondicionado	$3{,}2 \cdot 10^{-12}$	5	
Murmullo de hojas secas	10^{-11}	10	
Conversación en voz baja	10^{-10}	20	Muy suave
Ronroneo de un gato	10^{-9}	30	
Voz normal	10^{-8}	40	Suave
Ventilador	10^{-7}	50	
Conversación ordinaria. Máquina de escribir mecánica	10^{-6}	60	
Tráfico urbano denso	10^{-5}	70	Fuerte
Aparato de radio con el volumen muy alto. Gritos	10^{-4}	80	
Martillo neumático a 3 m. Motocicleta	10^{-3}	90	Muy fuerte
Claxon a 5 m	10^{-2}	100	
Moto con escape libre. Discoteca. *Ruido ensordecedor*	10^{-1}	110	Excesivamente fuerte
Explosión. Motor a reacción. *Umbral de dolor*	1	120	
Avión a reacción a 30 m de distancia	10	130	Doloroso
Sirena de transatlántico a 15 m	100	140	

<u>Área de audición</u>.- La escala de frecuencias es logarítmica. (Nivel de intensidad = Sonoridad) (1 N.m^{-2} = 1 pascal)



El umbral de audición no es un valor definido para todos los sonidos: la sensibilidad del oído depende de la frecuencia del sonido. Según la figura adjunta, que nos muestra la relación entre la sonoridad y la frecuencia, la máxima sensibilidad (mínima intensidad umbral) se presenta a unos 3000 Hz. En este gráfico quedan definidos los ***umbrales de audición*** y ***de dolor***, así como el ***área de sonidos audibles***. Sin embargo, estas cantidades son valores promedio. Para una persona concreta pueden diferir. Además, hay que tener en cuenta que, con la edad, se modifican tanto los umbrales como las frecuencias mínima y máxima audibles: a medida que se envejece se reduce el límite superior de audibilidad de forma que un sonido de frecuencia alta resulta inaudible para una persona de edad, mientras que es escuchado claramente por un joven. La frecuencia de los sonidos cotidianos se encuentra entre 60 y 1150 Hz. Se suele tomar como intervalo de frecuencias percibidas por el oído humano desde 20 Hz a 20000 Hz, estando la zona de máxima sensibilidad en torno a los 3000 Hz.

La energía de las ondas sonoras se disipa en la materia en forma de calor. Además, a mayor frecuencia, mayor es la rapidez con la que se disipa su energía; por tanto, las ondas de baja frecuencia son audibles a distancias mayores que las de alta frecuencia. (Las sirenas para niebla de los barcos son de baja frecuencia).

3.- ALGUNAS PROPIEDADES DEL SONIDO

El sonido presenta todas aquellas propiedades que se derivan de su naturaleza de onda de presión longitudinal: reflexión, interferencias y difracción, especialmente.

A.- REFLEXIÓN DEL SONIDO

El sonido, como todo movimiento ondulatorio, tiene la propiedad de reflejarse cuando encuentra un obstáculo. Un sonido emitido puede ser reflejado en una superficie, de forma que regrese de nuevo.

Si el oído distingue el sonido emitido del que llega reflejado, se dice que se ha producido el ***eco*** del sonido emitido.

El oído humano distingue entre dos sonidos consecutivos (por ejemplo, el sonido emitido y el reflejado) si entre ellos hay, como mínimo, una diferencia de una décima de segundo. Como la velocidad del sonido en el aire es de unos 340 m/s, el eco se produce si el obstáculo reflector se encuentra a una distancia mínima de 17 metros del receptor.

Si el obstáculo está a menor distancia, no se produce el eco puro, sino que, al superponerse el sonido reflejado con el incidente, sucede como si se prolongase la duración del sonido incidente: a este fenómeno se le denomina ***reverberación*.**

La reverberación se suele observar en un local grande, vacío, cuando la audición se presenta confusa, sin nitidez: las múltiples reflexiones en todas las superficies (paredes, techo...) hacen que el sonido perdure confusamente un cierto tiempo en el local.

El sonido también experimenta ***refracción*** cuando se encuentra con medios que lo propagan con diferentes velocidades (por ejemplo, capas de aire o de agua a diferente temperatura).

Aplicaciones de los sonidos y ultrasonidos: Basada en el fenómeno de la reflexión, la técnica ha dado lugar a múltiples e importantes aplicaciones, en casi todos los campos de la ciencia. A continuación se señalan algunos de estos avances tecnológicos.

La reflexión de las ondas sonoras, así como la de los infrasonidos y ultrasonidos, es el fundamento de muchos instrumentos de gran utilidad: sonar, radar, ecografías... También hay animales que se orientan (en cierto modo *ven)* a través de la reflexión de ultrasonidos.

EL SONAR (**SO**und **N**avigation **A**nd **R**anging) es un instrumento que utilizan los barcos para detectar la profundidad a la que se encuentra el fondo marino o algún objeto que esté debajo de la superficie del agua. El sonar emite ultrasonidos que se reflejan en el fondo o en el obstáculo (irregularidades del fondo del mar, banco de peces, submarino...). Por el tiempo que tarda en captar el eco se puede determinar la distancia que separa el sonar (es decir, el barco) del obstáculo que lo produce. Por todo ello, el sonar se utiliza en estudios oceanográficos (para establecer las características del fondo marino: mapas de su relieve), en barcos de pesca (para detectar bancos de peces), en el ámbito militar (para detectar submarinos), en el estudio geológico del suelo (para encontrar petróleo)...

EL RADAR (**RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging) equivale al sonar pero **utiliza ondas electromagnéticas** (microondas). Como el sonar, el radar también sirve para detectar y ubicar objetos. El sonar lo hace por medio de ondas mecánicas (ultrasonidos), mientras que el radar lo hace mediante ondas electromagnéticas (microondas). Tanto el sonar como el radar no sólo permiten determinar la posición de los objetos, sino también su trayectoria y velocidad. Además de su uso militar, el radar se utiliza en la navegación aérea y en la marítima así como en el control del tráfico terrestre (policía de tráfico).

LA ECOGRAFÍA. Los ultrasonidos son muy utilizados en medicina, tanto con fines diagnósticos como terapéuticos. La técnica de la ***ecografía*** consiste en *registrar los ecos ultrasónicos producidos por los distintos órganos corporales.* Los ultrasonidos (de frecuencias entre 1 y 10 MHz) se hacen incidir sobre una zona concreta del cuerpo y, a medida que penetran en él, son reflejados en aquellos puntos en los que cambia la densidad del mismo (por ejemplo, en la zona que separa dos órganos). Los ultrasonidos reflejados (ecos) se recogen en un aparato electrónico que analiza la posición de los tejidos que originan el eco, visualizándolos en un monitor en forma de puntos de diferente brillantez (de 16 a 32 niveles de grises) según la intensidad del eco. La imagen obtenida puede ser estática o, si se reproducen tomas sucesivas, puede simular el movimiento del interior del cuerpo, como sucede, por ejemplo, en las populares ecografías en el seguimiento de los embarazos, en las que la imagen en movimiento es el resultado de la sucesión de 40 imágenes por segundo. De forma simultánea a la visión en el monitor es posible registrar la imagen sobre papel. Con la ecografía se pueden visualizar múltiples zonas internas sin producir ningún daño, cosa que no sucedía con otros métodos basados en radiaciones electromagnéticas ionizantes (rayos X).

OTRAS APLICACIONES: Además de su utilidad diagnóstica, en medicina los ultrasonidos también se emplean en terapéutica. La ***litotricia*** consiste en utilizar ultrasonidos de alta energía pero corta duración (ondas de choque) para fragmentar cálculos renales y biliares, evitando así la intervención quirúrgica de quien los padece. También se utilizan para acelerar la recuperación de lesiones traumáticas, pues aumentan la vascularización de una zona inflamada y, por tanto, facilitan su curación.

Hoy en día, la ***industria*** utiliza los ultrasonidos en múltiples aplicaciones. Aprovechando que su elevada frecuencia permite que se unan pequeñas partículas, se utilizan para precipitar las partículas sólidas en suspensión en humos y aerosoles, para dispersar emulsiones de grasa en agua, para la limpieza industrial de piezas y de máquinas, para la reducción de espumas en el envasado de bebidas a alta velocidad... También son muy utilizados en el análisis no destructivo de materiales: según sean los *ecos* que produce una pieza, se puede determinar si tiene algún defecto de fabricación (irregularidades o grietas internas, poros...).

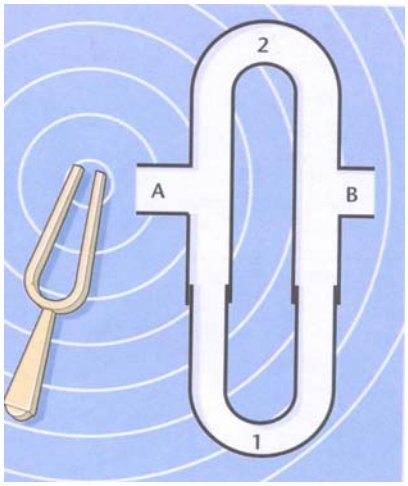
En el ***mundo animal***, los murciélagos emiten y escuchan ultrasonidos. De hecho, su sistema de navegación es prácticamente un sonar que les permite volar en la oscuridad. Las ratas, los delfines y algunos insectos, como las langostas, también utilizan los ultrasonidos para tener información del medio que les rodea y para comunicarse entre sí. Los elefantes, las ballenas y algunas aves, sin embargo, se comunican a través de infrasonidos.

B.- INTERFERENCIAS SONORAS

En el ***tema 5, nº 8-b***, se han estudiado las interferencias entre dos ondas. Este estudio es totalmente aplicable al caso de la ondas sonoras.

En las figuras de la página siguiente se muestra el ***aparato de Quincke*** para poner de manifiesto la interferencia de las ondas sonoras. Consta de dos tubos en forma de U que pueden acoplarse uno en otro. La onda sonora que entra por A, se divide: una parte se propaga por la rama 1 y otra por la 2. Si el trayecto recorrido por ambas ondas es el mismo, entonces llegan en concordancia de fase a B y el sonido tiene cuatro veces la intensidad de cada onda por separado. Si el recorrido es difiere en media longitud de onda, en B el sonido se anula. Si, se alarga la rama móvil 1, de modo que la diferencia de recorrido sea λ, 2λ, 3λ, ..., $n\lambda$, vuelve a oírse el sonido, mientras que si la diferencia de recorrido es $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, ..., $(2n+1)\ \lambda/2$, no se oirá. El sistema sirve pues, también cuantitativamente, para medir longitudes de onda del sonido.

Interferómetro acústico



Tubo de Quincke

C.- DIFRACCIÓN SONORA

Recordemos que la difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda encuentra un obstáculo o una abertura al propagarse cuyo tamaño es comparable a su longitud de onda.

Los fenómenos de difracción también se dan en las ondas sonoras. A causa de ellos es posible oír un sonido detrás de un obstáculo, mientras que no es posible verlo. En efecto, la onda bordea el obstáculo, propagándose no rectilíneamente; no así la luz, cuya longitud de onda es mucho menor que las dimensiones del obstáculo.

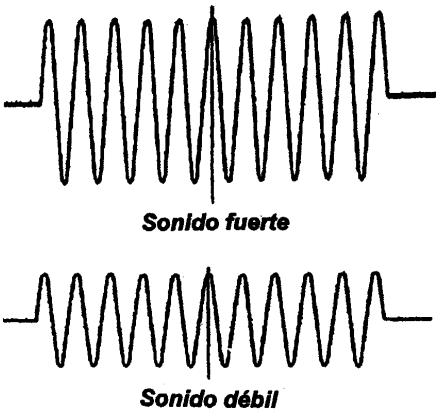
4.- CARACTERÍSTICAS DEL SONIDO

Los sonidos, al ser percibidos por el oído, se caracterizan y distinguen unos de otros por una serie de cualidades subjetivas: la sonoridad, el tono y el timbre.

a) La sonoridad

Es la característica de un sonido por la cual lo percibimos con mayor o menor intensidad. Según la sonoridad, los sonidos pueden ser ***fuertes*** o ***débiles***. Por ejemplo, con un instrumento podemos producir el mismo sonido con mucha o poca intensidad.

¿A qué característica ondulatoria está ligada la sonoridad? Según hemos visto, se relaciona con la intensidad de la onda, y ésta a su vez es proporcional al cuadrado de su ***amplitud***.



SONORIDAD: Dos sonidos del mismo tono

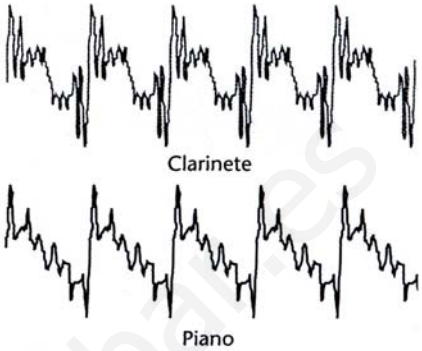
El oído humano es capaz de detectar sonidos cuya intensidad es, al menos, de 10^{-12} W/ m^2. Un sonido cuya intensidad es de 1 W/m^2 provoca dolor en los oídos, aunque todavía es audible.

b) El tono

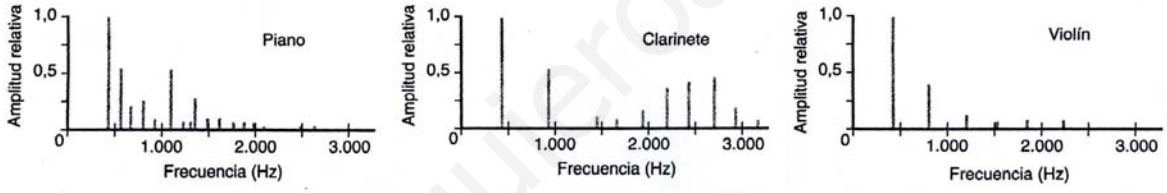
Es la característica de un sonido por la cual lo percibimos con mayor o menor elevación o altura. Los sonidos, atendiendo a esta característica, pueden ser ***agudos*** o ***graves***.

Por ejemplo, producimos con un instrumento un sonido musical DO y luego un FA; éste lo percibimos como más elevado que el primero: el Fa es más agudo que el DO.

***TONO*: Dos sonidos de igual intensidad**



***TIMBRE*: Un mismo sonido procedente de dos instrumentos**



Un mismo sonido, emitido por diferentes instrumentos, presenta la misma frecuencia fundamental (primer pico), pero va acompañada de otros picos, que corresponden al conjunto de frecuencias de los armónicos, diferentes en posición e intensidad relativa, según el instrumento. Éstos son los que dan el TIMBRE especial al sonido.

La característica asociada al tono de un sonido es la ***frecuencia*** de la onda sonora. Más exactamente, la frecuencia fundamental de la onda producida por el instrumento (Cf. Tema 5, nº4 a y b). Los sonidos agudos son de frecuencia mayor que la de los graves.

El oído humano percibe sonidos desde 20 Hz hasta 20000 Hz, aproximadamente. Los sonidos musicales suelen estar generalmente por debajo de 4000 Hz, siendo graves los de frecuencia inferior a 1000 Hz, y agudos los de mayor: 20 Hz < graves < 1000 Hz < agudos < 4000 Hz

c) El timbre

Es la característica de un sonido que permite reconocer su procedencia. El oído es capaz de discriminar si el instrumento del que procede un sonido es un piano, o violín, o clarinete, o diapasón, ...

Esto es debido a que la onda sonora emitida por una fuente vibrante es generalmente la superposición del sonido fundamental y de sus ***armónicos***. Éstos, los armónicos, al acompañar

al fundamental, que determina el tono, dan su timbre o calidad musical. En definitiva pues, el timbre resulta de los armónicos que se encuentran presentes y de sus intensidades relativas.

www.yoquieroaprobar.es

Resumiendo, véase el cuadro:

EFECTO SENSORIAL DEL SONIDO	*PROPIEDAD FÍSICA DE LA ONDA*
Sonoridad	Amplitud
Tono	Frecuencia fundamental
Timbre	Armónicos

5.- EL EFECTO DOPPLER

Cuando una fuente que emite ondas de frecuencia f, y se acerca o se aleja con velocidad constante de un observador en reposo respecto del medio propagador de las ondas, éste detecta una frecuencia f' diferente a la emitida: f' > f cuando se acerca y f' < f al alejarse.

Asimismo, si el emisor está en reposo respecto del medio y quien se mueve es el observador, también éste mide frecuencias diferentes a la del emisor, según se acerque o se aleje de él.

En el caso más general, si el emisor y el observador se desplazan respecto del medio propagador de las ondas, asimismo no coinciden las frecuencias emitida y detectada.

A este fenómeno, perfectamente observable, se le denomina ***efecto Doppler***, en honor del físico C. J. Doppler (1805 – 1853) quien lo observó y explicó por vez primera. No es exclusivo de las ondas sonoras; es importante este efecto, también, en el caso de las ondas electromagnéticas (no materiales), en cuyo caso requiere otro tratamiento explicativo (Efecto Doppler-Fizeau).

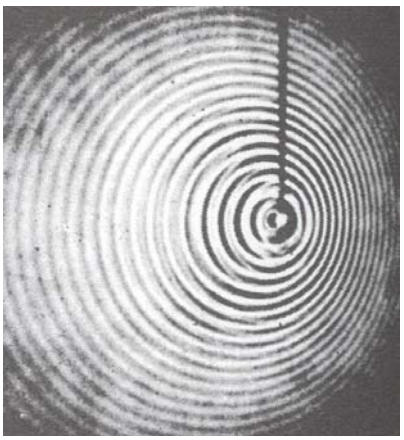
Supongamos que la fuente emisora de ondas emite con una frecuencia f, periodo T y longitud de onda λ, siendo la velocidad de propagación de las ondas v_P: $f = 1/T = v_P/\lambda$

Si es f' la frecuencia, T' el periodo y λ' la longitud de onda de las ondas recibidas: $f' = 1/T' = v_P/\lambda'$

Suponemos también que la velocidad de la fuente emisora es menor que la velocidad de propagación de las ondas: $v_f < v_P$

Caso primero: La fuente se mueve respecto del observador con velocidad v_f.

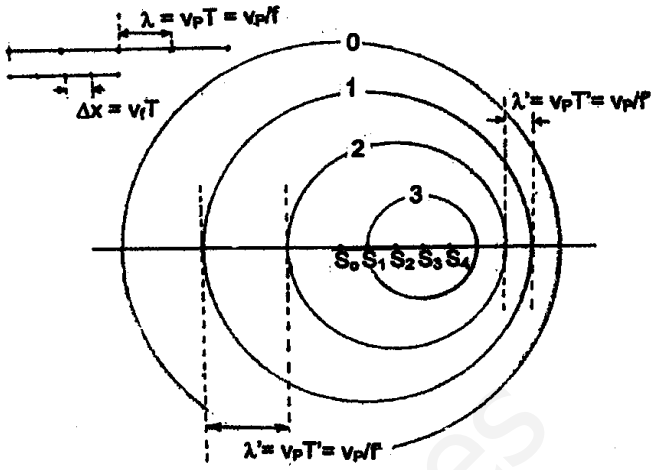
En la figura se han representado las ondas emitidas en cuatro instantes sucesivos, con intervalos de tiempo de un periodo; por ello las circunferencias (o mejor, esferas) representan los frentes de onda al cabo de cuatro periodos, es decir en el instante t = 4T.



Al observador, a la derecha, en reposo respecto del medio, le llegan los frentes de onda con una frecuencia que vamos a calcular:

$$\begin{cases} \lambda' = v'T = (v_P - v_f)T = \dfrac{v_P - v_f}{f} \\ f' = \dfrac{v_P}{\lambda'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f' = f\,\frac{v_P}{v_P - v_f} \qquad (4)$$



Si la fuente emisora se alejara del observador (por ejemplo, el observador situado a la izquierda de la fuente) la frecuencia vendría dada por:

$$f' = f\,\frac{v_P}{v_P + v_f} \qquad (5)$$

Resumiendo:

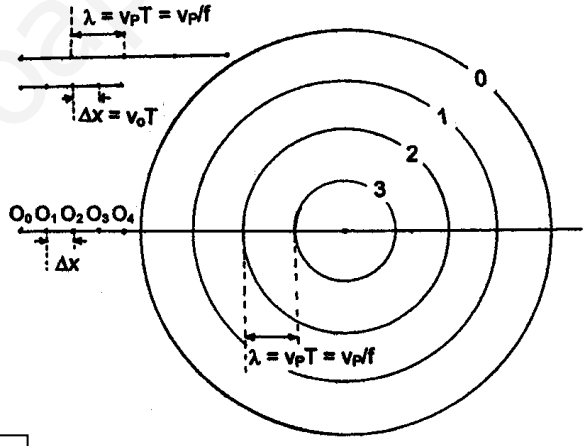
$$\boxed{f' = f\,\frac{v_P}{v_P \pm v_f}} \qquad (6)$$

donde el signo $\begin{cases} + \\ - \end{cases}$ señala que la fuente se $\begin{cases} \text{aleja} \\ \text{acerca} \end{cases}$ al observador, respectivamente.

<u>Caso segundo</u>: El observador se mueve con velocidad constante, v_o.

Cuando el observador se acerca a la fuente, recibe los frentes de onda, que le llegan con velocidad v_P, con una velocidad relativa $v' = v_P + v_o$. La frecuencia con la que los recibe es:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v_P + v_o}{v_P/f} = f\,\frac{v_P + v_o}{v_P}$$



Si el observador se aleja de la fuente, entonces $v' = v_P - v_o$ y la fecuencia vale:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v_P - v_o}{v_P/f} = f\,\frac{v_P - v_o}{v_P}$$

Por tanto, resumiendo:

$$\boxed{f' = f\,\frac{v_P \pm v_o}{v_P}}$$

donde el signo $\begin{cases} + \\ - \end{cases}$ señala que el observador se $\begin{cases} \text{aleja} \\ \text{acerca} \end{cases}$ de la fuente, respectivamente.

<u>Caso general</u>: Ambos fuente y observador se mueven respecto del medio de propagación.

Superponiendo ambos efectos, se tiene:

$$f' = f_1\,\frac{v_P}{v_P \pm v_f} = f\,\frac{v_P \pm v_o}{v_P}\,\frac{v_P}{v_P \pm v_f} = f\,\frac{v_P \pm v_o}{v_P \pm v_f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = f\,\frac{v_p \pm v_o}{v_p \pm v_f}} \qquad (8)$$

donde se toma $\begin{cases} +v_o \\ -v_o \end{cases}$ según el observador se $\begin{cases} \text{acerque} \\ \text{aleje} \end{cases}$ de la fuete emisora, y donde se toma

www.yoquieroaprobar.es

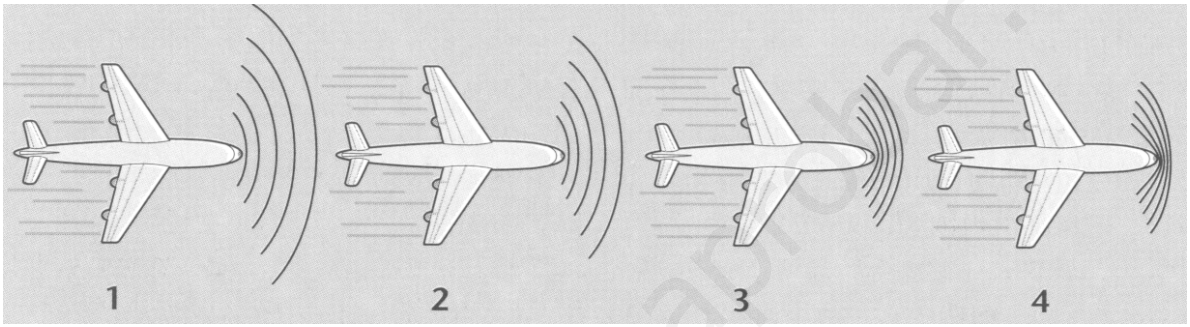
$\begin{cases} +v_f \\ -v_f \end{cases}$ según la fuente emisora se $\begin{cases} \text{aleje} \\ \text{acerque} \end{cases}$ al observador.

Es preferible, a efectos prácticos, sintetizar los cuatro casos anteriores en la siguiente formula:

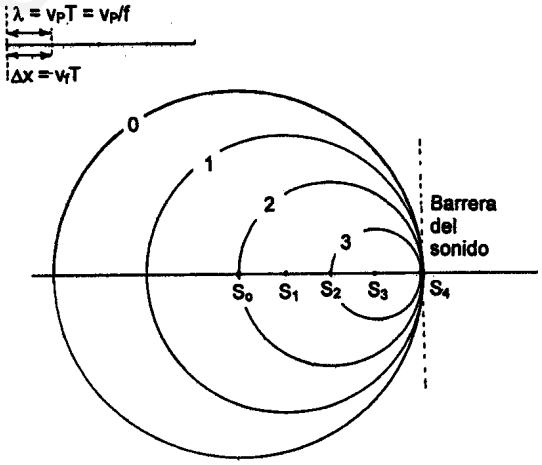
$$\boxed{f' = f\,\frac{v_P + v_o}{v_P - v_f}} \qquad (9)$$

en la que las velocidades v_o y v_f se toman positivas cuando representan acercamiento y negativas si suponen alejamiento.

UN CASO ESPECIAL: Cuando la velocidad de la fuente emisora de ondas es superior a la velocidad de propagación, $v_f > v_P$.



Es el caso de un avión que supera la barrera del sonido al desplazarse a una velocidad mayor que 340 m/s ≈ 1200 km/h. O la de una motora en el mar con una velocidad superior a la de propagación de las ondas que ella misma genera.



Cuando aún la velocidad de una fuente sonora v_f es menor que la propia velocidad de propagación del sonido v_P, la situación es la del caso primero. Pero si al ir aumentando v_f se acerca al valor v_P, tiene lugar una acumulación de los frentes de onda delante de la fuente sonora: se forma la ***barrera del sonido***.

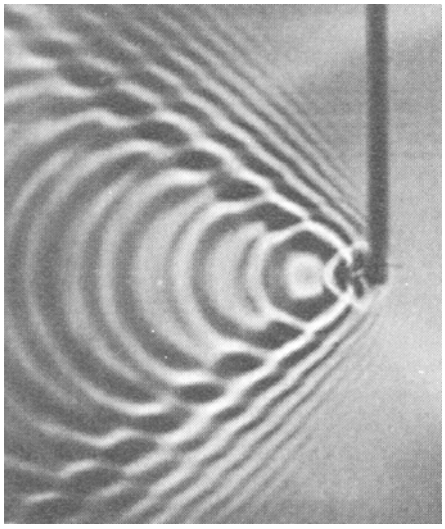
La figura muestra cómo se forma la barrera del sonido para un avión cuya velocidad va aumentando hasta que alcanza la del sonido. Cuando la alcanza, recibe una gran resistencia a su avance y sufre fuertes sacudidas: se dice que *atraviesa la barrera del sonido.*

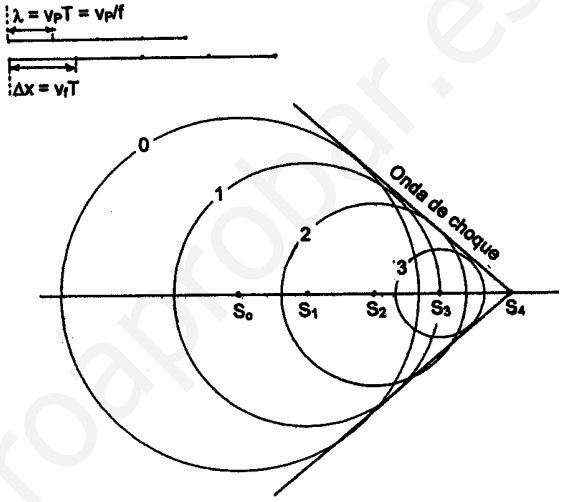
Cuando el avión supera la velocidad del sonido, sigue con su vuelo sin estas sacudidas, puesto que ahora los frentes de onda quedan detrás de él. En la siguiente figura se observa que, mientras el avión avanza con ***velocidad supersónica***, las ondas emitidas tienen una envolvente, que es una superficie cónica tangente a todas ellas, cuyo eje es la dirección de avance del avión. Esta superficie se denomina ***onda de choque*** (también conocida como *onda de Mach).* La onda de choque acompaña al avión en su movimiento. Un lugar de la superficie de la Tierra que sea alcanzado por la onda de choque es sometido a la acción brusca y sucesiva de un aumento-disminu-

ción de presión: se produce un *estampido sónico* que, además de molestias auditivas, puede conllevar rotura de cristales...

La semiabertura α de la superficie cónica verifica: sen $\alpha = v_P/v_f$. Su inversa se denomina ***número de Mach***, y expresa la velocidad supersónica en función de la velocidad del sonido. Así, un avión que lleva una velocidad de 2,7 mach en una zona del espacio en la que la velocidad del sonido es 290 m/s va a v_f = 2,7x290 m/s = 783 m/s ≈ 8800 km/h

Otra situación conocida en la que se producen ondas de choque, en este caso en el agua, es el movimiento de una lancha con motor *fueraborda.*





www.yoquieroaprobar.es

6.- CONTAMINACIÓN ACÚSTICA (Lectura)

AUTORES del artículo
- Estrella Suárez Berrocal
- Verónica Lunar Tostado
- Inmaculada Maldonado Escribano
- Vanesa Asunción Márquez

Desde hace años el ruido se ha convertido en un factor contaminante continuo en la mayoría de las ciudades, suponiendo en la actualidad un grave problema, con efectos fisiológicos, psicológicos, económicos y sociales. El principal causante de la contaminación acústica es la actividad humana.

El ruido ha existido desde la antigüedad, pero es a partir del siglo pasado, como consecuencia de la Revolución Industrial, del desarrollo de nuevos medios de transporte y del crecimiento de las ciudades, cuando comienza a aparecer el problema de la contaminación acústica.

El ruido, calificado por quien lo sufre, es un algo molesto, indeseable e irritante. La contaminación acústica afecta negativamente a la calidad de vida.

A diferencia de otros contaminantes, el ruido presenta características peculiares que hacen que su efecto sea subestimado indebidamente por la sociedad:

- Su producción es la más barata y su emisión requiere muy poca energía.
- Su medición y cuantificación es compleja.
- No genera residuos, no produce un efecto acumulativo en el medio aunque sí puede producirlo en el hombre.
- Su radio de acción es inferior al de otros contaminantes.
- No se propaga mediante los sistemas naturales como sería el caso del aire contaminado que se mueve por la acción del viento.
- Se percibe por el único sentido del oído.

1.- Agentes implicados en la contaminación acústica

Las causas fundamentales de la contaminación acústica son, entre otras:
- el aumento espectacular del parque automovilístico
- las actividades industriales
- las obras públicas y la construcción
- los servicios de limpieza y de recogida de basura
- sirenas y alarmas
- las actividades lúdicas y recreativas, y entre ellas, la creciente proliferación de botellones en áreas urbanas.

a). RUIDO URBANO, producido por automóviles, aviones, ferrocarril y otros...

El ruido del tráfico rodado (automóviles, motos, camiones...) perturba las distintas actividades, interfiriendo con la comunicación hablada, perturbando el sueño, el descanso, la relajación, impidiendo la concentración y el aprendizaje y lo que es más grave, creando estados de tensión y cansancio que pueden degenerar en enfermedades de tipo nervioso y cardiovascular.

www.yoquieroaprobar.es

¿Qué medidas deberían adoptarse para reducirlo?

- Limitar la velocidad media del tráfico.
- Llevar a cabo un buen mantenimiento del vehículo, haciendo hincapié en el silenciador; utilizar el claxon en casos de estricta necesidad; detener el motor en paradas o atascos; hacer uso de transportes públicos...
- Finalmente, facilitar la fluidez del trafico, significa reducir aceleraciones, siempre más ruidosas que el movimiento a velocidad constante.

El impacto de las aeronaves, en toda su variedad, no se limita a las proximidades de los grandes aeropuertos, sino que afecta también, en mayor o menor medida, a una gran parte de las zonas urbanas y rurales de todos los países del mundo. La proliferación de aeropuertos, el aumento del número de personas que utilizan con frecuencia este medio de transporte y la generalización de su uso en el movimiento de carga, han producido un aumento exponencial en el tráfico aéreo a lo largo de estas últimas décadas.

La reciente proliferación de trenes de gran velocidad en muchos países desarrollados supone, desde el punto de vista de la acústica ambiental, un elemento muy negativo. La existencia de trenes subterráneos en las zonas urbanas, tanto en lo referente a las grandes líneas interurbanas en sus rutas de penetración en las ciudades como a las redes metropolitanas, no resuelve totalmente el problema (vibraciones de los edificios, salida de ruido a la superficie, etc).

Finalmente, en todas las ciudades modernas existen también otras fuentes sonoras que poseen un carácter singular y esporádico, aunque, por desgracia, su presencia se deja sentir en algunas ocasiones con excesiva frecuencia; éste es el caso de las sirenas de los coches de policía, bomberos y ambulancias o de las señales acústicas de los sistemas de seguridad.

b. RUIDO INDUSTRIAL, producido por maquinarias diversas

El ruido industrial está originado fundamentalmente por el funcionamiento de los diferentes tipos de máquinas existentes en fábricas, pequeñas y grandes, y complejos industriales.

El ruido industrial se caracteriza por presentar niveles de presión acústica relativamente elevados, con carácter impulsivo o ruidos de alta intensidad y corta duración.

La presencia de ultrasonidos, infrasonidos y vibraciones reviste también una gran importancia en ambientes industriales.

Las obras públicas o la construcción con sus maquinarias: compresores, martillos neumáticos, excavadoras y vehículos pesados de todo tipo. Producen unos niveles de ruido tan elevados que, son el blanco de muchas de las quejas de los residentes de nuestras ciudades.

A pesar de los esfuerzos realizados para solucionar estos problemas, los éxitos alcanzados hasta ahora son relativamente modestos, en parte como consecuencia de la diferente sensibilidad de los gestores y debido a las repercusiones tecnológicas, económicas y sociales que comporta cualquier política eficaz de lucha contra el ruido.

Algunas soluciones:

- Sustitución de algunas de las máquinas existentes en la industria por otras menos ruidosas.
- Modificación de los mecanismos ruidosos de algunas de estas máquinas como por ejemplo, instalando amortiguadores, cambiando los engranajes, etc.
- Recubrimiento parcial o total de las máquinas ruidosas con paneles acústicamente aislantes.
- Montaje de las máquinas sobre soportes antivibratorios anclados en el suelo.
- Recubrimientos de las paredes o techos del local con paneles absorbentes acústicos.
- Utilización de equipos protectores personales por parte de los trabajadores expuestos a niveles sonoros particularmente elevados.

2.- Efectos del ruido en el ser humano

El ruido aparenta ser uno de los agentes contaminantes más inofensivos, ya que es percibido fundamentalmente por un solo sentido, el oído, y ocasionalmente cuando aparecen grandes niveles de presión sonora, por el tacto. Sus efectos son mediatos y acumulativos.
Podemos distinguir varios tipos de efectos:

a. EFECTOS FISIOLÓGICOS.

EFECTOS AUDITIVOS.

La exposición a niveles de ruido intenso, da lugar a pérdidas de audición, que si en un principio son recuperables cuando el ruido cesa, con el tiempo pueden llegar a hacerse irreversibles, convirtiéndose en sordera.

Esta sordera es de percepción y simétrica, lo que significa que afecta ambos oídos con idéntica intensidad.

II. EFECTOS NO AUDITIVOS.

El ruido también actúa negativamente sobre otras partes del organismo. Se ha comprobado que bastan de 50 a 60 dB para que existan enfermedades asociadas al estímulo sonoro. En presencia de ruido, el organismo adopta una postura defensiva y hace uso de sus mecanismos de protección. Entre los 95 y 105 dB se producen las siguientes afecciones:

- Afecciones en el riego cerebral.
- Alteraciones en la coordinación del sistema nervioso central.
- Alteraciones en el proceso digestivo.
- Cólicos y trastornos intestinales.
- Aumento de la tensión muscular y presión arterial.
- Cambios de pulso en el encefalograma.

b. EFECTOS PSICOLÓGICOS.

Entre estos citamos el sueño, la memoria, la atención y el procesamiento de la información.

El ruido puede provocar dificultades para conciliar el sueño y también despertar a quienes están ya dormidos. El sueño es la actividad que ocupa un tercio de nuestras vidas y éste nos permite entre otras cosas descansar, ordenar y proyectar nuestro consciente. Se ha comprobado que sonidos del orden de los 60 dB reducen la profundidad del sueño.

La aparición súbita de un ruido puede producir alteraciones en la conducta que, al menos momentáneamente, puede hacerse más abúlica, o más agresiva, o mostrar el sujeto un mayor grado de desinterés o irritabilidad.

En tareas donde se utiliza la memoria, se observa un mejor rendimiento en los sujetos que no han estado sometidos al ruido. Ya que con este ruido crece el nivel de activación del sujeto y esto, que en principio puede ser ventajoso, en relación con el rendimiento en cierto tipo de tareas, resulta que lo que produce es una sobreactivación que conlleva un descenso en el rendimiento.

El ruido repercute sobre la atención, focalizándola hacia los aspectos más importantes de la tarea, en detrimento de aquellos otros aspectos considerados de menor relevancia.

Se ha observado que las madres embarazadas que han estado desde el principio en una zona muy ruidosa, tienen niños que no sufren alteraciones, pero si se han instalado en estos lugares después de los 5 meses de gestación (el oído se hace funcional), después del parto los niños no soportan el ruido, lloran cada vez que lo sienten, y al nacer su tamaño es inferior al normal

www.yoquieroaprobar.es

El ruido es un factor de riesgo para la salud de los niños y repercute negativamente en su aprendizaje. Educados en un ambiente ruidoso se convierten en menos atentos a las señales acústicas, y sufren perturbaciones en su capacidad de escuchar y un retraso en el aprendizaje de la lectura. Dificulta la comunicación verbal, favoreciendo el aislamiento, la poca sociabilidad y además aumenta el riesgo de sufrir estrés.

CONCLUSIONES

Diremos que, además de la eficacia de los métodos pasivos, deberíamos concienciar a la población de que el ruido es un factor de riesgo para nuestra salud. Una vez asumido el problema, tendríamos que adoptar medidas preventivas, ya que, son más rentables económica y socialmente, y potenciar campañas de educación medioambiental, para que todos contribuyan y exijan disminución de los niveles de ruido si es preciso.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- En el interferómetro acústico de Quincke, inicialmente la disposición de los tubos es tal que el sonido emitido por un diapasón en su entrada A es inaudible a su salida en B. A partir de entonces, es preciso deslizar un tubo respecto del otro, con lo que va apareciendo el sonido, se hace máximo, y vuelve a desaparecer tras un desplazamiento total del tubo de 8'6 cm. A partir de estos datos, y teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, calcula la frecuencia del diapasón.

La diferencia total de recorrido de las ondas por ambos tubos debe ser de una longitud de onda (distancia interferencial entre máximos y entre mínimos consecutivos).

Según el problema, y recordando cómo es un interferómetro acústico, esta diferencia de caminos es el doble del desplazamiento de los tubos, o sea: $\Delta x = 2 \cdot 8{,}6 = 17{,}2$ cm.

Por tanto: $\lambda = \Delta x = 17'2$ cm $\quad f = \frac{v_P}{\lambda} = \frac{340}{0{,}172} =$ ***1977 Hz***.

2.- Si un aparato doméstico produce durante su funcionamiento una sensación sonora de 50 dB, ¿cuál es la intensidad del sonido que le corresponde?

Aplicamos la llamada ley de Weber-Fechner:

$$50 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad \Rightarrow \quad \log \frac{I}{10^{-12}} = 5 = \log 10^5$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^5 \quad \Rightarrow \quad I = \boldsymbol{10^{-7}\ W/m^2}$$

3.- Un altavoz tiene una potencia de 50 W. ¿Cuál es la sensación sonora a 10, 20, 30 y 50 m del aparato?

La intensidad viene dada por $I = \frac{P}{4\pi R^2}$ y la sonoridad por $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$ Por tanto:

$$I_{10} = \frac{50}{4\pi(10)^2} = 4x10^{-2}\ W/m^2 \qquad S_{10} = 10 \log \frac{I_{10}}{I_o} = 10x \log \frac{4x10^{-2}}{10^{-12}} = \mathbf{106\ dB}$$

$$I_{20} = \frac{50}{4\pi(20)^2} = 9{,}95x10^{-3}\ W/m^2 \qquad S_{20} = 10 \log \frac{I_{20}}{I_o} = 10x \log \frac{9{,}95x10^{-3}}{10^{-12}} = \mathbf{100\ dB}$$

$$I_{30} = \frac{50}{4\pi(30)^2} = 4.42x10^{-3}\ W/m^2 \qquad S_{30} = 10 \log \frac{I_{30}}{I_o} = 10x \log \frac{4{,}42x10^{-3}}{10^{-12}} = \mathbf{96{,}5\ dB}$$

$$I_{50} = \frac{50}{4\pi(50)^2} = 1{,}59x10^{-3}\ W/m^2 \qquad S_{50} = 10 \log \frac{I_{50}}{I_o} = 10x \log \frac{1{,}59x10^{-3}}{10^{-12}} = \mathbf{92\ dB}$$

4.- Supongamos que tres motos producen en un punto una sonoridad de 90 dB. ¿Cuántas motos hacen falta para producir un ruido en el umbral de la sensación dolorosa desagradable, es decir 120 dB?¿Cuál es la sonoridad que produce cada moto?

Llamemos I_m a la intensidad de sonido que produce cada moto. Hallemos su valor:

$$90 = 10 \log\left(\frac{3I_m}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{3I_m}{10^{-12}}\right) = 9 \Rightarrow \frac{3I_m}{10^{-12}} = 10^9 \Rightarrow 3\ I_m = 10^{-3} \Rightarrow I_m = \frac{10^{-3}}{3}\ W/m^2$$

www.yoquieroaprobar.es

$120 = 10 \log\left(\frac{nI_m}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{nI_m}{10^{-12}}\right) = 12 \Rightarrow \frac{nI_m}{10^{-12}} = 10^{12} \Rightarrow n\, I_m = 1 \Rightarrow n = 1/\, I_m = \frac{3}{10^{-3}}$

$\Rightarrow$ n = ***3000 motos***

$S_m = 10 \log \frac{I_m}{10^{-12}} = 10 \log \frac{10^{-3}/3}{10^{-12}} = 10 \log(10^9/3) \cong$ ***85 dB*** es la sonoridad de una moto.

5.- Dos sonidos de 50 y 60 dB se emiten simultáneamente. Calcula la sonoridad resultante.

Las sonoridades no son aditivas, pero las intensidades sí: $I_T = I_1 + I_2$ donde

$50 = 10 \log(\frac{I_1}{10^{-12}}) \Rightarrow I_1 = 10^{-7}$ W/m^2 $\quad 60 = 10 \log(\frac{I_2}{10^{-12}}) \Rightarrow I_2 = 10^{-6}$ W/m^2

$I_T = I_1 + I_2 = 10^{-7}$ W/m^2 + 10^{-6} W/m^2 = 1,1x10^{-6} W/m^2

$S_T = 10 \log(\frac{I_T}{10^{-12}}) = 10 \log (1{,}1\text{x}10^6) =$ ***60,4 dB***

6.- A una distancia de 50 m se oye una sirena con una sonoridad de 70 dB. ¿A qué distancia se oye sólo con 38 dB?¿Cuál es la potencia sonora de la sirena?

$S_1 = 10 \log(I_1/ 10^{-12})$, pero $I_1 = P/4\pi R_1^2 \Rightarrow S_1 = 10 \log(\frac{P/4\pi R_1^2}{10^{-12}})$ es la sonoridad a 50 m.

Análogamente, la sonoridad a la distancia pedida, $S_2 = 10 \log(\frac{P/4\pi R_2^2}{10^{-12}})$.

$\Delta S = S_1 - S_2 = 70 - 38 = 32$ dB

$\Delta S = S_1 - S_2 = 10 \{\log(\frac{P/4\pi R_1^2}{10^{-12}}) - \log(\frac{P/4\pi R_2^2}{10^{-12}})\} = 10 \log (\frac{R_2^2}{R_1^2}) = 20 \log(\frac{R_2}{R_1}) = 20 \log(\frac{R_2}{50})$

Así pues, $32 = 20 \log(\frac{R_2}{50}) \Rightarrow \log(\frac{R_2}{50}) = 1{,}6 \Rightarrow R_2 = 50\text{x}10^{-1'6} =$ ***1990 metros*** es la distancia a la cuál se oye la sirena con 38 dB.

Puesto que $S_1 = 10 \log(I_1/ 10^{-12}) = 70 \Rightarrow I_1 = 10^{-5}$ Como también $I_1 = P/4\pi R_1^2$, siendo $R_1 = 50$ m $\Rightarrow P = 4\pi R_1^2\, I_1 = 4\text{x}3{,}1416\text{x}50^2\text{x}10^{-5} =$ ***0,31 W*** es la potencia de emisión de la sirena.

7.- Un tren se desplaza con el aire en calma a la velocidad de 108 km/h. El silbato de la locomotora emite un sonido de 60 Hz. Calcular la frecuencia de las ondas sonoras percibidas por un observador situado:
a) delante de la locomotora, y detrás de ella, en reposo.
b) en otro tren que lleva una velocidad de 54 km/h, que se acerca al primero, y después de cruzarse con él al alejarse.

108 km/h = 30 m/s $\qquad$ 54 km/h = 15 m/s

a_1) Si el observador está fijo delante de la locomotora que se acerca:

$v_P = 340$ m/s $\quad v_o = 0$ m/s $\quad v_f = 30$ m/s

$f' = f\frac{v_P + v_o}{v_P - v_f} = 60\frac{340}{340-30} =$ ***65,81 Hz***

www.yoquieroaprobar.es

a_2) Si el observador está en reposo detrás de locomotora que se aleja:

v_P = 340 m/s v_o = 0 m/s v_f = - 30 m/s

$$f' = f\frac{v_P + v_o}{v_P - v_f} = 60\frac{340}{340+30} = \mathbf{55{,}14\ Hz}$$

b_1) El observador se acerca a la locomotora y ésta al observador:

v_P = 340 m/s v_o = 15 m/s v_f = 30 m/s

$$f' = f\frac{v_P + v_o}{v_P - v_f} = 60\frac{340+15}{340-30} = \mathbf{68{,}71\ Hz}$$

b_2) El observador se aleja de la locomotora y ésta también del observador:

v_P = 340 m/s v_o = -15 m/s v_f = - 30 m/s

$$f' = f\frac{v_P + v_o}{v_P - v_f} = 60\frac{340-15}{340+30} = \mathbf{52{,}70\ Hz}$$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- El eco se produce por la reflexión del sonido. ¿Qué distancia mínima ha de haber entre el foco emisor y la superficie reflectora? ¿Cuánto valdría esa distancia para una onda luminosa? Datos: El oído y la vista distinguen, respectivamente, sonidos e imágenes distintas si se producen a intervalos de 0'1 s. Velocidades del sonido y de la luz, 340 y $3x10^8$ m/s, respectivamente. ***R.: 17 m $1,5x10^7$ m = 15000 km***

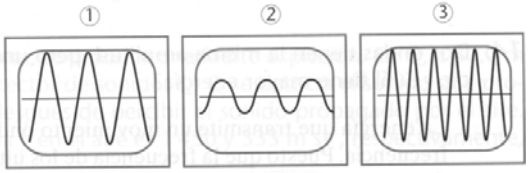
2.- El sonido de la sirena de una fábrica llega a un determinado trabajador 7 s después de que haya empezado a funcionar. Calcula la frecuencia de la sirena, sabiendo que la distancia entre el trabajador y la sirena es $4'9x10^4$ veces la longitud de onda del sonido emitido.
R.: f = 7000 Hz

3.- Dos ondas sonoras de ecuación y(x,t) = 1'2 . cos 2π(170t - 0.5x) pascales, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m de otro foco. Determinar la perturbación que originan en el punto P cada uno de los focos, en el instante t = 1 s. Calcular la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado y determinar la amplitud de la perturbación total en el citado punto.
R.: y_1 = 1,2 Pa y_2 = - 1,2 Pa $\Delta\Phi = \pi$ rd A = 0 Pa

4.- Golpean con un martillo un raíl de la vía férrea. Si escuchamos el sonido a través del raíl 4.4 s antes que a través del aire, ¿qué distancia nos separa del lugar donde se golpea el raíl?
Datos: velocidad del sonido en el aire, 340 m/s; en el raíl, 5000 m/s ***d = 1.6 km***

5.- Un sonido emitido en el aire tiene una frecuencia de 440 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda en el aire? Si el mismo sonido se produce en el agua (v_p = 1.5 km/s), ¿cuál será su frecuencia y su longitud de onda? ***R.: En el aire, λ = 0,77 m; en el agua, f = 440 Hz y λ = 3,41 m***

6.- Las figuras corresponden a la observación osciloscópica de diferentes sonidos. En todas ellas, las escalas de tiempo y elongaciones son las mismas. Indica cuál o cuáles corresponden al sonido más agudo; al más grave y al más débil.



R.: Más agudo, el 3; más graves, el 1 y el2; más débil, el 2

7.- Una cuerda metálica, de 500 mg de masa y 50.0 cm de longitud, está sometida a una tensión de 88.2 N. Determinar para esta cuerda: a) la velocidad de propagación de una onda transversal; b) las frecuencias del tono fundamental y del primer sobretono.
v_p = 297 m/s f_0 = 297 Hz f_1 = 594 Hz

8.- Un foco sonoro emite ondas esféricas con una potencia de 20 W. Calcular la intensidad de la onda a una distancia de 2 m y 4 m del foco. ¿Cuál es la relación entre las intensidades y las amplitudes a esas distancias del foco? ***R.: $I_1 = 37,85x10^{-2}$ W.m^{-2} $I_2 = 9,95x10^{-2}$ W.m^{-2}***

9.- Un coro está formado por 100 personas. Si la sonoridad que produce cada persona es de 40 dB, calcular la sonoridad del coro. ***R.: S = 60 dB***

10.- Una fuente de sonido está ajustada de modo que, a 10 m, la sensación sonora que produce es de 70 dB. ¿Cuál es la sonoridad a 50 m de la misma? ***R.: S = 56 dB***

11.- Una fuente sonora emite con una potencia de π μW. ¿A partir de qué distancia deja de ser audible? La intensidad umbral del sonido emitido es de 10^{-12} W/m^2. ***R.: A 0.5 km***

12.- Calcular el aumento en el nivel de intensidad sonora cuando la intensidad de un sonido se multiplica por 100. ***R.: En 20 dB***

13.- La intensidad sonora está determinada por la expresión: $I = \frac{p_0^2}{2\rho v}$, con p_0 la amplitud de la presión, ρ = 1,3 kg/m^3 la densidad del aire, y v = 340 m/s la velocidad de propagación del sonido. Si se define el nivel de intensidad sonora o sonoridad como $S = 10 \log(I / I_o)$, con $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 , deduce la intensidad y la amplitud de presión de una onda sonora en el umbral de audición (0 dB) y en el umbral que produce dolor (120 dB).
R.: Umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$W/m^2 $p_0 = 2.97x10^{-5}$ Pa
Umbral de dolor, I_d = 1 W/m^2 $p_{0\ dolor}$ =29.7 Pa

14.- Una locomotora que viaja a 144 km/h emite un sonido de 400 Hz. Calcular las frecuencias que detecta un observador sentado en un banco de la estación cuando se acerca y se aleja la locomotora. ***R.: 453 Hz y 358 Hz***

15.- Un tren que hace sonar su silbato, lleva una velocidad constante cuando pasa por una estación. Al acercarse se percibe un sonido de704 Hz, mientras que cuando se aleja dicha frecuencia es de 619 Hz. Calcular la velocidad del tren y la frecuencia del silbato. Velocidad del sonido en el aire, 340 m/s. ***R.: 78.6 k/h 658Hz***

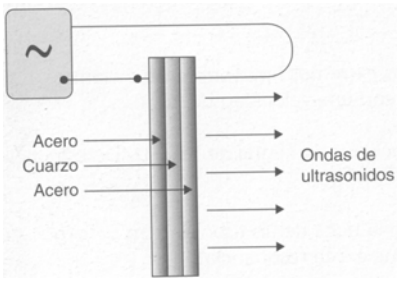
16.- Calcular la velocidad de una moto cuando pasa por la meta de un circuito de carreras, sabiendo que el ruido que se escucha es de 300 Hz cuando se acerca y de 200 Hz cuando se aleja. Supóngase que por la meta pasa la moto con velocidad constante.
R.: v = 245 km/h

17.- Un coche se separa de una pared a 90 km/h y se dirige hacia un observador emitiendo un sonido de 600 Hz. Hallar las frecuencias que llegan al observador, del sonido directo y del reflejado en la pared. ***R.: 648 Hz y 559 H z***

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDAD COMENTADA: ULTRASONIDOS (Lectura)

Se denominan ultrasonidos las ondas mecánicas que no impresionan nuestro oído debido a su elevada frecuencia (f > 20000 Hz). Su longitud de onda depende del medio por el que se propaguen, siendo en el aire menor que 1,7 cm.



La producción de ultrasonidos se basa en el fenómeno de la ***piezoelectricidad*** (en griego το πιεζειν significa presionar), descrito en 1880 por ***Pierre Curie*** (1859-1906).

Pierre Curie descubrió que, al aplicar una presión a dos caras paralelas de ciertos cristales de cuarzo, aparecen cargas de distinto signo en las caras perpendiculares a aquéllas en las que se aplica la presión, siendo la carga tanto mayor cuanto más elevada sea la presión. Si en vez de presionar sobre las caras, se las somete a tracción, se invierte el signo de las cargas, y lo mismo al revés, es decir, que, aplicando una diferencia de potencial entre dos caras paralelas, el cristal se deforma.

Durante la primera guerra mundial, ***Paul Langevin*** (1872-1946) recibió el encargo del ministro de la guerra francés, de un proyecto para la detección de submarinos.

Para detectar un objeto mediante ondas, su tamaño no puede ser menor que el de la longitud de onda, con el fin de que se produzca la reflexión y no la difracción de la onda. Además, la absorción de la onda por el medio tiene que ser pequeña para que no se amortigüe.

Ni los sonidos ordinarios ni la luz son adecuados para la detección de objetos en el agua a partir de ciertas distancias. Los primeros, porque al tener una longitud de onda comprendida entre 1,7 cm y 17 m la precisión en la localización del objeto no es mayor que ±2 cm. La luz tampoco es apropiada, porque, aunque su longitud de onda está comprendida entre $4x10^{-7}$ y $7x10^{-7}$ m, menor que la mayoría de los objetos, es absorbida fuertemente por el medio.

A Paul Langevin le quedaba como única alternativa la utilización de ***ultrasonidos***. Éstos tienen frecuencias de $5x10^{8}$ Hz, que corresponden a una longitud de onda en el aire de $6,8x10^{-7}$ m, del orden de la luz visible. Gracias a su pequeña longitud de onda no son difractados por los objetos grandes, se pueden dirigir en haces muy finos, que no se dispersan y, además, su amortiguamiento en el agua es reducido. Por esto son adecuados para transmitir señales bajo el agua mediante la técnica denominada ***sonar***.

Langevin recurrió al efecto piezoeléctrico para elaborar el sistema de detección basado en los ultrasonidos. Cortó una lámina a un cristal de cuarzo, a la que le soldó dos placas metálicas en dos de sus caras paralelas. Al aplicar una diferencia de potencial alterna entre las dos placas, se originan en las caras perpendiculares tracciones y compresiones con la consiguiente variación del espesor en la lámina. Estas fluctuaciones del espesor tienen una amplitud que alcanza su valor máximo cuando la frecuencia de la corriente coincide con la frecuencia propia de vibración del cuarzo, pues entra en resonancia, haciéndose las vibraciones más intensas.

La frecuencia característica de vibración del cristal es inversamente proporcional al espesor de la lámina utilizada. Estas frecuencias de vibración son perfectamente conocidas, por lo que se pueden utilizar en medidas muy precisas del tiempo.

En el ***sonar***, las vibraciones del cristal de cuarzo se transmiten al medio que lo rodea originando los ultrasonidos que se emplean para la determinación de distancias.

Un transmisor emite un pulso sonoro a través del agua y un detector recibe su reflexión o eco posteriormente. Midiendo los tiempos y conociendo la velocidad del sonido en el agua, se determina la distancia a la que se encuentra un banco de peces, unas rocas o un submarino.

El rango de frecuencias utilizado está comprendido entre 20 y 100 kHz, pues a esa frecuencia el amortiguamiento es mínimo. El mismo cristal de cuarzo que actúa como emisor de ultrasonidos hace de detector de los mismos; pues las variaciones de presión originan en él diferencias de potencial alternas que pueden ser amplificadas y analizadas.

En la naturaleza también se sirve de los ultrasonidos. Los *murciélagos* emiten ultrasonidos y, detectando su reflexión, localizan pequeñas presas. Emiten frecuencias de 120 kHz, que corresponden a una longitud de onda en el aire de 2,8 mm.

Dentro del cuerpo humano, los ultrasonidos se reflejan en los contornos y superficies de separación de los distintos órganos. Así, mediante *ecografías* se detectan tumores, bolsas de fluidos y otras anormalidades. Al no dañar a los tejidos, sustituyen a los *rayos* X en el seguimiento del desarrollo del feto. Las frecuencias utilizadas en diagnóstico están comprendidas entre 1 y 10 MHz. por lo que los objetos que se pueden detectar son muy pequeños. Tienen el inconveniente de que destruyen los glóbulos rojos de la sangre.

Al tener una frecuencia elevada, transportan gran cantidad de energía, por lo que, dirigido adecuadamente el haz, se logra destruir tumores malignos.

Los cristales piezoeléctricos tienen aplicación en la construcción de micrófonos, radiorreceptores, y en general en cualquier aparato que precise mantener constante una determinada frecuencia de oscilación, como los radiotransmisores o los relojes.

www.yoquieroaprobar.es

FÍSICA

2º Bachillerato
. Ciencias de la Naturaleza
. Tecnología

UNIDAD III :

Óptica

TEMA 7.-
Introducción

TEMA 8.-
Óptica Geométrica I

TEMA 9.-
Óptica Geométrica II

TEMA 10.-
Óptica Física

Valentín Laconcha Abecia, S.M.
Doctor en C. Físicas

www.yoquieroaprobar.es

T E M A 7.-

ÓPTICA: INTRODUCCIÓN

www.yoquieroaprobar.es

SUMARIO:

7.1.- Naturaleza de la luz: Teorías
7.2.- Óptica
7.3.- Velocidad de la luz

1.- NATURALEZA DE LA LUZ: TEORÍAS

A.- TEORÍA CORPUSCULAR

Hasta la mitad, aproximadamente, del siglo XVII, fue creencia general que la luz consistía en una corriente de corpúsculos. Estos corpúsculos eran emitidos por los focos luminosos, tales como el Sol o la llama de una bujía, y se alejaban del foco en línea recta. Podían penetrar las sustancias transparentes y se reflejaban en las superficies de los cuerpos opacos. Cuando los corpúsculos penetraban en el ojo, excitaban el sentido de la vista.

Si la prueba de lo adecuado de cualquier teoría es su capacidad para interpretar los hechos experimentales conocidos con un mínimo de hipótesis, hemos de admitir que la teoría corpuscular era excelente. Fue utilizada para explicar la propagación rectilínea de la luz, su reflexión en una superficie lisa, tal como la de un espejo y cómo y por qué se refracta en una superficie límite tal como la que separa el aire y el agua, o el aire y el vidrio. Para todos estos fenómenos la teoría corpuscular proporciona una explicación sencilla.

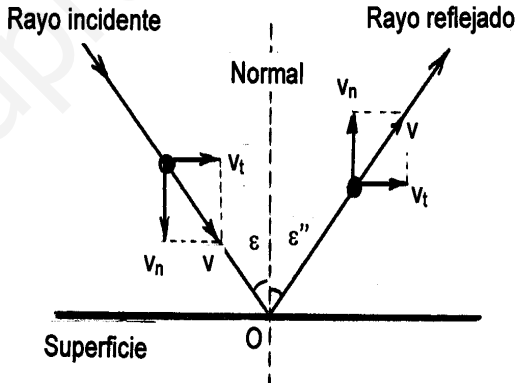
Isaac Newton (1642-1727) publica en 1704 su ***Óptica*** y asienta el ***modelo corpuscular*** de la luz sobre las ideas de Descartes, al suponer que la luz está formada por partículas materiales, a las que llamó ***corpúsculos***, que son lanzadas a gran velocidad por los cuerpos emisores de luz.

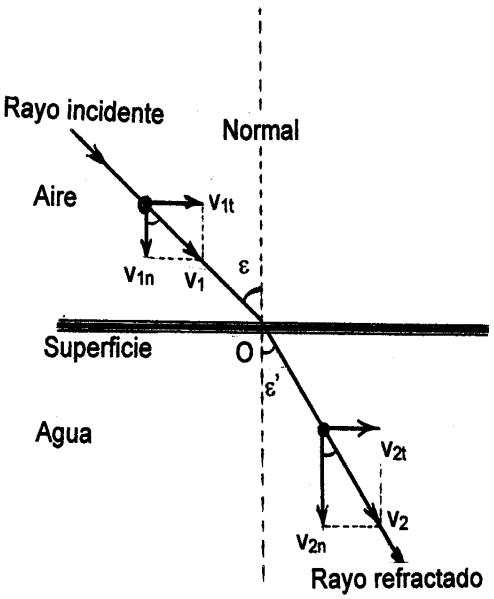
Este modelo corpuscular de Newton explica la propagación rectilínea y las leyes de la reflexión y de la refracción, y se basa en:

a) ***Propagación rectilínea*** de la luz, al suponer que la luz está formada por pequeñas partículas que viajan a gran velocidad de forma que sus trayectorias son líneas rectas, las cuales constituyen los rayos luminosos.

b) ***Ley de la reflexión***. Al incidir la luz en una superficie lisa como la de un espejo, choca contra ella y se refleja del mismo modo que una bola metálica rebota en una plancha de acero. En dicho choque, se conserva la componente tangencial v_t de la velocidad (tangente a la superficie reflectante), mientras que la componente normal v_n invierte su sentido (figura). Es evidente que, en estas condiciones (ver figura), se verifica:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon''}$$





c) ***Ley de la refracción*** o cambio de la dirección de la trayectoria experimentada por la luz cuando pasa de un medio a otro diferente, por ejemplo, del aire al agua. La refracción se debe a que las partículas de la luz son atraídas (por tanto, frenadas) por el medio. Los medios más densos (en este caso el agua) frenan menos los corpúsculos luminosos que los menos densos (el aire), de forma que el ángulo que forman los rayos

de la luz con la normal es menor en el agua que en el aire. En este caso también se conserva la componente tangencial v_t de la velocidad, mientras que la componente normal v_n, a causa de una menor atracción de los corpúsculos luminosos por el agua, es mayor que para el aire. Se verifica (figura):

$$v_{1t} = v_{2t} \quad v_1 \operatorname{sen}\varepsilon = v_2 \operatorname{sen}\varepsilon' \qquad \boxed{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon'} = \frac{v_2}{v_1}}$$

B.- TEORÍA ONDULATORIA

Hacia la mitad del siglo XVII, aunque la mayor parte de los investigadores en el campo de la óptica aceptaban la teoría corpuscular, había comenzado a progresar la idea de que la luz podía ser un movimiento ondulatorio de cierta naturaleza. ***Christian Huygens*** demostró, en 1670, que las leyes de la reflexión y de la refracción podían explicarse basándose en la teoría ondulatoria: Ya lo hemos visto en el Tema 5, 8 a). Curiosamente, observamos una contradicción entre la explicación de Newton y la de Huygens; basta comparar la ecuación anterior de Newton:

$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon'} = \frac{v_{2^{o}medio}}{v_{1^{o}medio}}$ con la de Huygens, Tema 5, 8 a (27), que podemos escribir: $\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon'} = \frac{v_{1^{o}medio}}{v_{2^{o}medio}}$

Aún cuando parecía repugnar la idea de que la velocidad de la luz fuese mayor en los medios más densos (en el agua mayor que en el aire), sin embargo todavía nadie las había medido: era un asunto que quedaba pendiente de resolución. Debido a la gran autoridad de Newton, la contradicción no tuvo gran trascendencia en su época.

La teoría ondulatoria no fue aceptada de momento. Se objetó que si la luz era un movimiento ondulatorio, debía poderse ver detrás de las esquinas, puesto que las ondas pueden doblar los obstáculos en su trayectoria. Sabemos ahora que las longitudes de onda de las ondas luminosas son tan pequeñas que la flexión, aunque tiene lugar en realidad, es tan leve que no se observa ordinariamente. Como hecho real, la flexión de una onda luminosa en los bordes de un objeto, fenómeno conocido con el nombre de difracción, fue observado ya por Grimaldi en el año 1665, pero la importancia de sus observaciones no fue comprendida en aquel tiempo.

Hasta 1827 no se demostró, gracias a los experimentos de T. Young y A. Fresnel sobre interferencias, que existían fenómenos ópticos para cuya explicación resultaba inadecuada la teoría corpuscular: eran los fenómenos de interferencia y difracción (que para la luz serán estudiados más adelante) entre otros. Los experimentos de Young le permitieron medir la longitud de onda de las ondas luminosas y Fresnel demostró que la propagación rectilinea de la luz, lo mismo que los efectos de difracción observados por Grimaldi y otros, podían ser explicados basándose en el comportamiento de las ondas de muy corta longitud de onda.

Hacia el 1850, L. Foucault consiguió, por fin, obtener una medida bastante precisa de la velocidad de la luz en el agua (como se verá; método del espejo giratorio) comprobando que ésta es menor que la medida obtenida para el aire, como suponía Huygens. El resultado fue concluyente para demostrar que la teoría corpuscular era insostenible.

La naturaleza exacta de las ondas luminosas y del medio en el cual se transmitían continuaba sin resolverse. El ***éter***, inventado por Huygens como el hipotético medio material de propagación de las ondas luminosas y que se suponía llenaba el espacio, que de otro modo estaría vacío, y que penetraba los poros de los cuerpos transparentes, mostró tener ciertas propiedades sorprendentemente contradictorias. Si las ondas luminosas fueran ondas elásticas análogas a las ondas sonoras, sería necesario para explicar la gran velocidad de propagación observada en la luz, que el éter fuera extremadamente rígido. Sin embargo, no ofrece resistencia al movimiento de un cuerpo, puesto que los planetas se mueven a través de él sin disminución apreciable de sus velocidades.

C.- TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

El gran avance siguiente en la teoría de la luz fue el trabajo del físico escocés ***James Clerk Maxwell***. En 1873 Maxwell demostró que un circuito eléctrico oscilante debía radiar ondas electromagnéticas. La velocidad de propagación de estas ondas podía calcularse a partir de medidas puramente eléctricas y magnéticas, y resultó ser, aproximadamente, $3x10^8$ m/s. Dentro de los límites de los errores experimentales, resultaba ser casualmente igual a la velocidad de propagación de la luz ya determinada experimentalmente. Parecía evidente preguntarse si la luz consistía en ondas electromagnéticas de longitud de onda extremadamente corta. Esta fue la hipótesis adoptada por Maxwell. Quince años más tarde de establecer Maxwell este principio, Heinrich Hertz, utilizando un circuito oscilante de pequeñas dimensiones, logró producir ondas de corta longitud de onda (que hoy llamamos ultracortas) de indudable origen electromagnético, y demostró que poseían todas las propiedades de las ondas luminosas. Podían ser reflejadas, refractadas, concentradas por una lente, polarizadas, etc., lo mismo que las ondas luminosas. La teoría electromagnética de la luz, de Maxwell, y su comprobación experimental por Hertz, constituyeron uno de los triunfos más resonantes de la Física. A finales del siglo XIX era creencia general que en el futuro se podría añadir muy poco, si es que cabía añadir algo, a nuestro conocimiento acerca de la naturaleza de la luz. ... ¡pero no sucedió así!

D.- TEORÍA CUÁNTICA

La teoría electromagnética clásica no podía explicar, entre otros, el fenómeno de la emisión fotoeléctrica o efecto fotoeléctrico, esto es, la expulsión de electrones de un conductor por medio de la luz que incide sobre su superficie. En 1905 Einstein amplió una idea propuesta cinco años antes por ***Max Planck*** y postuló que la energía de un haz luminoso, en lugar de estar distribuida por el espacio en los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética, está concentrada en pequeños paquetes, llamados fotones (¿vuelta a la teoría corpuscular?). Se conservaba un vestigio del aspecto ondulatorio al considerar que el fotón tiene una frecuencia, y que su energía resulta proporcional a ella, E = hf. El mecanismo del efecto fotoeléctrico consistía en una transmisión de la energía de un fotón a un electrón. Los experimentos de Millikan demostraron que la energía cinética de los fotoelectrones coincidía exactamente con la fórmula propuesta por Einstein.

Otra confirmación sorprendente de que la luz está formada por fotones es el Efecto Compton. A. H. Compton logró determinar, en 1921, el movimiento de un fotón y un solo electrón, antes y después de un *choque* entre ellos, y encontró que se comportaban como cuerpos materiales que tenían energía cinética y momento lineal, cuyas dos magnitudes se conservan después del choque (choque elástico). Tanto el efecto fotoeléctrico como el efecto Compton parecen, pues, exigir una vuelta a la teoría corpuscular de la luz.

Carácter dual de la luz.- El punto de vista actual de los físicos, frente a experimentos aparentemente contradictorios, es aceptar el hecho de que la luz parece tener una doble naturaleza. Los fenómenos de propagación de la luz (reflexión, refracción, interferencias, difracción, polarización) encuentran su mejor explicación dentro de la teoría ondulatoria electromagnética, mientras que la interacción entre la luz y la materia, en los procesos de absorción y emisión, es un fenómeno aparentemente corpuscular, para cuya explicación es preciso acudir a las teorías cuánticas.

2.- ÓPTICA

La Óptica es la ciencia que estudia la luz y los fenómenos relacionados con ella. Según las bases utilizadas en dicho estudio la Óptica se divide en:

+ Óptica Geométrica: Se fundamenta en el concepto de *rayo de luz como trayectoria de la energía luminosa* (o bien como trayectoria de las partículas luminosas emitidas por los cuerpos luminosos, según la hipótesis de Newton; o bien como direcciones de propagación de las ondas, según la concepción de Huygens). En realidad, se ocupa exclusivamente de cuestiones relacionadas con las trayectorias seguidas por la luz en su propagación, haciendo caso omiso de su naturaleza.

+ Óptica Física: Se basa en el carácter de ondas electromagnéticas que presenta la luz. Ésta obedece a las leyes generales del movimiento ondulatorio y a las del electromagnetismo.

+ Óptica Cuántica, relacionada con las interacciones entre la luz y las partículas atómicas, requiriendo para su estudio el empleo de los métodos de la mecánica cuántica.

Estos aspectos de la Óptica podrían ser denominados con más propiedad como macroscópico, microscópico y atómico, para indicar de modo más explicito su respectivo campo de aplicación.

3.- VELOCIDAD DE LA LUZ

La velocidad de la luz en el vacío es una de las constantes más importantes de la Naturaleza. Su valor es tan grande ($3x10^8$ m/s, aproximadamente) que no pudo determinarse experimentalmente hasta 1675. Hasta entonces era creencia general que la luz se propagaba con velocidad infinita.

A.- INTENTOS DE GALILEO

Los primeros intentos para medir la velocidad de la luz fueron realizados en 1667 utilizando un método propuesto por Galileo.

Dos experimentadores estaban situados en las cumbres de dos cerros separados por una distancia aproximada de 1600 metros. Cada uno estaba provisto de una linterna, siendo realizado el experimento durante la noche. Uno de los hombres descubría su linterna y, al observar su luz, el otro descubría la suya. Podía entonces calcularse la velocidad de la luz conociendo la distancia entre las linternas y el tiempo transcurrido entre el instante en que el primer observador descubría su linterna y el instante en que percibía la luz procedente de la otra.

Aunque el experimento era en principio enteramente correcto, sabemos actualmente que la velocidad de la luz es demasiado grande para que el intervalo de tiempo ($\Delta t \sim 11\ \mu s$) pueda medirse en esta forma con alguna precisión fiable.

B) MÉTODO ASTRONÓMICO DE RÖMER

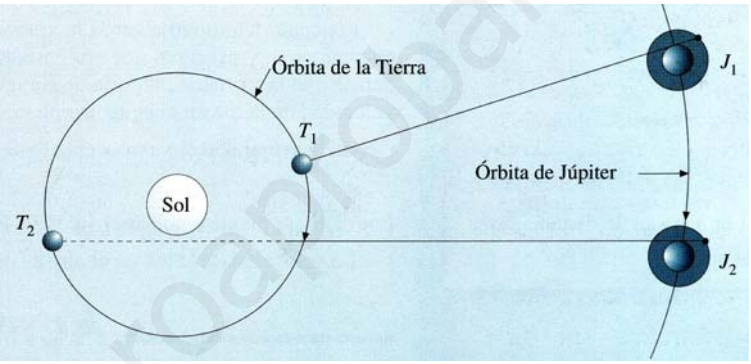
Ocho años más tarde, en 1675, el astrónomo danés Olaf Römer, en virtud de observaciones astronómicas realizadas sobre uno de los satélites del planeta Júpiter, obtuvo la primera prueba determinante de que la luz se propaga con velocidad finita.

www.yoquieroaprobar.es

Júpiter tiene once pequeños satélites o lunas, cuatro de los cuales son suficientemente brillantes para que puedan verse con un anteojo regularmente bueno, o con un par de prismáticos. Los satélites aparecen como minúsculos puntos brillantes a un lado o al otro del disco del planeta. Estos satélites giran alrededor de Júpiter como la Luna lo hace alrededor de la Tierra. Como el plano de sus órbitas es casi el mismo que aquél en el que giran la Tierra y Júpiter, cada uno de ellos es eclipsado por el planeta durante una parte de cada revolución.

Römer trataba de medir el periodo de uno de los satélites utilizando el intervalo de tiempo transcurrido entre dos eclipses consecutivos (unas 42 h, aproximadamente). Comparando los resultados obtenidos durante un periodo largo de tiempo, encontró que cuando la Tierra se alejaba de Júpiter, los intervalos de tiempo eran algo más largos que el valor medio, mientras que cuando se aproximaba a Júpiter, los intervalos eran algo más cortos.

De ello dedujo, correctamente, que la causa de estas diferencias era la variación de la distancia entre Júpiter y la Tierra. El valor encontrado por él para la velocidad de la luz fue de 48000 leguas por segundo ($\approx$ 214000 km/s); aunque alejado del que hoy puede calcularse, sin embargo sirvió como demostración de que la velocidad de luz es finita, animando a la búsqueda de métodos más precisos.



Hoy podríamos calcular con más exactitud esta velocidad, al disponer de medidas más precisas. Sirva como ejercicio:

Datos:

Periodo de Júpiter en torno al Sol:	$T_J = 3{,}74\text{x}10^8$ s $\approx$ 12 años
Periodo de la Tierra en torno al Sol:	$T_T = 3{,}16\text{x}10^7$ s $\approx$ 1 año
Radio medio de la órbita terrestre:	$R_{TS} = 1{,}49\text{x}10^{11}$ m
Nº de eclipses por año:	N = 206 eclipses/año
Retardo acumulado en medio año:	Δt = 1000 s $\cong$ 16 min

Aproximamos (figura): $T_2J_2 - T_1J_1 \cong 2\ R_{TS}$

Entonces, $$c = \frac{T_2J_2 - T_1J_1}{\Delta t} \cong \frac{2.R_{TS}}{\Delta t} = \frac{2\text{x}1{,}49\text{x}10^{11}}{1000} = 2{,}98\text{x}10^8 \text{ m/s}$$

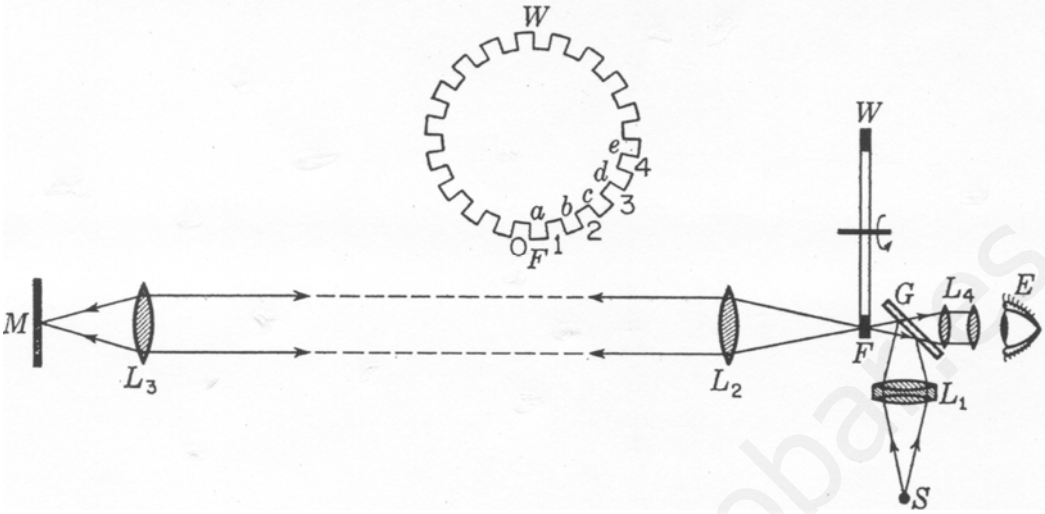
C) MÉTODO DE FIZEAU

H. L. Fizeau consiguió en 1849 medir la velocidad de la luz, por primera vez, mediante un método no astronómico, utilizando una trayectoria luminosa sobre la superficie terrestre. En síntesis, su determinación se basa en emitir un destello de luz que se refleje en un espejo muy distante y medir el tiempo de ida y vuelta hasta el observador.

El experimento se llevó a cabo mediante el aparato representado en la figura.

La lente L_1 forma una imagen del manantial luminoso S en un punto próximo al borde F de una rueda dentada WF que puede hacerse girar rápidamente. G es una lámina plana semiplateada (deja pasar el 50% de la luz y refleja el otro 50%), inclinada 45º respecto de los ejes de la figura.

Supongamos, en primer lugar, que la rueda no está girando y que la luz pasa a través de una de las aberturas que quedan entre los dientes. Las lentes L_2 y L_3, que están separadas por una distancia aproximada de 8,6 Km, forman una segunda imagen sobre el espejo plano *M.* La luz reflejada en *M* vuelve sobre su trayectoria, y es reflejada, en parte, por la lámina *G,* atravesando la lente L_4 y penetrando en el ojo de un observador colocado en E.



Si se hace girar la rueda WF, la luz procedente de S *es cortada* en una serie de trenes de luz de longitud limitada (destellos). Si la velocidad de rotación es tal que durante el tiempo que ha empleado un tren de luz en llegar hasta el espejo y volver la rueda dentada se ha movido, situando en F un segmento opaco, no llegará al observador E la luz reflejada.

Al ir aumentando la velocidad de rotación de la rueda dentada, ésta llegará a un valor para el cual la luz transmitida a través de una abertura volverá a pasar de vuelta a través de la siguiente abertura, y se observará de nuevo en E la luz. Conociendo esta velocidad angular, el número de dientes de la rueda (iguales y equidistantes) y la distancia de la rueda WF al espejo M, puede calcularse la velocidad de la luz. Las medidas de Fizeau no fueron de gran precisión, pero su método constituyó un importante avance en el modo de abordar el problema. Obtuvo un valor de $3{,}15 \times 10^8$ ms

Datos del experimento de Fizeau:

Distancia de la rueda WF al espejo M: d = 8’624 km

Nº de dientes de la rueda: N = 720 dientes

Velocidad de rotación de la rueda dentada: f = 12’6 rps $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi f = 25'2\pi$ rd/s

El tiempo t que tarda la luz en recorrer su camino es: $t = \frac{2d}{c} = \frac{1'7248 \times 10^4}{c}$ donde llamamos c, como es costumbre común, a la velocidad de la luz en el vacío.

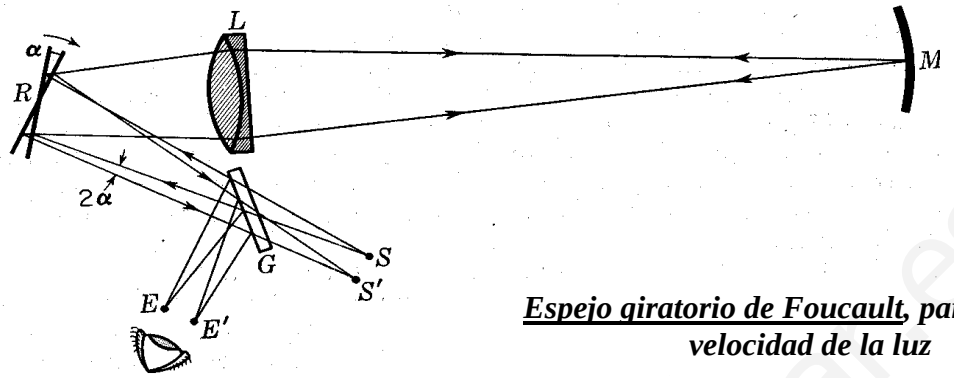
En este mismo tiempo t se ha debido de producir el desplazamiento angular de un diente: Por tanto, $t = \frac{2\pi/2N}{\omega} = \frac{2\pi/1440}{25'2\pi} = 5'511 \times 10^{-5}$. En consecuencia, $c = \frac{1'7248 \times 10^4}{5'511 \times 10^{-5}} = 3'128 \times 10^8$ m/s

Frente al valor de la velocidad de la luz, hoy admitido, c = $2'9979 \times 10^8$ m/s, representa una desviación del 4%. ¡Excelente resultado para aquellos tiempos...!

D) OTROS MÉTODOS

Una constante tan importante como es la velocidad de la luz ha llevado a muchos físicos a intentar cálculos más precisos, no sólo en el siglo XIX sino también en nuestro pasado siglo XX. Alguno de estos métodos son altamente sofisticados, y los resultados se expresan en la tabla siguiente.

Previamente mencionemos el método de Foucault. Es una modificación del de Fizeau, reemplazando la rueda dentada por un espejo giratorio. Tiene especial interés este científico por el hecho de que se debe a él el haber medido la velocidad de la luz en el agua; lo consiguió intercalando entre la rueda dentada WF (o el espejo giratorio) y el espejo M un tubo lleno de agua. Dedujo así que la velocidad de la luz en el agua es menor que en el aire. Históricamente este hecho fue muy importante para desechar la teoría corpuscular de la luz y afianzar la teoría ondulatoria de Huygens.



Espejo giratorio de Foucault, para medir la velocidad de la luz

Medidas precisas de la velocidad de la luz

Fecha	Investigadores	Método	Resultado, Km/seg
1926	Michelson	Espejo giratorio	299 796 ± 4
1935	Michelson, Pease y Pearson	Espejo giratorio en el vacío	299774 ± 11
1940	Hüttel	Célula de Kerr	299768 ± 10
1941	Anderson	Célula de Kerr	299776 ± 6
1950	Bol	Resonador de cavidad	299.789,3 ± 0,4
1950	Essen	Resonador de cavidad	299792,5 ± 3,0
1951	Bergstrand	Célula de Kerr	299793,1 ± 0,2
1951	Aslakson	Radar	299794,2 ± 1,9
1952	Froome	Interferómetro de microondas	299792,6 ± 0,7

Según el Real Decreto del 27 de octubre de1989, Num. 1317/1989, se establece como valor legal de la velocidad de la luz en el vacío

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

www.yoquieroaprobar.es

T E M A 8.-

ÓPTICA GEOMÉTRICA . I .

SUMARIO:

A.- PRINCIPIOS Y LEYES GENERALES
8.1.- Definiciones
8.2.- Reflexión y refracción
8.3.- Reflexión total
8.4.- Láminas de caras planas

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

B.- REPRESENTACIÓN ÓPTICA
8.5.- Definiciones
8.6- Dioptrio esférico
8.7.- Óptica paraxial

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

www.yoquieroaprobar.es

A.- PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES

1.- DEFINICIONES

La luz, en su propagación, obedece a leyes geométricas. El estudio geométrico de la propagación de la luz es lo que constituye la Óptica Geométrica.

Hace caso omiso a cuestiones tales como la naturaleza de la luz, los mecanismos de emisión y absorción de luz por los cuerpos, las interacciones de la luz en su propagación, ...

Se ocupa fundamentalmente de *determinar la* ***trayectoria*** *de los rayos luminosos a través de diferentes medios.* Tal determinación lleva posteriormente a *aplicaciones* de gran interés, al posibilitar la manipulación de dichos medios de modo que la propagación de la luz sea aprovechada para la construcción de instrumentos ópticos u otras utilidades.

La ***Óptica Geométrica*** se fundamenta es dos sencillos conceptos:

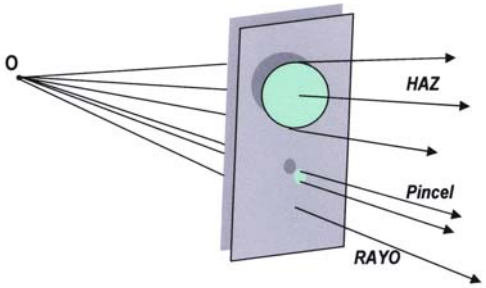
+ *rayo luminoso, que caracteriza la luz*
+ *índice de refracción, que caracteriza el medio en el que se propaga la luz*

y un único postulado físico:

+ *principio de Fermat*

a) Rayo luminoso

Geométricamente, (fig.), si colocamos un punto emisor O ante una pantalla opaca con un orificio, dicho punto y el orificio determinan un cono lleno de luz que recibe el nombre de *haz*. Si las dimensiones del orificio son pequeñas el cono de luz se llama *pincel*. Si hacemos que el diámetro del orificio tienda a cero, llegamos a una abstracción del haz, sin realidad física que llamamos *rayo luminoso.*



b) Índice de refracción

Respecto de cualquier sistema de referencia, la luz se propaga en el vacío con una velocidad, c, invariante. Según las más recientes medidas, c = (299792458.0 ± 0.3) $m.s^{-1}$. La velocidad en los medios materiales, v, varía con la naturaleza y constitución de éstos. Cada medio se caracteriza, desde el punto de vista óptico, por su *índice de refracción* que se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la que lleva en el medio considerado. Es decir,

$$n = \frac{c}{v}$$

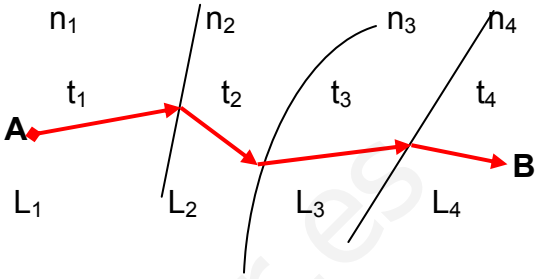
Cuando la velocidad de la luz en un medio material es igual en todos los puntos y en todas las direcciones, el medio se llama *homogéneo* e *isótropo*, y su índice de refracción es constante. Si en cada punto varía según la dirección de propagación, el medio se denomina *anisótropo*, Y si la velocidad, y por tanto el índice, varían de unos puntos a otros, pero en cada uno de ellos es independiente de la dirección, el medio es *heterogéneo,* llamado también *medio GRIN* (GRadiente de ÍNdice).

Son medios homogéneos e isótropos los vidrios ópticos; es heterogénea la atmósfera, cuyo índice varía con la altura; y son anisótropos los cristales de sustancias que no cristalizan en el sistema regular o cúbico, como el cuarzo o el espato de Islandia.

Desarrollaremos la Óptica Geométrica suponiendo siempre *medios homogéneos e isótropos*.

Camino óptico: Si en un medio homogéneo de índice n la luz recorre un trayecto L, se define *camino óptico* C así:

$$C \equiv n\,L$$



Si el rayo atraviesa diferentes medios de índices n_i, recorriendo en ellos trayectos L_i, el camino óptico total será:

$$C = n_1L_1 + n_1L_1 + \ ... \ = \sum n_iL_i$$

Ya que cada índice verifica que $n_i = c/v_i$ y cada trayecto $L_i = v_i\,t_i$, se tiene que $n_iL_i = c\,t_i$ y por lo tanto:

$$C = ct_1 + ct_2 + \ ... \ = c(t_1 + t_2 + ...) = c\,t$$

Así pues, el ***camino óptico recorrido por un rayo de luz*** puede también expresarse como ***el producto de la velocidad de la luz en el vacío por el tiempo que tarda la luz en recorrer la trayectoria***.

c) Principio de Fermat

Establece que "***el camino óptico a lo largo de una trayectoria real de luz (rayo luminoso) es estacionario"*** (es decir, mínimo, máximo o constante). Sin entrar en detalles, este principio,

+ aplicado a la propagación de la luz en un medio homogéneo se reduce a decir: ***"La luz, en un medio homogéneo, se propaga en línea recta"***

+ aplicado al paso de la luz de un medio a otro, separados por una superficie (*dioptrio*), conduce a las leyes de Descartes.

2.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Recordamos estas leyes de Descartes:

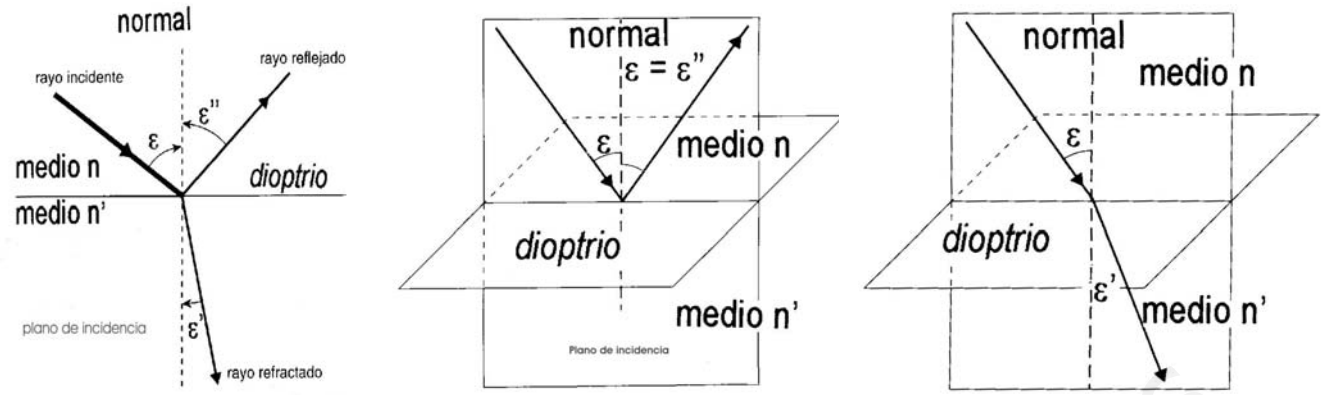
+ El rayo incidente, el reflejado, el refractado y la normal al dioptrio se encuentran en el mismo plano (plano de incidencia).

+ El ángulo de incidencia es igual al de reflexión: $\varepsilon = \varepsilon''$

+ Entre los ángulos de incidencia ε y de refracción ε' existe la relación: $n\,\text{sen}\varepsilon = n'\,\text{sen}\varepsilon'$ que también se denomina *ley de Snell*,
y que resulta de sustituir el concepto de velocidad de la luz por el más práctico de índice de refracción:

$$\frac{\text{sen}\varepsilon}{\text{sen}\varepsilon'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n}{c/n'} = \frac{n'}{n} \quad \rightarrow \quad n\,\text{sen}\varepsilon = n'\,\text{sen}\varepsilon'$$

www.yoquieroaprobar.es

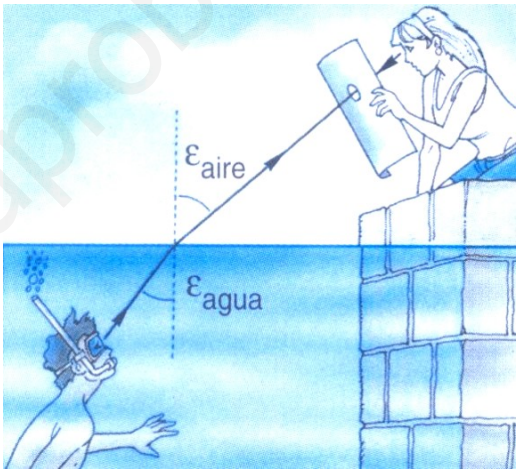


Rayos: incidente reflejado y refractado

ε = ε''

n senε = n' senε'

Consecuencias



a) Las trayectorias de luz a través de distintos medios son reversibles (fig.).

b) La reflexión de la luz puede ser considerada como una refracción en la que el segundo medio presenta un índice n' = - n. En cuyo caso, aplicando la ley de Snell resulta:

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon'$$
$$n \operatorname{sen}\varepsilon = -n \operatorname{sen}\varepsilon'$$
$$\operatorname{sen}\varepsilon = -\operatorname{sen}\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\varepsilon'$$

c) En la refracción, según la ley de Snell,

+ el rayo refractado se acerca a la normal cuando el segundo medio es más refringente que el primero ($n' > n$). Por ejemplo, para un rayo que pasa del aire ($n = 1$) al agua ($n' = 4/3$). En efecto, $n' > n \Rightarrow \varepsilon' < \varepsilon$.

+ el rayo refractado se aleja de la normal al pasar de un medio más refringente a otro menor. Por ejemplo, un rayo que pasa del agua ($n = 4/3$) al aire ($n' = 1$). En efecto, $n' < n \Rightarrow \varepsilon' > \varepsilon$.

d) Reflexión total.

3.- REFLEXIÓN TOTAL

Al pasar la luz de un medio a otro de menor índice, $n' < n$, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia, $\varepsilon' > \varepsilon$ Por lo tanto, existe un ángulo de incidencia crítico o ***ángulo límite*** ε_L para el cual el rayo refractado sale rasante a la superficie de separación de ambos medios.

www.yoquieroaprobar.es

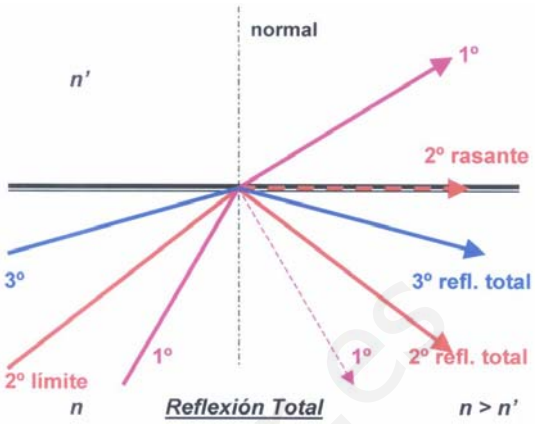
De otro modo, ***"ángulo límite es el ángulo de incidencia para el cual el ángulo de refracción vale 90º"*** (para $\varepsilon = \varepsilon_L$ es $\varepsilon' = 90º$)

Aplicando la ley de Snell a este caso, se tiene:

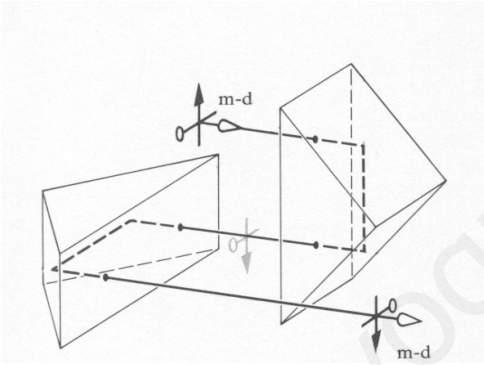
$$n \operatorname{sen}\varepsilon_L = n' \operatorname{sen} 90º \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varepsilon_L = \frac{n'}{n}$$

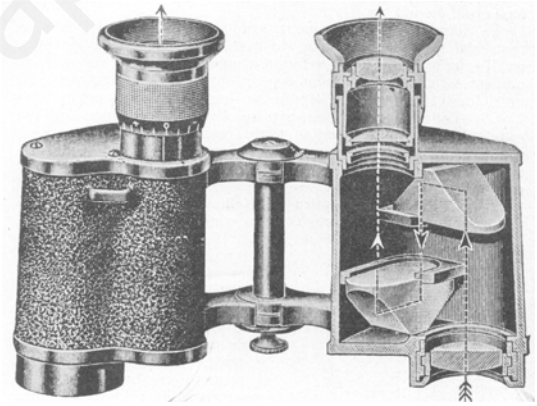
Para ángulos de incidencia superiores a ε_l ($\varepsilon > \varepsilon_L$), la luz no se refracta sino que se refleja totalmente en la superficie de separación. Este fenómeno se llama <u>*reflexión total.*</u>

Ocurre, por ejemplo, cuando la luz pasa del agua (n = 1,33) al aire (n' = 1).



Los ***periscopios*** de los submarinos y los ***prismáticos*** hacen uso de este fenómeno de reflexión total. Utilizan, como sistema productor de la reflexión total un conjunto de prismas ópticos cuya sección es un triángulo rectángulo isósceles (prismas de Porro). Cualquier rayo que incide perpendicularmente a una de sus caras, entra en el vidrio (de índice ≈ 1,5) sin desviarse, e incide en la siguiente cara con un ángulo de 45º, superior al ángulo límite del vidrio (≈ 42º), experimentando la reflexión total. Las figuras siguientes informan gráficamente lo explicado.





Otra aplicación de gran interés y utilidad en las técnicas de hoy día es la ***<u>fibra óptica</u>***. Es un sistema formado por filamentos de vidrio u otro dieléctrico muy finos (grosor del orden de la micra). Los rayos de luz experimentan en su interior la reflexión total al incidir sobre la superficie cilíndrica de la fibra, puesto que estos filamentos están recubiertos con un material de índice menor. Las señales luminosas que entran en la fibra son así transportadas y orientadas por ella.

En la actualidad, la aplicación más importante de las fibras ópticas es la transmisión de información a distancia: telefonía y comunicaciones. Asimismo, en medicina es muy utilizada en el transporte de imágenes desde cavidades internas (endoscopía).

www.yoquieroaprobar.es

4.-LÁMINAS DE CARAS PLANAS

A.- LÁMINAS DE CARAS PLANOPARALELAS

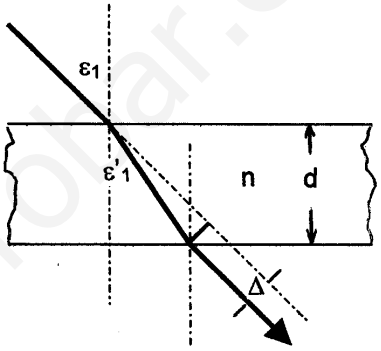
Una lámina transparente, de caras planas y paralelas puede considerarse como un conjunto de dos dioptrios planos.

En el caso más sencillo, supongámosla de índice de refracción n, de grosor d, y situada en el aire ($n_{aire} \approx 1$).

Por consideraciones geométricas, vemos que el ángulo de refracción ε'_1 el primer dioptrio es igual al de incidencia ε_2 en el segundo, por lo que:

$$\text{sen}\varepsilon_1 = n\ \text{sen}\varepsilon'_1 = n\ \text{sen}\varepsilon_2 = \text{sen}\varepsilon'_2$$

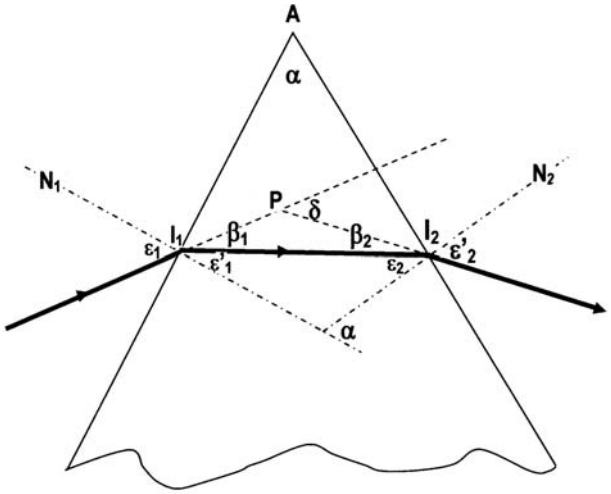
$$\Rightarrow \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon'_2$$



es decir, el rayo emergente sale paralelo al de incidencia. Ahora bien, sale habiendo experimentado un desplazamiento Δ. Calcule el alumno, como problema, dicho desplazamiento en función del índice de refracción n, del espesor d y del ángulo de incidencia ε_1. Se obtiene:

$$\Delta = d.\text{sen}\varepsilon_1\left(1-\sqrt{\frac{1-\text{sen}^2\varepsilon_1}{n^2-\text{sen}^2\varepsilon_1}}\right)$$

B.- PRISMA ÓPTICO



Un medio transparente, limitado por dos superficies planas que forman un ángulo diedro se llama ***prisma óptico***. El ángulo α formado por ambas superficies se denomina ***ángulo del prisma***. Sea n el índice de refracción del prisma. Supongamos el prisma situado en el aire (índice 1). Estudiemos la refracción de un rayo que incide en I_1 sobre la primera cara, bajo un ángulo ε_1, penetra en el interior del prisma y sale por I_2 bajo un ángulo emergente ε_2'. El ángulo δ determinado por los rayos incidente y emergente se denomina ***desviación angular*** del rayo.

Geométricamente se ve que: $\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2$

$$\delta = \beta_1 + \beta_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - (\varepsilon_1' + \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \alpha$$

La refracción en las dos superficies planas conduce a las ecuaciones:

$$\text{sen}\varepsilon_1 = n\ \text{sen}\varepsilon'_1 \qquad n\ \text{sen}\varepsilon_2 = \text{sen}\varepsilon'_2$$

Así pues, éstas son las cuatro relaciones del prisma óptico:

$$\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \qquad \delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \alpha \qquad \text{sen}\varepsilon_1 = n\ \text{sen}\varepsilon'_1 \qquad n\ \text{sen}\varepsilon_2 = \text{sen}\varepsilon'_2$$

www.yoquieroaprobar.es

El ángulo de desviación δ depende del ángulo de incidencia ε_1, para un prisma determinado. Se puede demostrar que este ángulo de ***desviación*** es ***mínimo***, δ_{min}, cuando el rayo recorre el interior del prisma simétricamente. Es decir, cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$ y $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$.

Entonces, $\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2 = 2\,\varepsilon_1'$ y $\delta_{min} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \alpha = 2\,\varepsilon_1 - \alpha$

La ecuación $\text{sen}\varepsilon_1 = n\ \text{sen}\varepsilon'_1$ puede escribirse así: $n = \dfrac{\text{sen}\varepsilon_1}{\text{sen}\varepsilon_1'} = \dfrac{\text{sen}(\frac{\delta_{min}+\alpha}{2})}{\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}$

lo cual permite calcular el índice de refracción del prisma midiendo su ángulo y el de desviación mínima para un rayo.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Calcular la velocidad de propagación y la longitud de onda, en el agua y en el vidrio, de un rayo de luz amarilla cuya longitud de onda en el vacío es 5890 Å. ¿Cuál es el índice de refracción relativo del vidrio respecto al agua? Los índices de refracción del vidrio y del agua son n_v = 1'52 y n_a = 1'33.

La frecuencia caracteriza al rayo de luz, mientras que su longitud de onda depende también del medio en el que se propaga. Por ejemplo, sea f la frecuencia, λ_o la longitud de onda en el vacío y c la velocidad de propagación en él; en el agua, sean respectivamente λ_a y v_a; y en el vidrio, λ_v y v_v. Se verifica: $f = \frac{c}{\lambda_o} = \frac{v_a}{\lambda_a} = \frac{v_v}{\lambda_v}$

Como además, según la definición de índice de refracción $c = n_a v_a = n_v v_v$ resulta:

$$\lambda_o = n_a \lambda_a = n_v \lambda_v$$

Agua: $v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3x10^8}{1.33} =$ ***2'25x10^8 m/s*** $\lambda_a = \frac{\lambda_o}{n_a} = \frac{5{,}89x10^{-7}}{1{,}33} = 4{,}428x10^{-7}\,m =$ ***442'8 nm***

Vidrio: $v_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3x10^8}{1{,}52} =$ ***1'97x10^8 m/s*** $\lambda_v = \frac{\lambda_o}{n_v} = \frac{5{,}89x10^{-7}}{1{,}52} = 3{,}875x10^{-7}\,m =$ ***387'5 nm***

El índice relativo vidrio-agua es: $n_{va} = \frac{n_v}{n_a} = \frac{1{,}52}{1{,}33} =$ ***1'14***

2.- Sobre una lámina de vidrio, planoparalela de 8 cm de grosor, y cuyo índice de refracción es 1.47, incide un rayo de luz bajo un ángulo de incidencia de 70º. ¿Qué desviación experimenta el rayo?

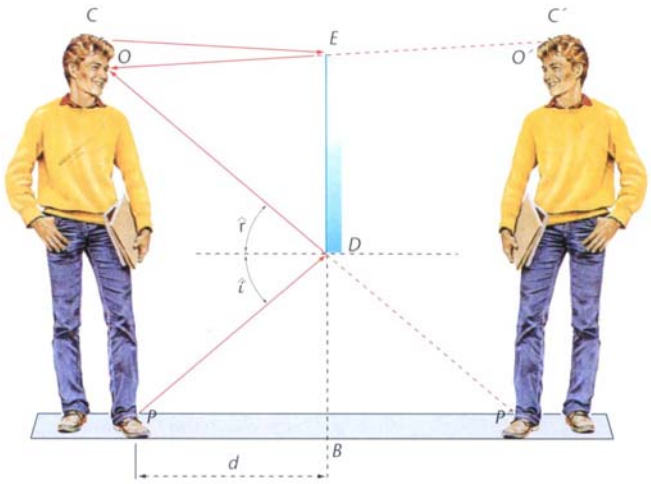
El rayo sale paralelo al incidente, pero experimenta una desviación dada por:

$$\Delta = d.\text{sen}\varepsilon_1\left(1-\sqrt{\frac{1-\text{sen}^2\varepsilon_1}{n^2-\text{sen}^2\varepsilon_1}}\right) = 8x0{,}9397x\left(1-\sqrt{\frac{1-0{,}8830}{2{,}1609-0{,}8830}}\right) = 8x0{,}9397x0{,}1548 = \textbf{\textit{1'16 cm}}$$

3.- Una persona de 1,70 m de altura se coloca ante un espejo plano. Sabiendo que sus ojos distan del suelo 1,60 m, establece la altura del espejo para que se vea de pies a cabeza, y a qué altura del suelo ha de colocarse.

En la figura, la imagen de la persona se ha construido teniendo en cuenta que es simétrica al objeto respecto del espejo.

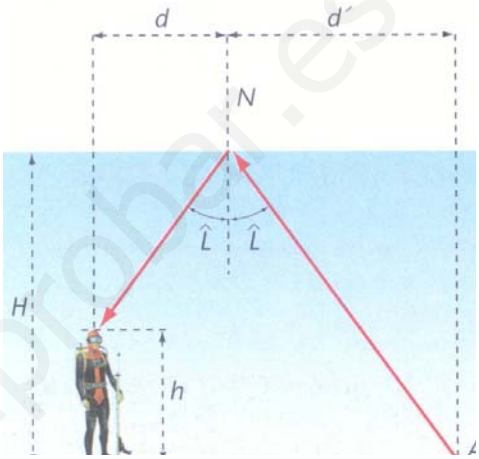
El punto imagen P' es percibido por los ojos por el rayo DO, que es el reflejado del PD. Como el ángulo de incidencia es igual que el de reflexión, la altura a la que debe ponerse el espejo (distancia DB) es ½ OP; es decir, a 0,80 m de altura



Siguiendo el mismo procedimiento, para observar el otro extremo de la persona (punto C') se trazan los rayos CE y EO, de donde se deduce que la persona ve íntegramente su imagen si la longitud del espejo es: ½ CO + ½ OP; es decir, la mitad de su altura, ***0'85 m***.

Nota: Las magnitudes solicitadas en el ejercicio no dependen de la distancia d entre la persona y el espejo. Si el espejo es de mayor longitud, por ejemplo, si se extiende por debajo del punto D, la persona aprecia parte del suelo que hay entre ella y el espejo.

4.- Un buceador de 1,8 m de altura se encuentra de pie en el fondo de un lago, a una prfundidad de 5,0 m. Calcula la distancia mínima a la que se encuentran los puntos del fondo del lago que el buzo puede ver reflejados en la superficie del agua (n_{agua} = 4/3).



El buzo ve los puntos del fondo por la reflexión total que se produce en la superficie de separación agua-aire. La reflexión total se presenta si los rayos que proceden de los puntos del fondo del lago inciden en la superficie con un ángulo superior o igual al ángulo límite; si el ángulo de incidencia es inferior, la luz se refracta (y pasa a propagarse al aire).

Si A es el punto solicitado, el ángulo de incidencia del rayo dibujado es el ángulo límite. De acuerdo con la figura, y teniendo en cuenta la segunda ley de la reflexión:

$$D = d' + d = H\,tg\hat{L} + (H - h)\,tg\hat{L} = (2H - h)\,tg\hat{L}$$

El ángulo límite es el ángulo de incidencia al que le corresponde un ángulo de refracción de 90º:

$$n\,sen\hat{L} = sen\,90º \qquad sen\hat{L} = 1/n = \frac{3}{4} \qquad tg\hat{L} = 1{,}1339 \qquad D = (2H - h)\,tg\hat{L} = \mathbf{9'30\ m}$$

Para puntos más próximos, los rayos incidentes cuyos rayos reflejados podrían alcanzar la vista del buzo, incidirían en la superficie de separación agua-aire con un ángulo inferior al límite y, por tanto, la luz no se reflejaría (pasaría al aire).

En realidad, la luz, además de refractarse, en parte puede reflejarse pero en una proporción muy pequeña comparada con la reflexión total.

5.- El ángulo de un prisma, de índice de refracción 1'15, es 60º. Hallar la desviación experimentada por un rayo que incide perpendicularmente a una de sus caras. Para este prisma, ¿cuánto vale la desviación mínima?

El rayo no se desvía en su primera refracción. En la segunda, incide bajo un ángulo ε_2 = 60º, verificándose:

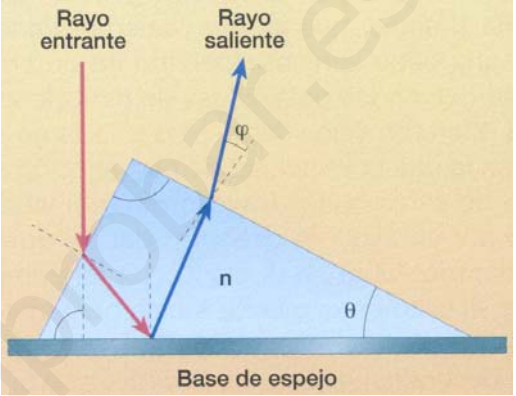
$$n\,sen\varepsilon_2 = sen\varepsilon_2' \qquad sen\varepsilon_2' = 1{,}15 x sen60º = 0{,}9959 \qquad \varepsilon_2' = 84{,}8284º$$

El ángulo de desviación (ángulo determinado por el rayo incidente con el emergente) es:

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \alpha = 0 + 84{,}8284 – 60 = 84{,}8284º = \mathbf{24º\ 49'\ 42''}$$

El ángulo de desviación mínima δ_{min} se obtiene despejándolo de $n = \dfrac{\text{sen}(\frac{\delta_{min}+\alpha}{2})}{\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}$. Se tiene entonces: δ_{min} = 2 arc sen[n sen(α/2)] - α = 2xarc sen(1,15xsen30º) – 60º = 10,1993º = ***10º 11' 57''***

6.- El prisma de la figura tiene un índice de refracción de 1,5; su sección recta es un triángulo rectángulo 30º-90º-60º, y está situado como indica la figura. Un rayo entrante vertical, tras una primera refracción, incide sobre la cara inferior que está plateada. Hallar el ángulo φ que forma el rayo saliente con la normal a la cara de salida.



Refracción 1ª: ε_1 = 60º

senε_1 = n senε_1' $\rightarrow$ senε_1' = $\dfrac{\text{sen}\varepsilon_1}{n} = \dfrac{\text{sen}60^o}{1{,}5} = 0{,}57735$

$\rightarrow$ ε_1' = 35,26439º

Reflexión en la base: Geométricamente, ε_1' + ε_2 = 60º

$\rightarrow$ ε_2 = 60º - ε_1' = 60º - 35,26439º = 24,73561º

Refracción 2ª: Geométricamente, ε_2 + ε_3 = 30º

$\rightarrow$ ε_3 = 30º - ε_2 = 30º - 24,73561º = 5,26439º

n senε_3 = senε_3' $\rightarrow$ senε_3' = 1,5xsen(5,26439º) = 0,13763 $\rightarrow$ φ = ε_3' = 7,91059º = ***7º 54' 38''***

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- El índice de refracción del agua para la luz amarilla del sodio es 1'33. ¿Cuál es la velocidad de propagación y la longitud de onda de dicha luz en el agua? En el vacío, la longitud de onda de la luz amarilla del sodio es de 589 nm. ¿Cuál es la frecuencia?
R.: 442'9 nm 5'09x10^{14} Hz

2.- Un rayo de luz de 500 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (n = 1.333) ¿Cuál es su frecuencia en el agua? ¿Y su longitud de onda? ***R.: 6x10^{14} Hz 375 nm***

3.- Una fuente luminosa puntual emite luz cuya longitud de onda en el vacío es de 600 nm. A 6 cm de ella se encuentra situada una pantalla y entre ambos se dispone una lámina de vidrio de 6 mm de espesor e índice de refracción 1.5. ¿Cuántas ondas habrá entre la fuente luminosa y la pantalla? ***R.: 105000 ondas***

4.- ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio respecto al agua, si el índice de refracción del agua respecto al aire es 4/3 y el del vidrio respecto al aire, 3/2? ***R.: n = 9/8***

5.- Un rayo de luz incide con un ángulo de 30º sobre la superficie de separación de dos medios cuyos índices de refracción son 1.60 y 1.33, respectivamente. La luz pasa del medio más refringente al menos refringente. Hallar el ángulo de refracción ***R.: 37º***

6.- Un haz luminoso incide sobre una lámina de vidrio, de índice de refracción 1.50. ¿Cuál ha de ser el ángulo de incidencia φ para que el de refracción sea $\varphi/2$? ***R.: φ = 82° 50'***

7.- Un rayo de luz se propaga en el aire e incide en una cubeta llena de agua, formando un ángulo de 45º con la superficie del agua. Calcular:
a) la dirección que tendrá el rayo luminoso al propagarse dentro del agua, sabiendo que el índice del agua es 1.33 y que se toma como índice del aire la unidad.
b) la velocidad de la luz en el agua. ***R.: 32º 2.26x10^{8} m/s.***

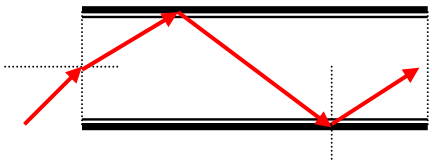
8.- Un cubo de vidrio de índice de refracción 1.5 se encuentra situado en el aire. Un haz de rayos paralelos penetra oblicuamente a través de la cara superior del cubo y después incide sobre una de sus caras laterales. ¿Pueden los rayos salir a través de esta cara? ***R.:*** **No**

9.- Un foco luminoso puntual se encuentra sumergido 40 cm por debajo de la superficie del agua. Hallar el diámetro del círculo mayor en la superficie del agua, a través del cual la luz puede salir al exterior. ***R.: D = 91 cm***

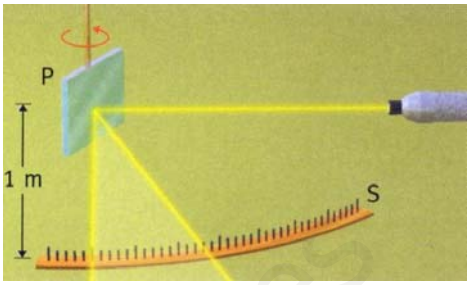
10.- En el fondo de un recipiente de con agua de 1 m de profundidad hay un foco que emite luz en todas direcciones. Si en la vertical del foco y en la superficie del agua se coloca un disco opaco, calcula el radio que debe tener el disco para que impida la visión de la luz que sale del foco por un observador situado en la superficie. Índice de refracción del agua, 1'33. ***R.: 1.14 m.***

11.- Se ha propuesto la siguiente regla para construir el rayo refractado: Usando unidades arbitrarias, se trazan con centro en el punto de incidencia dos circunferencias de radios n y n', respectivamente. El rayo incidente se prolonga hasta interceptar la circunferencia de radio n. Por este punto se traza la perpendicular a la superficie de separación de los medios y se halla su intersección con la circunferencia de radio n'. El rayo refractado pasa por este punto. Justificar esta regla. Aplicarla al caso aire-vidrio de índice 1'5 y ángulo de incidencia de 60º ***R.: ε' = 35.26º***

12.- Establecer hasta qué máximo valor puede alcanzar el ángulo de incidencia de un rayo para que sea reflejado totalmente en el interior de la fibra óptica (n = 1.30). ***R.: 56.2º***



13.- Un rayo de luz incide sobre un espejo plano P, sujeto a un hilo vertical (fig.). El espejo refleja este rayo sobre una escala S, distante 1 m del espejo y paralela a éste. Por una acción exterior, el espejo gira 8º. ¿Qué distancia se desplaza la señal luminosa sobre la escala? ***R.: 28 cm***



14.- El diamante tiene un ángulo límite de 24º. Calcula el índice de refracción y la velocidad de propagación de la luz en él. ***R.: n = 2'46 v = 1'22x10^8 m/s***

15.- Un vaso contiene aceite y agua. Como ambos líquidos no se mezclan, se forman dos capas perfectamente diferenciadas, la de arriba de aceite y la inferior de agua. El aceite tiene índice de refracción mayor que el agua.

a) Razona en qué líquido es mayor la velocidad de propagación de la luz, y dibuja la marcha de un rayo de luz que incide oblicuamente desde el aire sobre la capa de aceite y llega hasta el fondo.
b) ¿Qué relación hay entre las direcciones del rayo incidente y el que llega al fondo?
c) Caso práctico: n_{aire} = 1'00, n_{aceite} = 1'55, n_{agua} = 1'33; ángulo de incidencia, 30º

R.:22º

16.- Se tiene un prisma óptico (n = 1'62) cuyo ángulo del prisma es de 30º. Si un rayo de luz incide perpendicularmente en una de sus caras, calcular el ángulo con el que emerge la luz.
R.: 54º

17.- Un rayo de luz monocromática incide sobre una de las caras de un prisma de vidrio de índice de refracción 1'6 con un ángulo de incidencia de 40º. Si el ángulo del prisma es de 45º, calcular el ángulo de emergencia y el de desviación del rayo. ***R.:* 35'56º 30.56º**

18.- Determinar el índice de refracción de un prisma de ángulo 40º sabiendo que un rayo que incide con un ángulo de 40º sigue una trayectoria paralela a la base del prisma. ***R.:* 1'88**

19.- La sección de un prisma óptico tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuál es el valor mínimo de su índice de refracción para que un rayo de luz se refleje totalmente en ángulo recto? ***R.:*** $n_{min} = \sqrt{2}$

20.- Un rayo luminoso incide sobre un prisma óptico con un ángulo de incidencia de 90° y tras refractarse en la segunda cara emerge del prisma con un ángulo de refracción de 9.25°. Hallar el índice de refracción del prisma, sabiendo que su ángulo es 50°.
R.: n = 1'45 y n = 1'18

21.- Un prisma óptico tiene un ángulo de 28º y se observa que al hacer incidir sobre él un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 30º, el ángulo de desviación es de 18º. Calcular el índice de refracción del prisma. ***R.: n = 1'6***

22.- ¿Cuál es el ángulo de desviación mínima para un prisma de vidrio (n = 1'5) cuyo ángulo es de 60°? ***R.:*** δ_m **= 37'18**

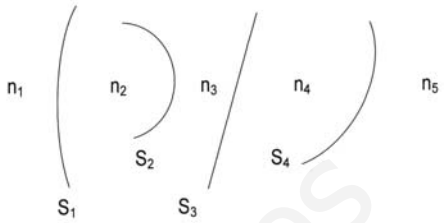
B.- REPRESENTACIÓN ÓPTICA

5.- DEFINICIONES

SISTEMA ÓPTICO:

Un conjunto de superficies que separa medios de distintos índices constituye un ***sistema óptico***, fig. 1. Los sistemas más usados en óptica son los ***sistemas centrados***, formados por superficies esféricas cuyos centros están alineados. La recta que contiene estos centros recibe el nombre de ***eje del sistema***.

Fig. 1



Si el sistema está formado únicamente por superficies refractantes, se llama *dióptrico;* si sólo contiene espejos, *catóptrico,* y si participa de ambas, *catadióptrico*.

Mientras no se diga lo contrario, nos referiremos a sistemas centrados. Un sistema de esta especie, en general, lo representaremos como en la fig. 2.

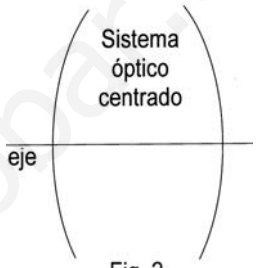


Fig. 2

OBJETO E IMAGEN:

Si tenemos un punto emisor O, fig. 3, ante un sistema, puede ocurrir que después de reflejarse o refractarse en sus distintas superficies los rayos que partiendo de O penetran en él vuelvan a juntarse a la salida en otro punto O'. Si esto sucede, al punto O' se le llama ***punto imagen*** de O respecto del sistema, y a O ***punto objeto***.

Si, como en este caso, los rayos salen realmente de O y se cortan realmente en O', se dice que O es punto ***objeto real***, y O' punto **imagen real**.

Puede ocurrir, fig. 4, que los rayos a la salida sean divergentes, pero que sus prolongaciones en sentido contrario al de la propagación de la luz se corten en un punto O'; se llama en este caso a O' ***imagen virtual*** de O.

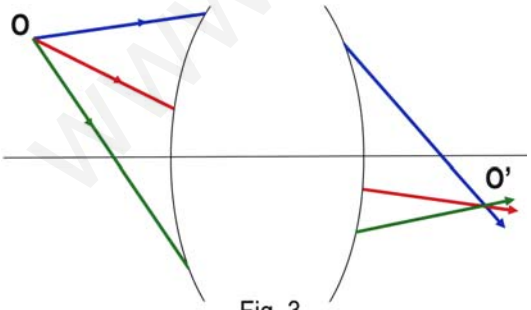


Fig. 3

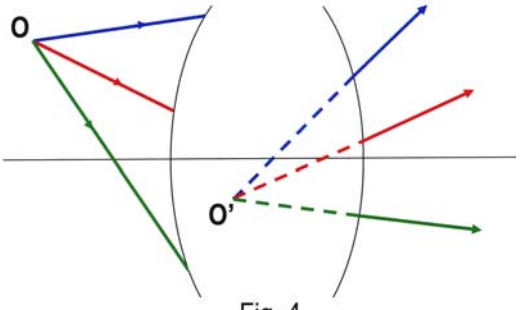


Fig. 4

Cuando se acoplan dos sistemas, la imagen que produce el primero sirve de objeto para el segundo.

www.yoquieroaprobar.es

Si, como sucede en la fig. 5, el objeto O_2 para el segundo sistema no llega a formarse realmente porque los rayos antes de concurrir en el punto $O_1^{'} \equiv O_2$ son desviados por el sistema II, se dice que el segundo sistema trabaja con ***objeto virtual***. El objeto virtual sólo puede existir en caso de acoplamiento de sistemas, como sucede en la fig. 5.

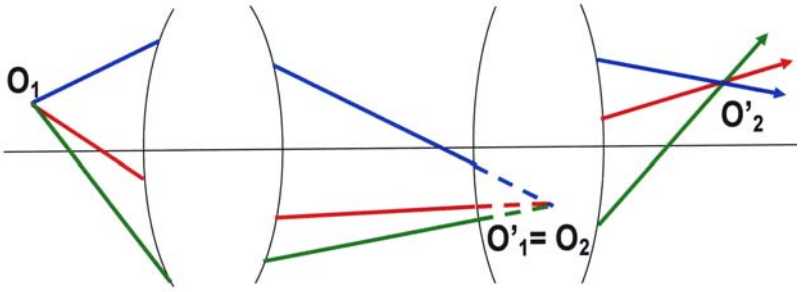


Fig. 5

Si en la fig. 4 hubiera otro sistema a la derecha, la imagen virtual O', dada por el primero, serviría de ***objeto real*** para el segundo, ya que los rayos entrarían en él como si realmente procedieran de O'.

ESPACIO OBJETO Y ESPACIO IMAGEN:

Se considera como ***espacio objeto*** de un sistema todo el espacio geométrico donde puede haber objetos, tanto reales como virtuales, y ***espacio imagen*** el espacio geométrico donde pueden existir imágenes, reales o virtuales; por tanto, todo el espacio es a la vez espacio objeto e imagen.

Aunque suele entenderse por espacio objeto toda la parte izquierda de un sistema, suponiendo que la luz va de izquierda a derecha, los objetos virtuales lo prolongan por la derecha, pero debe entenderse que aunque un objeto virtual quede a la derecha o aparentemente dentro del sistema, *siempre se considera sumergido en el medio de la izquierda*.

Los objetos, al igual que las imágenes, pueden ser *puntuales* o *extensos*. La imagen de un objeto extenso está formada por las imágenes puntuales de todos los puntos del objeto. En cualquier caso, el objeto y la imagen se dice que son ***conjugados*** respecto del sistema, o que el sistema ***representa*** al objeto en su imagen. Las relaciones geométricas existentes entre los objetos y sus imágenes, habida cuenta de la estructura de los sistemas ópticos, constituyen una parte de la Óptica Geométrica denominada *teoría de la representación óptica*.

SISTEMA ÓPTICO PERFECTO:

Lo ideal sería que un sistema óptico representara todo el espacio objeto en el correspondiente espacio imagen estableciendo una correspondencia homográfica completa punto a punto, recta a recta y plano a plano que fuera una semejanza para dos figuras conjugadas cualesquiera. Sin embargo, esto en general es imposible y sólo con grandes restricciones se puede pedir a un sistema una representación tan correcta.

En vista de esta imposibilidad se ha hecho necesario reducir las exigencias, y un sistema óptico centrado se considera perfecto con tal que cumpla las siguientes condiciones, establecidas por Maxwell:

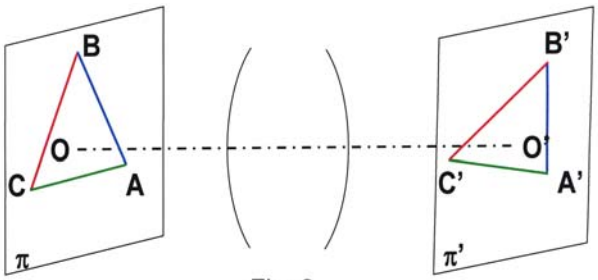


Fig. 6

Un sistema óptico es ***perfecto*** *para dos planos π y π' , normales al eje, cuando tiene el siguiente comportamiento (Fig. 6):*

- Todos los rayos que entran en el sistema procedentes de un punto cualquiera A del plano π concurren a la salida en un punto A' de otro plano π' (condición de estigmatismo).
- A los puntos de una recta cualquiera AB del plano π corresponden como imágenes los de otra recta A'B' contenida en π'.
- A toda figura ABC contenida en π corresponde otra A'B'C' contenida en π', *semejante* a la figura objeto, con *razón de semejanza constante* para cualquier par de figuras.

En general, en el estudio de los sistemas centrados que se comporten como perfectos en el sentido anteriormente indicado, operaremos en un plano meridiano, representando el objeto y la imagen por flechas normales al eje. Cuando la imagen tiene el mismo sentido que el objeto, se llama ***imagen directa***; si el sentido de la imagen es contrario al del objeto, se dice que es una ***imagen invertida***.

6.- DIÓPTRIO ESFÉRICO

Por lo común, los sistemas ópticos no son perfectos, salvo algunos casos especiales.

El caso de la esfera es especialmente interesante, debido a su simetría, su sencillez de tallado y fácil manejo matemático. Entra a formar parte de la mayoría de los sistemas ópticos: lentes, espejos, instrumentos ópticos...

Una superficie esférica que separa dos medios, no es en general un sistema óptico perfecto sino bajo ciertas condiciones, que veremos más adelante.

Supuestas dichas condiciones, consideremos la superficie esférica (Fig. 7) de centro C, que separa dos medios de índices *n* y *n'*, ante la cual colocamos un objeto lineal OP de tamaño *y*. Para hallar la imagen de *y* hallaremos primero la de O, por medio de dos rayos cualesquiera.

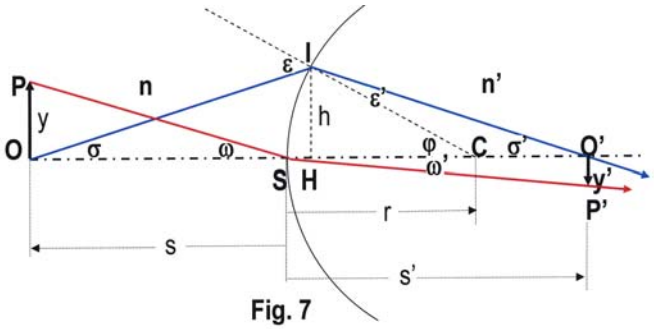


Fig. 7

Tomemos el OS (que no se desviará por ser normal a la superficie) y el OI.

El punto O', donde se corten después de la refracción, será la imagen de O. La imagen *y'* estará en la perpendicular al eje óptico OC, por O', (al considerar el dioptrio como sistema perfecto). Para hallar el extremo P' de la imagen bastará trazar un rayo cualquiera desde P, por ejemplo, el PS. La intersección de su refractado con dicha perpendicular será P'. Y el tamaño de la imagen será *y'* = O'P'.

NORMAS DIN 1.335 para la utilización de las magnitudes en Óptica Geométrica.

La mayoría de los autores sigue estas normas en la resolución de los problemas ópticos, como convenio. Se recomienda encarecidamente su uso, con disciplina; de lo contrario, será muy difícil que al resolver problemas prácticos se llegue a resultados correctos.

> *"Al iniciarse el alumno en problemas de Óptica Geométrica, es muy importante que sea fiel a las normas de signos. No se permita nunca operar con los valores absolutos de las magnitudes. La experiencia enseña que si se permite esta indisciplina, jamás hará un problema correctamente, y que después de resolverlo "a su modo", tampoco sabrá dónde anda una imagen, si es real o virtual, directa o invertida." (Dr. J. Casas)*

Tomando como base la figura 7, veamos algunas magnitudes, su nombre y, en el caso de distancias, el segmento orientado que las define:

S	: vértice del dioptrio	C	: centro del dioptrio
O	: punto objeto en el eje	O'	: punto imagen en el eje
r = SC	: radio del dioptrio	h = HI	: altura de incidencia de un rayo
s = SO	: distancia frontal objeto	s' = SO'	: distancia frontal imagen
y = OP	: tamaño del objeto	y' = O'P'	: tamaño de la imagen

ε y ε' : ángulos de incidencia y de refracción del rayo que incide en I, procedente de un punto del eje (de O).

ω y ω' : ángulos de incidencia y de refracción del rayo que incide en S, procedente de un punto fuera del eje (de P).

σ y σ' : ángulos de abertura con el eje, objeto e imagen, del rayo que incide en I.

φ : ángulo central.

Como se ve, los puntos se nombran con letras mayúsculas, las distancias con minúsculas, y los ángulos con letras griegas.

1) Los elementos que hacen referencia al objeto se escriben con la misma letra que los correspondientes a la imagen, pero éstos últimos con apóstrofe.
2) Se supone siempre que la luz va de izquierda a derecha, mientras no se advierta lo contrario.
3) El origen de coordenadas se toma en S, vértice del dioptrio. Por ello, las distancias frontales s y s', desde el vértice S al objeto y a la imagen serán positivas si están a la derecha de S, y negativas si a la izquierda. Y los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba del eje y negativos hacia abajo de él.
4) Los ángulos de incidencia y refracción de un rayo, serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en sentido horario.
5) Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir, por giro, con el eje se va en sentido antihorario.

En la fig. 8 se puede ver los signos de los diferentes elementos cuando corresponden a la construcción de la figura anterior, Fig. 7:

- son positivos: r, h, s', y, ε, ε', φ, σ'
- son negativos: s, y', σ, así como los ángulos ω y ω', bajo los cuales se ven el objeto y la imagen desde el vértice S, considerándose como ángulos de incidencia y refracción.

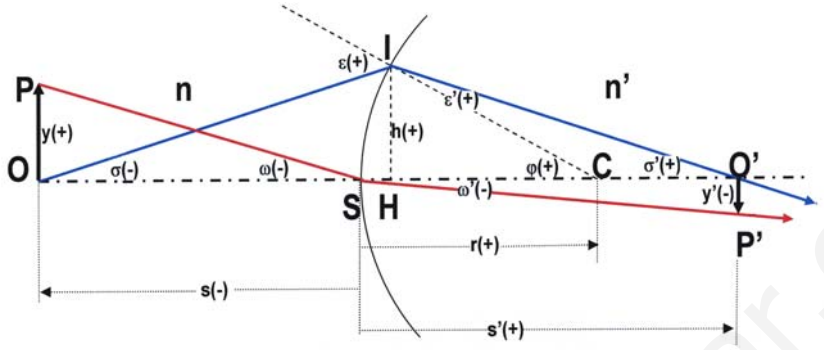


Fig. 8

Según los anteriores convenios, <u>en la reflexión</u>, ε y ε' serán siempre de signo contrario: ε' = - ε. Por tanto, con estas normas que utilizaremos en toda la Óptica Geométrica de ahora en adelante, la ley de Snell se escribirá:

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n' \operatorname{sen}(-\varepsilon) = -n' \operatorname{sen}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n' = -n$$

por lo que *la reflexión equivale a una refracción en la que el rayo pasa de un índice n a otro – n.*

7.- ÓPTICA PARAXIAL

A.- ZONA PARAXIAL O DE GAUSS

Consideremos, Fig. 9, la primera superficie esférica de un sistema centrado, ante la que colocamos un objeto de tamaño *y* normal al eje y tan pequeño como queramos. Pongamos también ante el sistema, para más claridad, un diafragma D con un orificio de radio *p* muy pequeño; con ello conseguimos que las alturas de incidencia h de todos los rayos procedentes de puntos de *y* que penetran en el sistema sean también muy pequeñas.

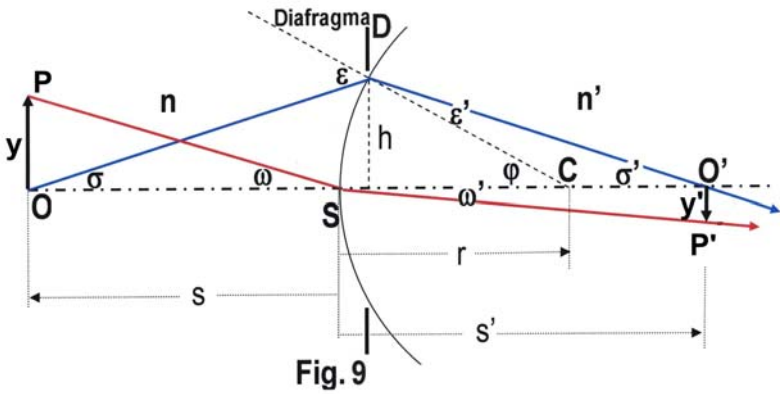


Fig. 9

En estas condiciones, si *y* es pequeño respecto a SO, todos los ángulos, σ y σ', ε y ε', ω y ω', y φ son también muy pequeños. En estas condiciones, sus senos y tangentes pueden sustituirse por dichos ángulos, en radianes. Por ejemplo: senε = tgε = ε.

Cuando se dan estas condiciones (el tamaño de los objetos pequeño, el diámetro del diafragma pequeño, comparados con las distancias frontales) se dice que el sistema trabaja en ***zona paraxial*** o ***zona de Gauss***. Puede demostrarse que en esta zona todos los sistemas centrados son perfectos para cualquier par de planos, conclusión a la que se llega en la próxima sección, tras la obtención de los invariantes de Abbe y de Helmholtz.

El estudio de los sistemas ópticos en zona paraxial es muy importante y útil, ya que representa una primera aproximación de su comportamiento. Se hace uso de él en cualquier anteproyecto de diseño de instrumentos ópticos.

B.- ESTUDIO PARAXIAL DEL DIÓPTRIO ESFÉRICO

a) Invariante de Abbe

Sea O un punto objeto, cuya posición está dada por su distancia frontal *s* al vértice S de un dioptrio esférico. Tratemos de resolver el problema de hallar la posición de su imagen O', determinando su distancia frontal *s'*.

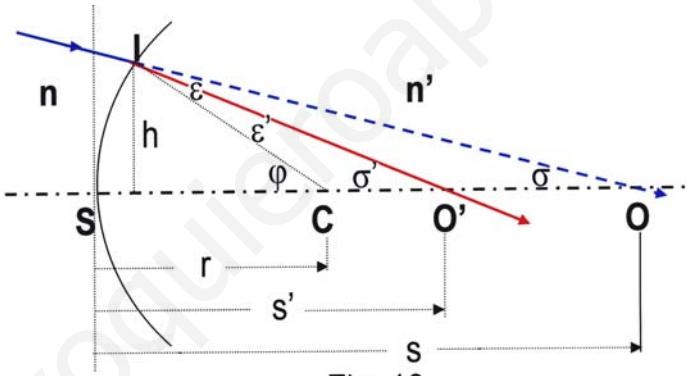


Fig. 10

En la Fig. 10 se toma, por sencillez, O como objeto virtual, pues así todas las magnitudes, lineales y angulares, son positivas, lo cual no resta generalidad a las conclusiones que se obtienen...

Teniendo en cuenta que operamos en zona paraxial, la ley de la refracción se reduce a:

$$n\,\varepsilon = n'\,\varepsilon'$$

De la figura, se deduce fácilmente que:

$\varepsilon = \varphi - \sigma$ $\qquad$ $\varepsilon' = \varphi - \sigma'$ $\qquad$ $\varphi = \dfrac{h}{r}$ $\qquad$ $\sigma = \dfrac{h}{s}$ $\qquad$ $\sigma' = \dfrac{h}{s'}$

Sustituyendo estos valores en la ley de la refracción, y simplificándola, resulta:

$$\boxed{n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)}$$

La expresión *n(1/r – 1/s)* que no varía al escribirla para el espacio objeto o con los datos correspondientes del espacio imagen, recibe el nombre de ***invariante de Abbe***.

www.yoquieroaprobar.es

De esta fórmula se deduce muy fácilmente la siguiente ***fórmula de Gauss***:

$$-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$$

mediante la cual se puede obtener más cómodamente el valor de *s'* (posición de la imagen).

Estas fórmulas nos demuestran que la esfera en la zona paraxial se comporta estigmáticamente para cualquier par de puntos conjugados, O y O', pues fijado O (o lo que es igual, *s*) dichas expresiones proporcionan un único valor de *s'*, y por tanto la posición bien definida de O'. Y esto independientemente de *h*, es decir, del rayo procedente de O utilizado en el estudio: cualquier rayo paraxial que sale de O y atraviesa el dioptrio pasa por O'.

b) Focos, planos focales y distancias focales

a) *Foco imagen F':*

- Hay rayos que llegan al dioptrio, procedentes del infinito, paralelos al eje (punto objeto O_∞). El dioptrio los concentra, real o virtualmente, en un punto llamado ***foco imagen*** F'. Por tanto, son puntos conjugados O_∞ y F'.

- La distancia f' = SF' se denomina ***distancia focal imagen***, o simplemente ***focal imagen*** del dioptrio. Su valor se obtiene haciendo en la fórmula de Gauss: s = ∝ y s' = f'. Resulta:

$$f'=\frac{n'}{n'-n}r$$

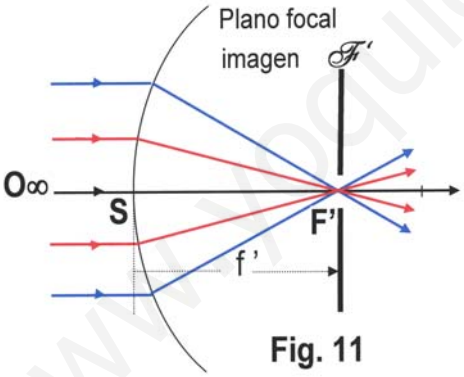


Fig. 11

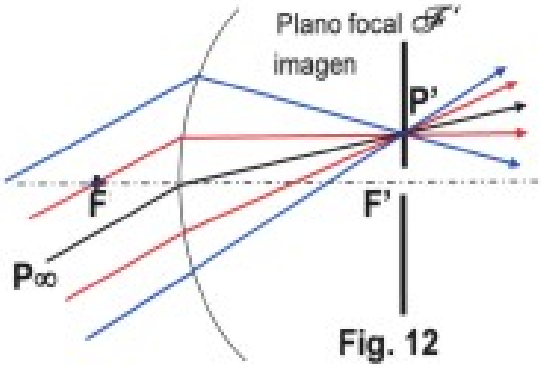


Fig. 12

- Se denomina ***plano focal imagen*** al plano normal al eje por F'. Es el conjugado del plano del infinito, en el espacio objeto, y tiene la propiedad de que cualquier haz de rayos paralelos entre sí (por tanto, como si procediesen de un punto objeto del infinito) se concentra en un punto de dicho plano focal: así pues, son conjugados el plano objeto del infinito y el plano focal imagen.

b) *Foco objeto F*: (Fig. 15 y 16)

- Existe asimismo un punto F sobre el eje tal que todos los rayos que, procedentes de él, atraviesan el dioptrio, salen paralelos al eje. La imagen de F es pues el punto del eje en el infinito, O'_∞.

www.yoquieroaprobar.es

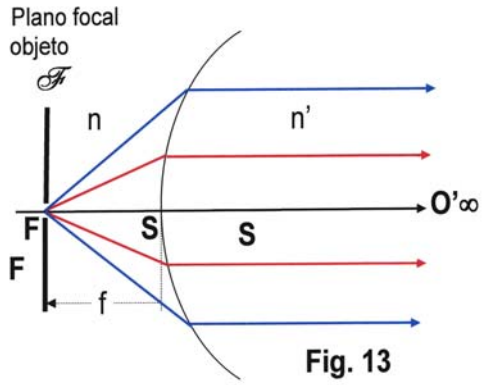


Fig. 13

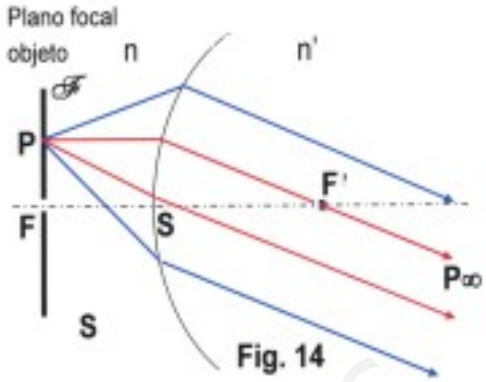


Fig. 14

- La distancia f = SF se denomina ***distancia focal objeto***, o simplemente ***focal objeto*** del dioptrio. Su valor se obtiene haciendo en la fórmula de Gauss: s = f y s' = ∝. Resulta

$$\boxed{f = -\frac{n}{n'-n} r}$$

- Se denomina ***plano focal objeto*** al plano normal al eje por el foco objeto F. Es el conjugado del plano del infinito, en el espacio imagen. Tiene la propiedad de que los rayos procedentes de un punto cualquiera P del plano focal objeto, tras el dioptrio, salen paralelos entre sí, formando su imagen en P'_{∞}, del plano imagen del infinito: así pues, son planos conjugados el plano focal objeto y el plano imagen del infinito.

c) Invariante de Helmholtz

Si hacemos uso de la fig. 9, y aplicamos la ley de Snell al rayo que se refracta en S, se tiene:

n senω = n' senω' y en zona paraxial n ω = n' ω'

Pero de la figura 9 se deduce que:

$$\omega = \frac{OP}{OS} = \frac{OP}{-SO} = \frac{y}{-s} = -\frac{y}{s} \quad y \quad s = \frac{h}{\sigma} \quad \Rightarrow \omega = -\frac{y\sigma}{h}$$

$$\omega' = \frac{O'P'}{O'S} = \frac{O'P'}{-SO'} = \frac{y'}{-s'} = -\frac{y'}{s'} \quad y \quad s' = \frac{h}{\sigma'} \quad \Rightarrow \omega' = -\frac{y'\sigma'}{h}$$

Sustituyendo en la relación de Snell n ω = n' ω' estos valores de ω y ω', y simplificando, queda:

$$\boxed{n\, y\, \sigma = n'\, y'\, \sigma'}$$

Como se ve, al atravesar el dioptrio, el producto n y σ se mantiene invariante. Este producto es asimismo invariante para cualquier sistema óptico formado por un conjunto de dioptrios esféricos centrados: su valor antes de atravesar el primer dioptrio es igual al que presenta tras el último.

d) Aumentos

Hemos visto cómo, en el ámbito de la Óptica Paraxial, una superficie esférica tiene un comportamiento perfecto, las figuras objeto e imagen son semejantes entre sí y están relacionadas por las ecuaciones invariantes de Abbe y Helmholtz .

Debido a esta relación de semejanza entre las figuras objeto e imagen, se definen los aumentos, teniendo en cuenta las relaciones paraxiales citadas:

* ***Aumento lateral***, β', o relación entre el tamaño de la imagen y del objeto. Viene dado por:

$$\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n\sigma}{n'\sigma'} = \frac{n\frac{h}{s}}{n'\frac{h}{s'}} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}}$$

* ***Aumento angular***, γ', o relación entre los ángulos de abertura imagen y objeto. Su valor es:

$$\gamma \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta'} = \frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}}$$

La relación entre ambos aumentos es: $\boxed{\beta'\,\gamma' = \frac{n}{n'}}$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un pescador situado en su barca se encuentra a 2.1 m de altura por encima de la superficie del agua, mientras que un pez nada a 0.5 m debajo de la superficie. El índice de refracción del agua es 4/3. a) A qué distancia ve el pescador al pez?.- b) ¿Y el pez al pescador?

Ec. de Gauss, para un dioptrio: $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$.

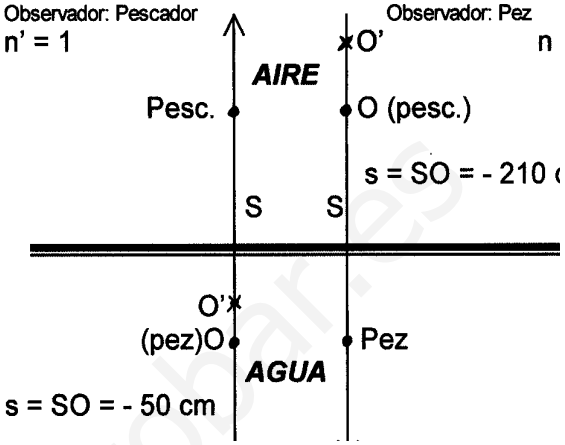
Para un dioptrio plano (la superficie del agua):

r = ∝. Por tanto, s' = $\frac{n'}{n}s$

a) El pescador es el observador, y el pez es el objeto: n_{agua} = n = 4/3 n_{aire} = n' = 1 s = - 50 cm. Por tanto: s' = $\frac{n'}{n}s = \frac{1}{4/3}(-50) = -37{,}5$ cm

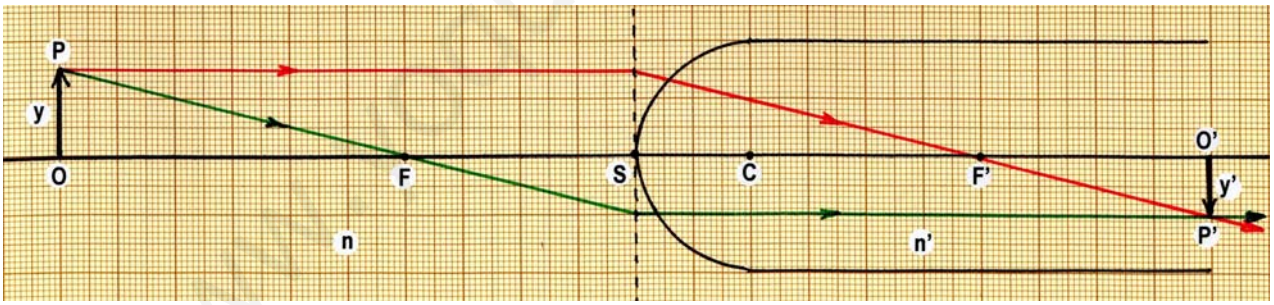
b) El pez es el observador, y el pescador es el objeto: n_{aire} = n = 1 n_{agua} = n' = 4/3
s = SO = - 210 cm.

Por tanto: s' = $\frac{n'}{n}s = \frac{4/3}{1}(-210) = -280$ cm



El pescador ve al pez dentro del agua ***a 37,5 cm*** de la superficie; más cercano a ella que como realmente está. El pez en cambio ve al pescador por encima de la superficie del agua, en el aire, como si estuviera ***a 2,8 metros*** de la superficie.

2.- El extremo de una varilla cilíndrica de vidrio cuyo índice es 1.50 está limitado por una superficie semiesférica de 2 cm de radio. A la izquierda del vértice de esta superficie y a 10 cm de ella se encuentra situado un objeto de 3 mm de altura, perpendicular al eje y apoyado sobre él. a) Hallar la posición y el tamaño de la imagen, si la varilla se encuentra en el aire.- b) Hallar las focales del dioptrio. c) Resolver el problema geométricamente.



a) r = SC = 2 cm n = 1 n' = 1,5 s = SO = - 10 cm y = 3 mm

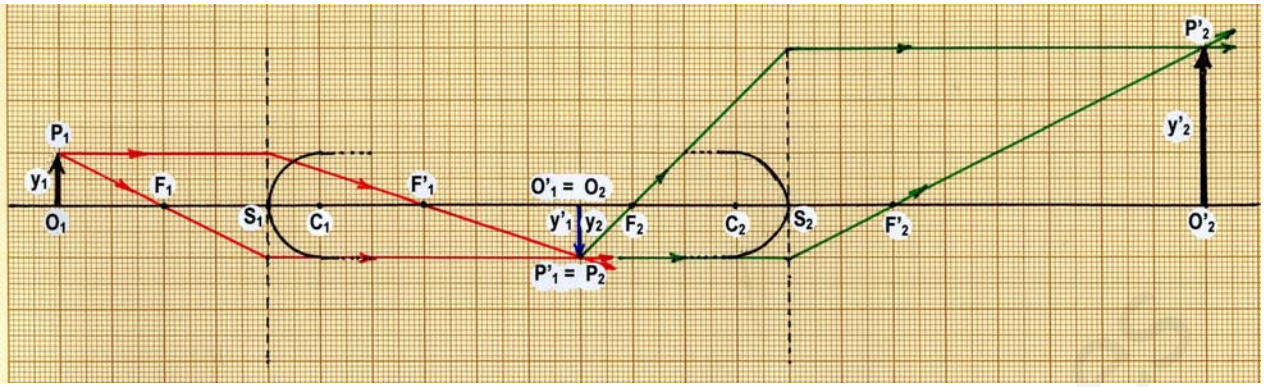
Ecuación de Gauss: $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$ $-\frac{1}{-10}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{2}$ s' = 10 cm

Aumento lateral: $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}=\frac{1x10}{1{,}5x(-10)}=-2/3$ y' = β' y = (-2/3)x3 mm = - 2 mm

b) Focales: $f'=\frac{n'}{n'-n}r = \frac{1{,}5}{1{,}5-1}2=6$ cm $f=-\frac{n}{n'-n}r = -\frac{1}{1{,}5-1}2=-4$ cm

Resumiendo: La imagen, real e invertida y de 2 mm, se halla 10 cm detrás del dioptrio. Las focales del dioptrio son f' = 6 cm y f = - 4 cm.

3.- Una varilla de vidrio (n = 1,5) termina en sus extremos en dos semiesferas de 5 cm de radio. Al situar un objeto sobre el eje de la varilla y a 20 cm de un extremo, la imagen final se forma a 40 cm del extremo opuesto. Hallar la longitud de la varilla.



Dioptrio 1º: $r_1 = S_1C_1 = 5$ cm $n_1 = 1$ $n'_1 = 1{,}5$ $s_1 = S_1O_1 = -20$ cm

$$-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{-20}+\frac{1{,}5}{s'_1}=\frac{1{,}5-1}{5} \quad \rightarrow \quad s'_1 = 30 \text{ cm}$$

Paso del dioptrio 1º al 2º: $s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -L + s'_1 = 30 - L$ donde $L = S_1S_2$

Dioptrio 2º: $r_2 = S_2C_2 = -5$ cm $n_2 = 1{,}5$ $n'_2 = 1$ $s_2 = S_2O_2 = 30 - L$ $s'_2 = 40$

$$-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1{,}5}{30-L}+\frac{1}{40}=\frac{1-1{,}5}{-5} \quad \rightarrow \quad L = \textbf{\textit{50 cm}} \text{ es la longitud de la varilla.}$$

Para resolver gráficamente el problema, a escala, se precisa calcular las distancias focales:

$$f_1' = S_1F_1' = \frac{n_1'}{n_1'-n_1}r_1 = \frac{1'5}{1'5-1}5 = 15 \text{ cm} \qquad f_2' = S_2F_2' = \frac{n_2'}{n_2'-n_2}r_2 = \frac{1}{1-1'5}(-5) = 10 \text{ cm}$$

$$f_1 = S_1F_1 = -\frac{n_1}{n_1'-n_1}r_1 = -\frac{1}{1'5-1}5 = -10 \text{ cm} \qquad f_2 = S_2F_2 = -\frac{n_2}{n_2'-n_2}r_2 = -\frac{1'5}{1-1'5}(-5) = -15 \text{ cm}$$

4.- Una esfera de vidrio de paredes delgadas y radio r está llena de agua. A una distancia r/2 de su superficie se coloca un objeto. Hallar la posición de la imagen final tras la esfera, para el caso en el que su radio sea de 10 cm. Naturaleza de la imagen final, Resolución gráfica, previo cálculo de las focales de cada dioptrio.

<u>Primer dioptrio:</u> $r_1 = 10$ cm $n_1 = 1$ $n'_1 = 4/3$ $s_1 = -5$ cm

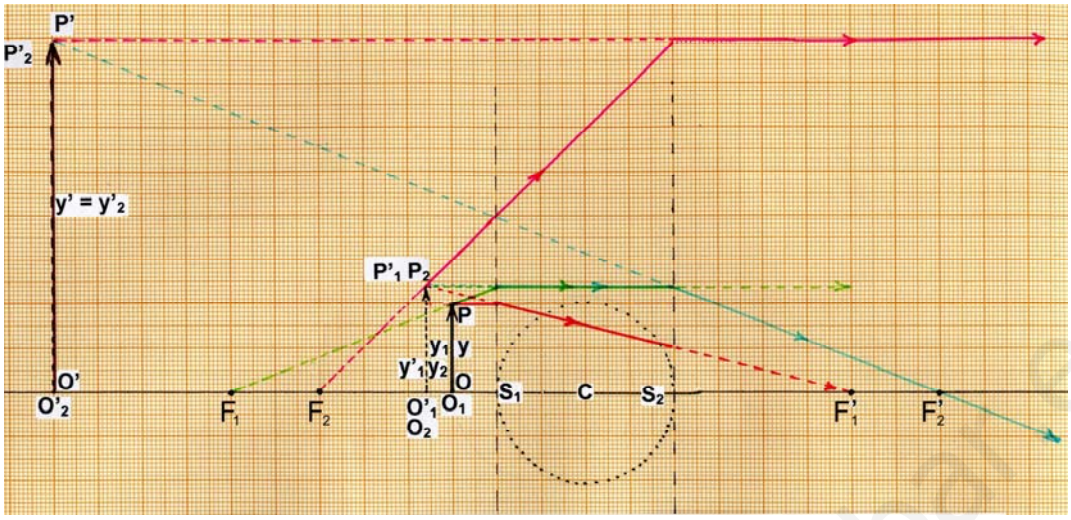
$$-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{-5}+\frac{4/3}{s'_1}=\frac{4/3-1}{10} \quad \rightarrow \quad s'_1 = -8 \text{ cm}$$

<u>Paso dioptrio 1º a dioptrio 2º</u> : $d = S_1S_2 = 20$ cm
$s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -d + s'_1 = -20 - 8 = -28$ cm

<u>Segundo dioptrio</u>: $r_2 = -10$ cm $n_2 = 4/3$ $n'_2 = 1$ $s_2 = -28$ cm

$$-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{4/3}{-28}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1-4/3}{-10} \quad \rightarrow \quad s'_2 = -70 \text{ cm}$$

<u>Aumento lateral</u>: $\beta' = \beta'_1\ \beta'_2 = \dfrac{n_1}{n'_1}\dfrac{s'_1}{s_1} \times \dfrac{n_2}{n'_2}\dfrac{s'_2}{s_2} = \dfrac{(-8)(-70)}{(-5)(-28)} = 4$



La imagen final está a la izquierda de la esfera, 60 cm de su centro ($s'_2 < -20$ cm)
es virtual ($s'_2 < 0$).
es directa ($\beta' > 0$)
es cuatro veces mayor que el objeto ($\beta' = 4$)

Para la resolución gráfica se precisan las focales f'_1 y f_1 que nos sitúan los focos F'_1 y F_1 y las focales f'_2 y f_2 para los focos F'_2 y F_2.

$f'_1 = \dfrac{n'_1}{n'_1 - n_1} r_1 = \dfrac{4/3}{4/3 - 1} 10 = 40$ cm $\qquad f_1 = -\dfrac{n_1}{n'_1 - n_1} r_1 = -\dfrac{1}{4/3 - 1} 10 = -30$ cm

$f'_2 = \dfrac{n'_2}{n'_2 - n_2} r_2 = \dfrac{1}{1 - 4/3}(-10) = 30$ cm $\qquad f_2 = -\dfrac{n_2}{n'_2 - n_2} r_2 = -\dfrac{4/3}{1 - 4/3}(-10) = -40$ cm

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Calcular la profundidad aparente de una piscina de agua (n = 1,33) de 2 m de profundidad cuando se la mira verticalmente al fondo desde el aire. ***R.:* 1,5 m**

2.- En el fondo de una jarra llena de agua (n = 1,33) hasta una cierta altura se encuentra una moneda. ¿Hasta qué altura se llenó la jarra si aparentemente la moneda se encuentra a 15 cm? ***R.: 20 cm***

3.- Un muchacho, que no sabe nadar, observa que a lo sumo la profundidad de un lago es de 1.5 m. Como es prudente, toma la precaución, antes de bañarse, de medir la profundidad introduciendo una vara hasta tocar el fondo. Hecho esto, decidió no bañarse. ¿Por qué? ***R.: La profundidad era de 2 m***

4.- ¿Dónde se encuentra la imagen de un punto situado 50 cm por delante de un dioptrio plano que separa dos medios de índices 1 y 1,33? ***R.: 66,5 cm por delante del dioptrio plano***

5.- Una pecera esférica de espesor despreciable y de 20 cm de radio está llena de agua (n = 4/3). ¿Dónde se formará la imagen de un pez que se encuentra en el centro de la pecera? ¿Cuál será su tamaño? ***R.: En el centro de la pecera, y su tamaño será 4/3 mayor***

6.- Un dioptrio esférico cóncavo de 10 cm de radio separa dos medios transparentes de índices 1 y 4/3, respectivamente. Calcular las distancias focales del dioptrio.
R.: f' = - 40 cm y f = 30 cm.

7.- Un dioptrio esférico convexo de 40 cm de radio separa dos medios de índices 1.5 y 1.75. Si se coloca un objeto delante del dioptrio y a 80 cm de él, ¿a qué distancia del vértice se forma su imagen?. ***R.: A 1,4 m por delante***.

8.- Un dioptrio esférico convexo de 20 cm de radio separa dos medios, cuyos índices de refracción son 1 y 1.6. Delante de la superficie de separación de los dos medios, a 25 cm de distancia, se sitúa un objeto de 2 cm de altura. ¿A qué distancia del dioptrio se forma la imagen, y cuál es su tamaño? ¿Cuáles son las focales del dioptrio? Haz un esquema, a escala, de la marcha de los rayos y de la formación de la imagen.
R.: A 160 cm, por delante; tamaño, 8 cm. Focales, f' = 53.3 cm y f = - 33.3 cm

9.- ¿Cuál ha de ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales procedentes del infinito se concentren en el vértice de la segunda superficie?
R.: n = 2

10.- Un haz estrecho de rayos paralelos dirigidos en dirección radial penetra en una esfera de vidrio (n = 1,50) maciza, de 3 cm de radio. ¿En qué punto fuera de la esfera se reúnen estos rayos? ***R.: A 1.5 cm de la esfera***

11.- El extremo de una barra de vidrio, de índice 1.5, es una superficie esférica de 50 cm de radio. A 12 cm de dicho extremo se encuentra una burbuja de aire de 3 mm de diámetro. ¿En qué posición se la ve y con qué tamaño cuando se la observa de frente al extremo de la barra?
R.: Se la ve en el interior de la barra, a 8.7 cm del extremo; su tamaño es de 3.26 mm de diámetro.

12.- Una esfera de vidrio de paredes delgadas y radio r está llena de agua. A una distancia 3r de su superficie se coloca un objeto. Hallar la posición de la imagen final.
R.: A una distancia 4r del centro de la esfera

13.- Delante de un dioptrio esférico cóncavo de 20 cm de radio y a 40 cm de distancia de él se encuentra situado un objeto de 5 cm de altura. Los índices de refracción de los dos medios separados por el dioptrio son 1 y 1.5, respectivamente. Hallar la posición y el tamaño de la imagen.
R.: Imagen directa, de 2.5 cm, a 30 cm por delante del dioptrio.

14.- El extremo de una varilla cilíndrica de vidrio cuyo índice es 1.50 está limitado por una superficie semiesférica de 2 cm de radio. A la izquierda del vértice de esta superficie y a 10 cm de ella se encuentra situado un objeto de 3 mm de altura, perpendicular al eje y apoyado sobre él. a) Hallar la posición y el tamaño de la imagen, si la varilla se encuentra sumergida en disulfuro de carbono de índice 1.62.- b) Hallar las focales del dioptrio.
R.: La imagen, virtual, directa y de 2,19 mm, se halla 6,76 cm por delante del dioptrio. Las focales del dioptrio son f' = - 25 cm y f = 27 cm.

15.- Un objeto se encuentra a 15 cm de distancia del centro de un vidrio esférico de 3 cm de radio que adorna un árbol de Navidad. Índice de refracción, n = 1,5 ¿Cuál es el aumento de la imagen? ***R.: β' = - 0.43***

16.- Una varilla larga de vidrio (n = 1.50) de 8 cm de diámetro termina en su extremo en una superficie semiesférica de 4 cm de radio. La varilla se sumerge en un líquido. Un objeto situado sobre el eje de la varilla a 60 cm del extremo forma su imagen en un punto situado 100 cm dentro de la varilla. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido? ***R.:* n = 1.46**

17.- Los índices de refracción de los medios que separa un dioptrio esférico cóncavo de 20 cm de radio son 1.33 y 1.54. Delante de la superficie, a 30 cm de ella, se sitúa un objeto de 2 cm de altura. Determinar la naturaleza de la imagen.
R.: La imagen, de 1,6 cm, se encuentra a 28,1 cm por delante del dioptrio, es virtual y directa.

18.- Un recipiente prismático, de base rectangular, contiene CS_2 cuyo índice de refracción es 1'62. En su interior, y en la forma que señala la figura, hay una lente de vidrio (índice, 1'50) tallada en forma de cilindro culminado por una semiesfera de igual radio, 5cm; la altura de la parte cilíndrica es asimismo de 5 cm. Delante del recipiente se sitúa un objeto de 5 mm de altura. Teniendo en cuenta la disposición y distancias de la figura, ¿en qué posición y qué tamaño tendrá la última imagen del objeto dado? ¿Podrá ser recogida en una pantalla? Figura 1ª de la página siguiente.
R.: A 0'29 cm detrás de la 1ª cara del prisma.- Su tamaño es 3'8 mm.- No puede recogerse en una pantalla.

19.- Un recipiente transparente, de pared lateral esférica (tipo pecera) de radio 20 cm, contiene agua (n = 4/3). Se coloca en su interior la lente del problema anterior, en la forma señalada en la figura, manteniendo las distancias y longitudes que se indican. Delante del recipiente se sitúa un objeto de 4 mm de altura. ¿En qué posición y de qué tamaño se verá la última imagen del objeto dado? ¿Podrá ser recogida en una pantalla? Figura 2ª de la página siguiente.
R.: A 139'2 cm por delante de la 1ª cara del prisma.- Su tamaño es 37 mm.- No puede recogerse en una pantalla.

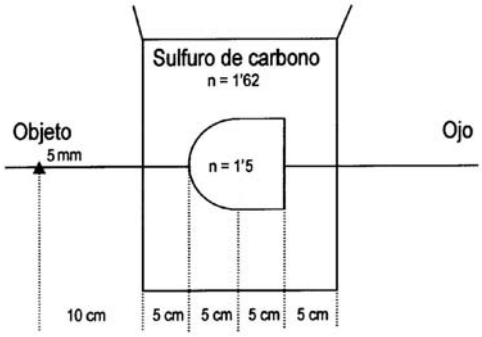


Figura 1ª

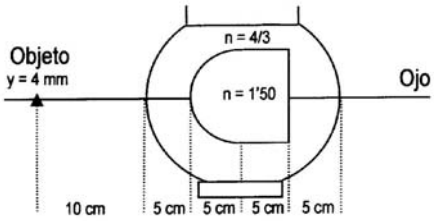


Figura 2ª

www.yoquieroaprobar.es

T E M A 9.-

ÓPTICA GEOMÉTRICA . II .

SUMARIO:

A.- ESPEJOS Y LENTES
9.1.- Espejos
9.2.- Lentes

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

B.- INSTRUMENTOS ÓPTICOS
9.3.- El ojo humano
9.4.- La cámara fotográfica
9.5.- El aparato de proyección
9.6.- La lupa
9.7.- El microscopio
9.8.- El anteojo astronómico
9.9.- Los anteojos terrestres
9.10.- Los telescopios

Actividades desarrolladas
Actividades propuestas

www.yoquieroaprobar.es

A.- ESPEJOS Y LENTES

1.- ESPEJOS

Son superficies en las que se produce la reflexión de los rayos que inciden sobre ellas. Consideraremos únicamente superficies esféricas (en zona paraxial) y planas.

A.- RELACIONES MÁS IMPORTANTES, EN LOS ESPEJOS

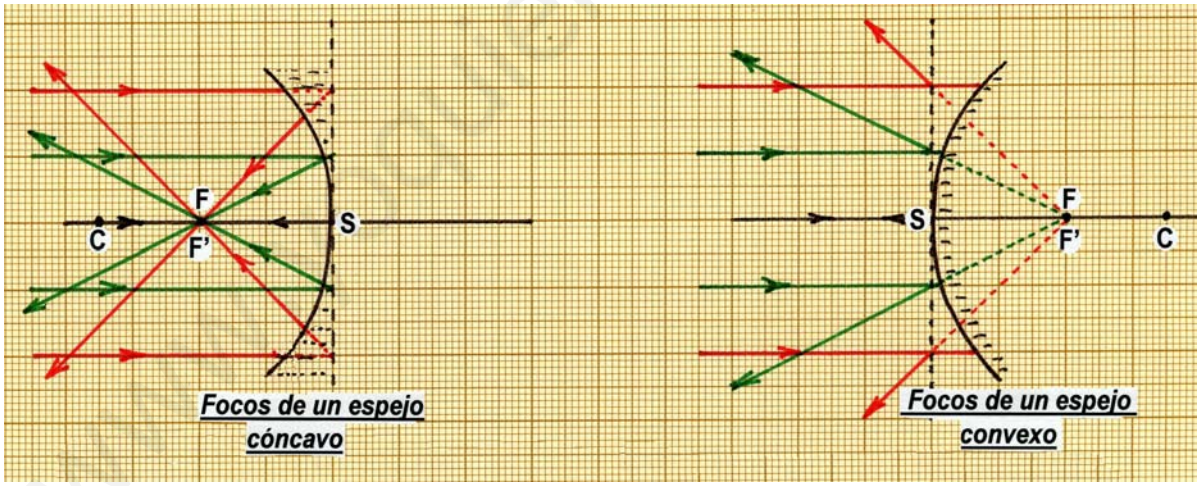
La reflexión puede ser estudiada (ya lo hemos demostrado) como una refracción en la que los rayos pasan de un medio de índice n a otro de índice n' = - n. Entonces;

* Fórmula de Gauss, $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$ → $\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r}}$

* Distancias focales, $f'=\frac{n'}{n'-n}r$ → $f'=\frac{r}{2}$ $f=-\frac{n}{n'-n}r$ → $f=\frac{r}{2}$

Por lo tanto, para un espejo esférico: $\boxed{f = f' = \frac{r}{2}}$ y $\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}}$

⇒ los focos F y F' coinciden y se sitúan a una distancia del vértice S igual a la mitad del radio.



* Aumento lateral, $\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$ → $\beta' \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

Aumento angular, $\gamma' \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}$ → $\gamma' \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}$

Relación, $\beta'\gamma' = \frac{n}{n'}$ → $\beta'\gamma' = -1$

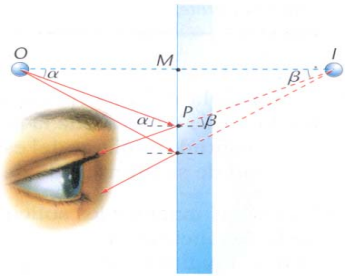
* Los espejos esféricos pueden ser ***convexos*** (r > 0) o ***cóncavos*** (r < 0).

* Un ***espejo plano*** puede ser considerado como un espejo esférico de radio r = ∝. Entonces:

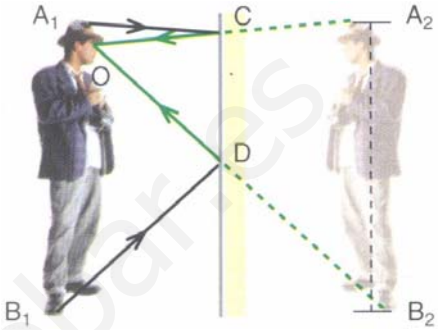
$$s' = -s \qquad\qquad \beta' \equiv \frac{y'}{y} = 1$$

⇒ ***la imagen está situada siempre al otro lado del espejo (imagen virtual); es directa y de igual tamaño que el objeto.***

Rayos de luz divergentes. Se ve el punto A, del cual proceden.



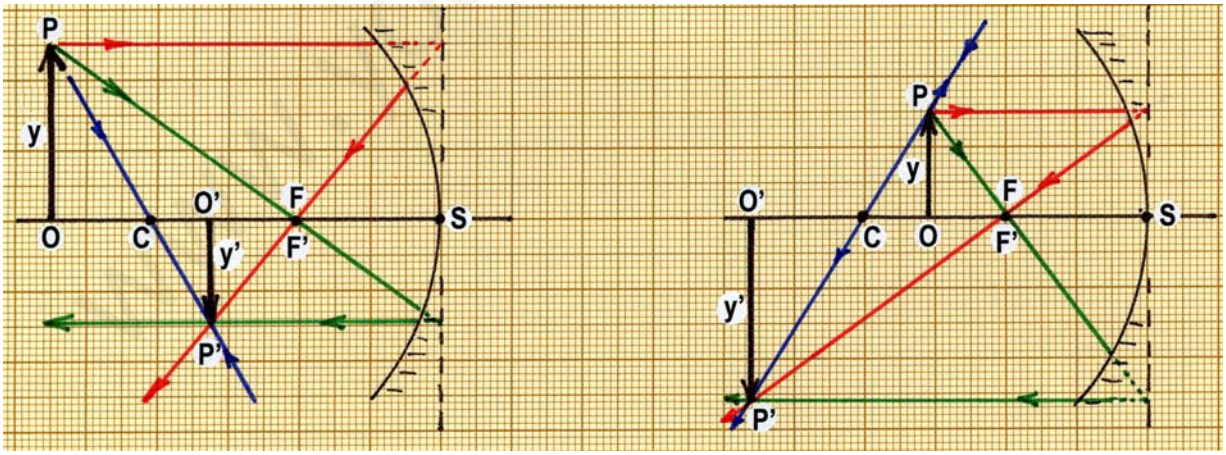
I es la imagen virtual de O.



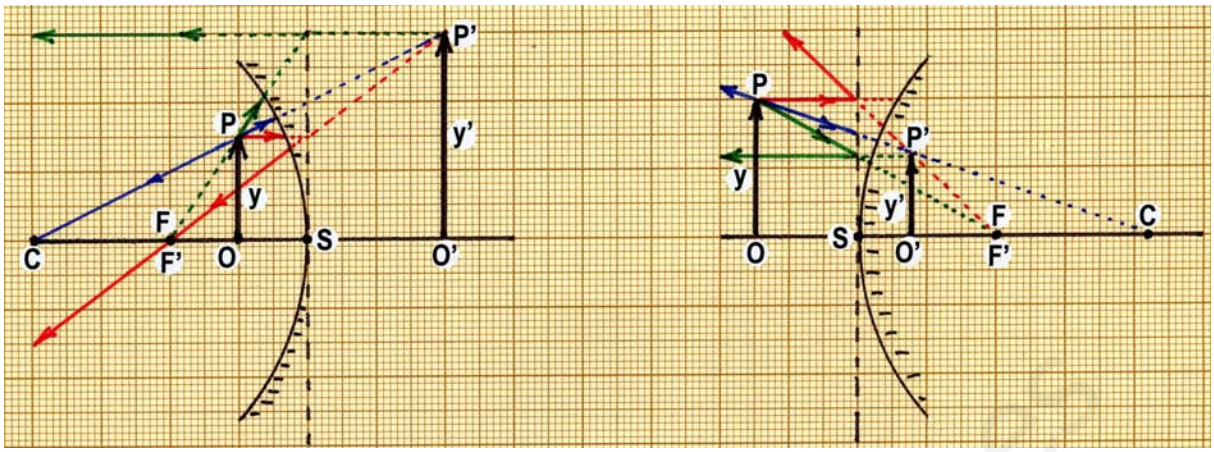
B.- CONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES

Es importante para el alumno aprender a trazar la marcha de los rayos a través de un dioptrio. En el caso de los espejos (generalizable a otros sistemas), se trata de que dado un objeto OP, de tamaño y, siguiendo la marcha de los rayos que proceden de él, podamos dibujar con precisión su imagen O'P', de tamaño y'. O bien, dado un punto O sobre el eje, seamos capaces de situar su imagen O'.

Caso 1º.- *Dado un objeto OP, dibujar su imagen O'P'*.
Desde P se toman dos rayos:

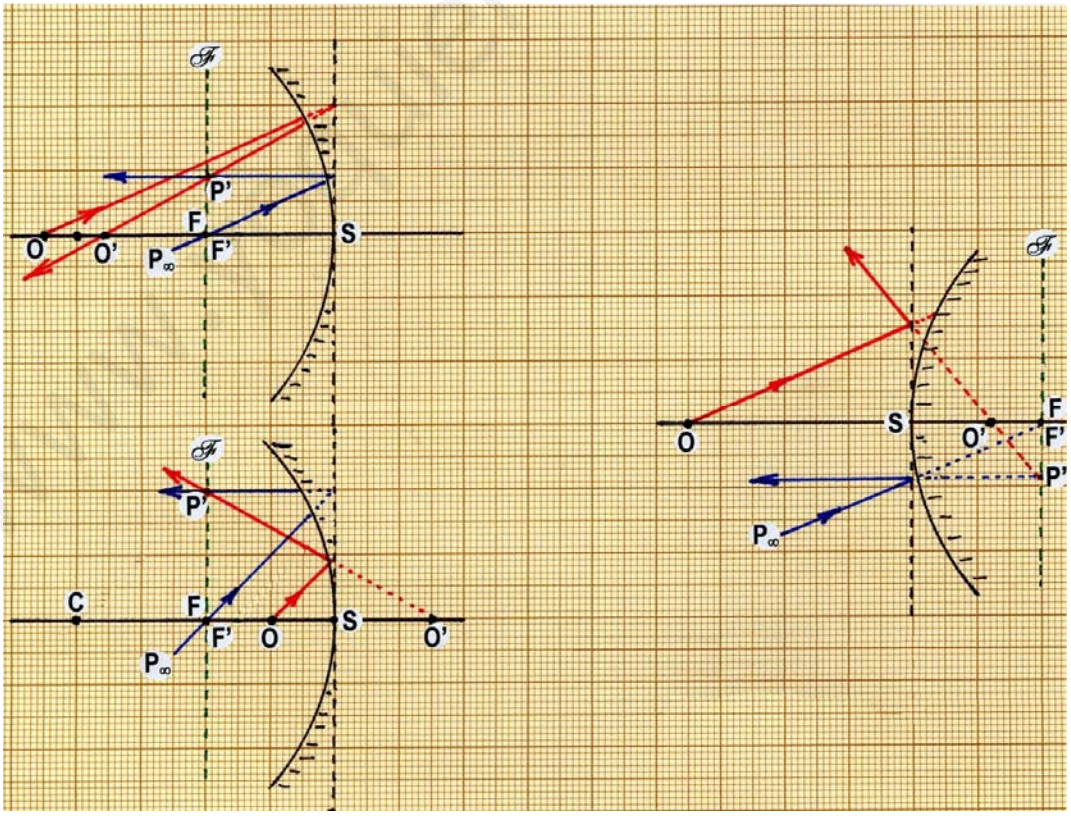


- Uno paralelo al eje; tras la incidencia en el espejo, el rayo reflejado debe pasar por el foco imagen F' (él o su prolongación).
- Otro apunta al foco objeto F; tras el espejo, el rayo reflejado debe salir paralelo al eje.
- La intersección de ambos rayos reflejados (o sus prolongaciones) determina P'.
- Un tercer rayo puede ayudarnos a comprobar la construcción anterior: el rayo que procede de P y pasa por el centro C del espejo no se desvía, por incidir en el espejo normalmente.



Caso 2º.- *Dado un punto O del eje, dibujar la posición de su imagen O'.*

- Desde O, se traza un rayo cualquiera, hasta el espejo.
- Se traza por F un rayo paralelo al anterior, hasta el espejo. Este rayo se refleja, volviendo paralelo al eje, pues procedía de F; corta al plano focal imagen en un punto P'.
- Por dicho punto P' debe pasar el primer rayo reflejado, pues los dos rayos incidentes son paralelos, como si procedieran de P_∞, debiendo formar su imagen en P', del plano focal imagen.
- El primer rayo reflejado corta al eje en O', imagen de O. En efecto, los dos rayos que proceden de O, el primero y el que va por el eje del espejo, tras la reflexión, se se focalizan en O'(ellos o sus prolongaciones).



2.- LENTES DELGADAS

Una lente es un sistema óptico centrado formado por la asociación de dos dioptrios esféricos que limitan un medio transparente.

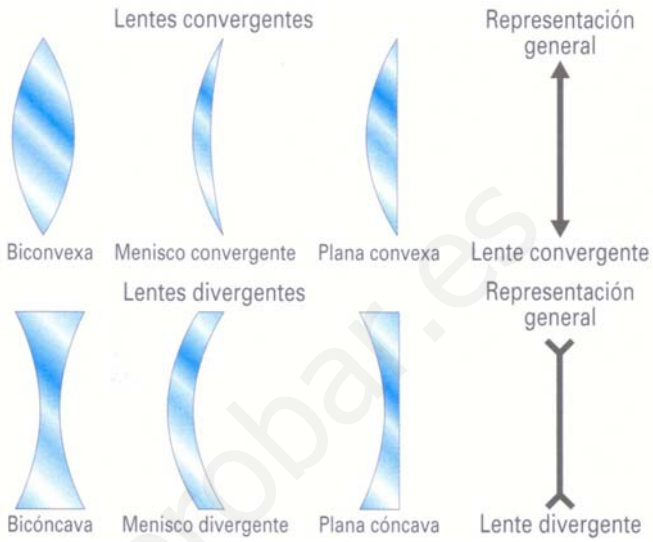
Se clasifican en:

convergentes: Cuando un haz de rayos luminosos, que caminan paralelos al eje del sistema, atraviesa refractándose una lente convergente, se concentra realmente en un punto. Las lentes convergentes pueden ser (figura):

Lentes *biconvexas*, *meniscos convergentes* y *planoconvexas*.

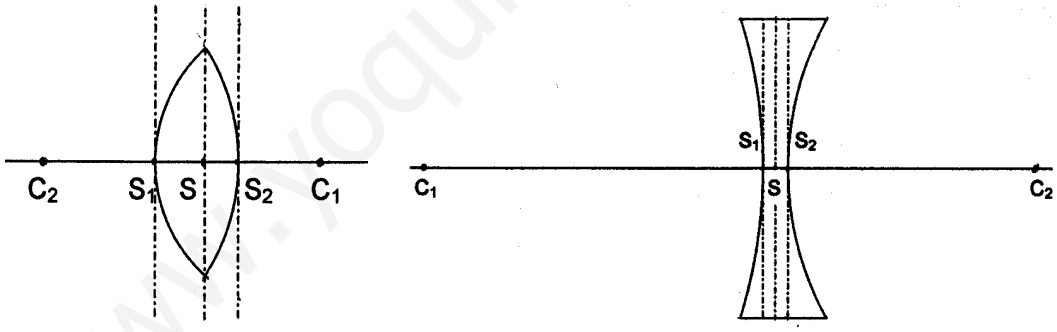
divergentes: Cuando el haz de rayos paralelos, que van paralelos al eje del sistema, atraviesa la lente divergente, tras ella salen divergentes. Pueden ser:

Lentes *bicóncavas*, *meniscos divergentes* y *planocóncavas.*



En la figura también pueden verse sus representaciones esquemáticas, especialmente cuando se trata de lentes delgadas.

A la distancia, en el eje, entre los vértices de los dioptrios que dan lugar a una lente se le denomina ***grosor*** de la lente, $e = S_1S_2$. Los radios de ambos dioptrios son $r_1 = S_1C_1$ y $r_2 = S_2C_2$.



Se denomina ***lente delgada*** a aquélla cuyo grosor es muy pequeño comparado con las distancias laterales que se utilizan (distancias focales, posiciones de objeto e imagen, radios, ...). En este caso, que será el único al que nos refiramos en adelante, se tiene:

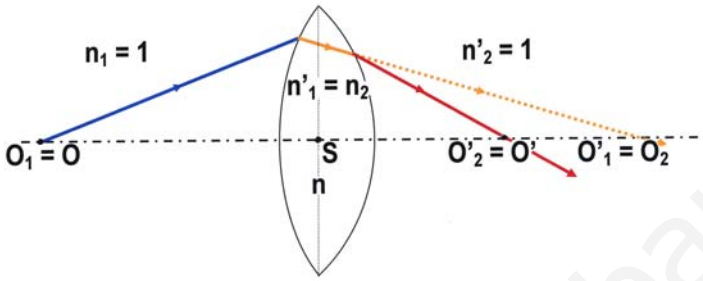
$$e \equiv S_1S_2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \to S \leftarrow S_2 \qquad r_1 \equiv S_1C_1 \cong SC_1 \qquad r_2 \equiv S_2C_2 \cong SC_2$$

El plano por S, plano principal de la lente, es el que juntamente con el eje del sistema determina el sistema de coordenadas a utilizar. Por ello, las lentes delgadas se representan con una flecha de doble punta (en el caso de lentes convergentes).

A.- RELACIONES MÁS IMPORTANTES, EN LAS LENTES DELGADAS

Consideremos una lente delgada, de índice n, situada en el aire (figura). Respecto de los dos dioptrios, en la figura aparecen los diferentes índices: $n_1 = 1 = n'_2$ y $n'_1 = n = n_2$

Sea O un punto objeto, y O' su imagen tras la lente delgada. Entonces se tendrá que $O = O_1$ $O'_1 = O_2$ y $O'_2 = O'$. Asimismo, las diferentes posiciones de los objetos e imágenes dados por los dioptrios serán $s = s_1$ $s'_1 = s_2$ $s' = s'_2$, siempre teniendo en cuenta que estamos estudiando la zona paraxial y que la lente es delgada.



- Apliquemos la fórmula de Gauss a ambos dioptrios:

- dioptrio primero: $$-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s}+\frac{n}{s_2}=\frac{n-1}{r_1}$$

- dioptrio segundo: $$-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{n}{s_2}+\frac{1}{s'}=\frac{1-n}{r_2}$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$\boxed{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

- ***<u>Focos y distancias focales de las lentes delgadas.-</u>***

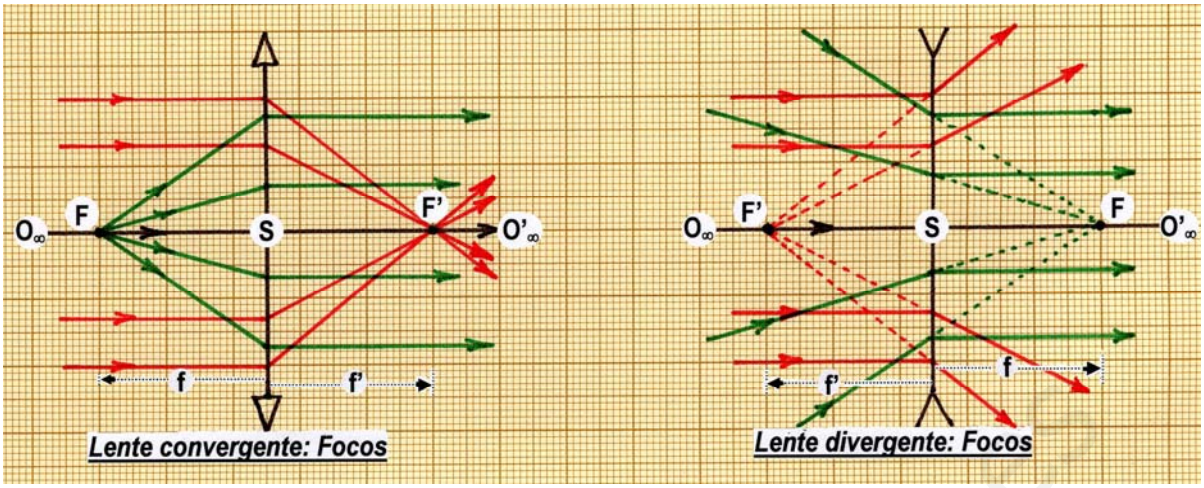
+ IMAGEN.- Un haz de rayos paralelo al eje, incidente en la lente, tras ella, se concentra en un punto del eje. Lo llamamos ***<u>foco imagen</u>*** , F'. Por tanto, son conjugados O_∞ y F', es decir O_∞ es un punto objeto cuya imagen es F'. La distancia f' = SF' se denomina ***<u>distancia focal imagen</u>*** o simplemente ***<u>focal imagen</u>*** de la lente. Se calcula haciendo en la ecuación anterior (&), $s = \propto$ y s' = f', resultando:

$$\boxed{\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

+ OBJETO.- Existe un punto F en el eje que verifica: todos los rayos procedentes de él que atraviesan la lente salen paralelos al eje. Este punto se denomina ***<u>foco objeto</u>***. Por tanto, son puntos conjugados el punto objeto F y su imagen $O'_\propto$. La distancia f = SF se llama ***<u>distancia focal objeto</u>***, o simplemente ***<u>focal objeto</u>*** de la lente. Su valor se obtiene haciendo en la ecuación (&) s = f y $s' = \propto$, con lo que:

$$\boxed{\frac{1}{f}=-(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

www.yoquieroaprobar.es



1) En las lentes delgadas: $\boxed{f = -f'}$ (mientras que en los espejos f = f')

⇒ *los focos se sitúan en puntos simétricos a la lente, sobre el eje:*

+ En las lentes convergentes, F y F' se sitúan a izquierda y derecha de la lente, respectivamente, puesto que f' > 0. Compruébese como ejercicio.

+ En las lentes divergentes, F y F' están respectivamente a derecha e izquierda de la lente, puesto que en ellas f' < 0. Compruébese como ejercicio.

2) ***Potencia*** de una lente.- Se define, P' = 1/f'. Es pues la inversa de la focal imagen. (En realidad se habla de potencia imagen y potencia objeto: P' = 1/f' y P = 1/f. Pero, en el caso de las lentes, P' = - P puesto que f' = - f . Basta por tanto un solo concepto: *potencia imagen* o simplemente *potencia de la lente*, P' = 1/f').

Si la focal de una lente se mide en *metros*, la potencia se expresa en *dioptrías*. Así pues,

1 dioptría = 1 m^{-1}

Por ejemplo, una lente divergente de -7dioptrías tiene una focal f' = -1/7 = - 0.14 m.

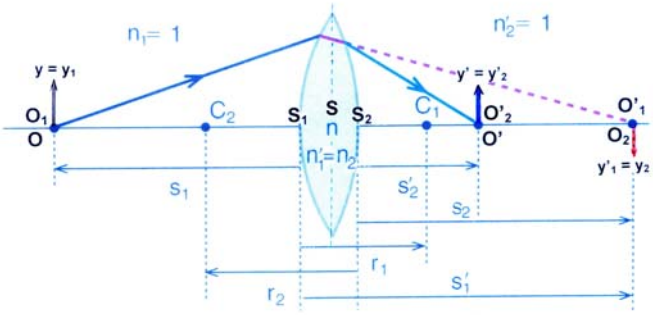
- ***Aumento lateral.-***

Del mismo modo que anteriormente, se
delgada) que:

$n_1 = 1$ $\quad n'_1 = n_2 = n$ $\quad n'_2 = 1$

$y_1 = y$ $\quad y'_1 = y_2$ $\quad y'_2 = y'$

$s_1 = s$ $\quad s'_1 = s_2$ $\quad s'_2 = s'$



Aplicando la fórmula del aumento lateral a cada uno de los dos dioptrios de la lente, se tiene:

$$\beta'_1 = \frac{n_1}{n'_1}\frac{s'_1}{s_1} = \frac{1}{n}\frac{s_2}{s} \qquad \beta'_2 = \frac{n_2}{n'_2}\frac{s'_2}{s_2} = \frac{n}{1}\frac{s'}{s_2}$$

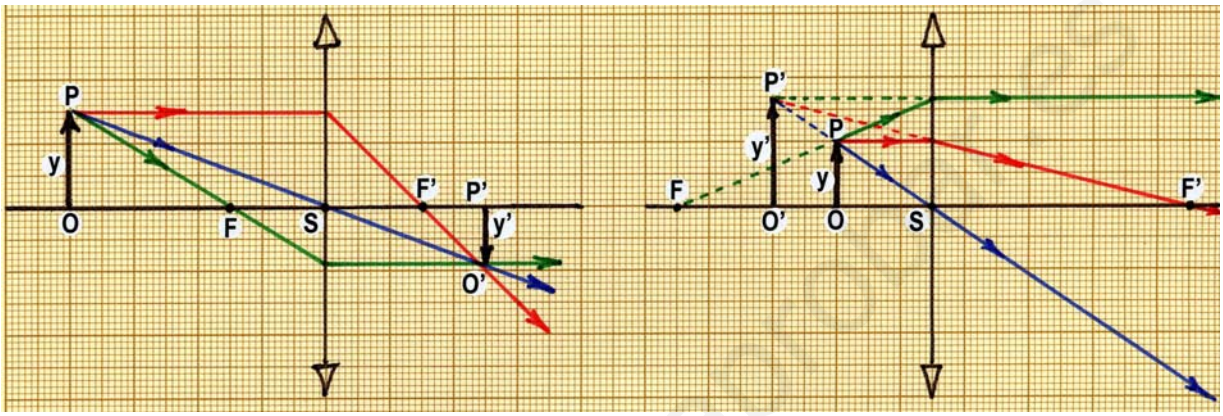
El aumento lateral producido por la lente viene dado por la razón entre el tamaño de la imagen final y el del objeto. O sea:

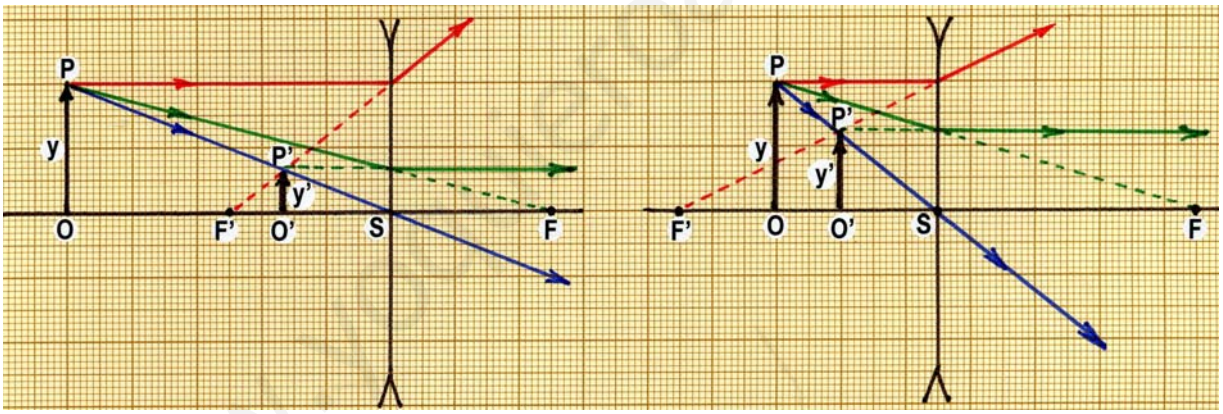
$$\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{y'_2}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2}\frac{y'_1}{y_1} = \beta'_1\,\beta'_2 = \frac{1}{n}\frac{s_2}{s}\frac{n}{1}\frac{s'}{s_2} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}}$$

B.- CONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES

Caso 1º.- *Dado un objeto OP, dibujar su imagen O'P'*.
Desde P se toman dos rayos:

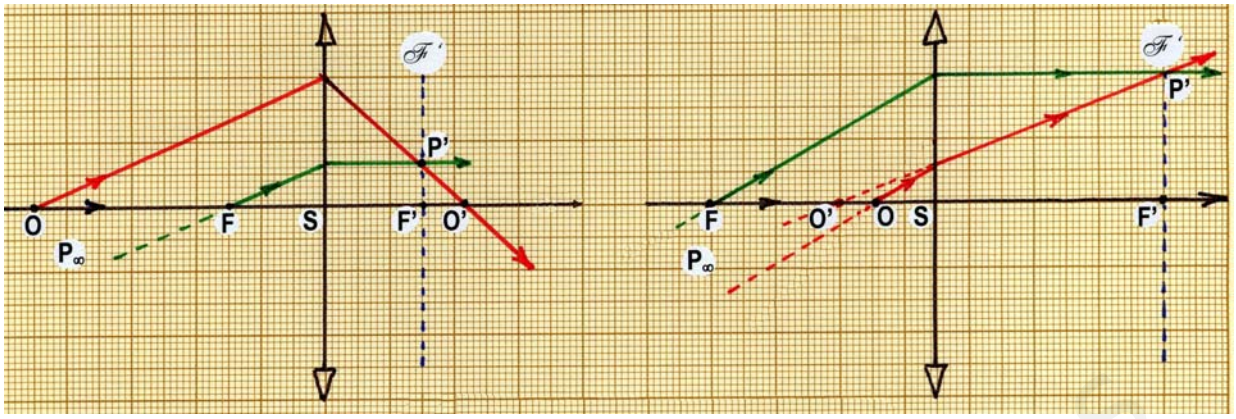
- Uno paralelo al eje; tras la incidencia en la lente, el rayo debe pasar por el foco imagen F' (él o su prolongación).
- Otro apunta al foco objeto F; tras la lente, el rayo debe salir paralelo al eje.
- La intersección de ambos rayos (o sus prolongaciones) determina P'.
- Un tercer rayo puede ayudarnos a comprobar la construcción anterior: el rayo que procede de P y pasa por el centro S de la lente no se desvía.

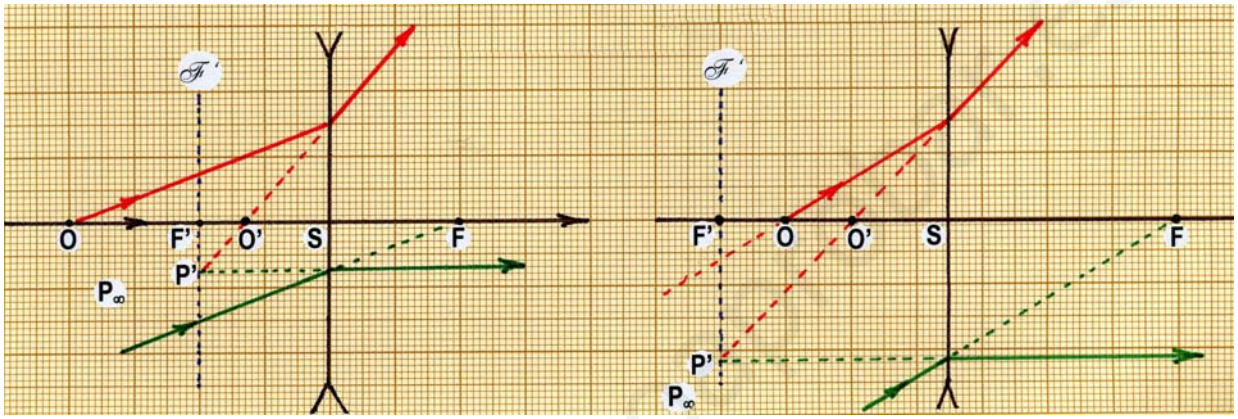




Caso 2º.- *Dado un punto O del eje, dibujar la posición de su imagen O'.*

- Desde O, se traza un rayo cualquiera, hasta la lente.
- Se traza por F un rayo paralelo al anterior, hasta la lente. Este rayo sale de la lente paralelo al eje, pues procedía de F; corta al plano focal imagen en un punto P'.
- Por dicho punto P' debe pasar el primer rayo, pues los dos rayos incidentes son paralelos, como si procedieran de P_∞, debiendo formar su imagen en P', del plano focal imagen.
- El primer rayo corta al eje en O', imagen de O. En efecto, los dos rayos que proceden de O, el primero y el que va por el eje de la lente, tras ella, se se focalizan en O'(ellos o sus prolongaciones).





www.yoquiero

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Se tiene un espejo cóncavo de 1,2 m de radio. Hallar:

a) ¿A qué distancia hay que colocar un pequeño objeto en el eje para obtener una imagen cuatro veces mayor que el objeto?.

b) Comprobación mediante construcción gráfica.

Aumento lateral, en espejos: $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \wedge \quad \beta' = \frac{y'}{y} = \pm 4 \quad \Rightarrow \exists$ dos casos $\begin{cases} \beta' = +1 \Rightarrow s' = -4s \\ \beta' = -1 \Rightarrow s' = 4s \end{cases}$

<u>Caso 1º: s' = - 4s</u>

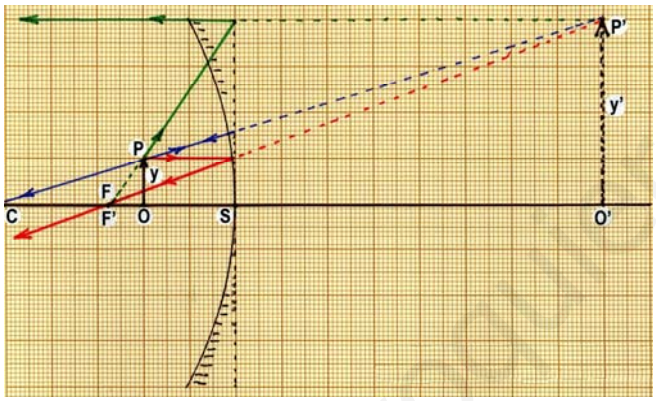
Ecuación de los espejos: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \wedge$ s' = - 4s $\wedge$ r = - 120 cm $\Rightarrow \begin{cases} s = -45\text{cm} \\ s' = 180\text{cm} \end{cases}$

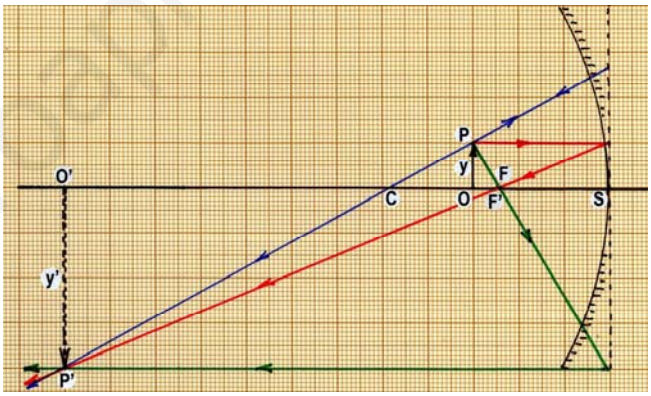
$\Rightarrow$ La imagen es virtual (s' > 0), situada detrás del espejo, directa (y'/y = 4 >0) y cuatro veces mayor que el objeto.

<u>Caso 2º: s' = 4s</u>

Ecuación de los espejos: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \wedge$ s' = 4s $\wedge$ r = - 120 cm $\Rightarrow \begin{cases} s = -75\text{cm} \\ s' = -300\text{cm} \end{cases}$

$\Rightarrow$ La imagen es real (s' < 0), situada a tres metros por delante del espejo; está invertida (y'/y = - 4 < 0) y es cuatro veces mayor que el objeto.





2. Se tiene un espejo convexo de 1,2 m de radio. Hallar:

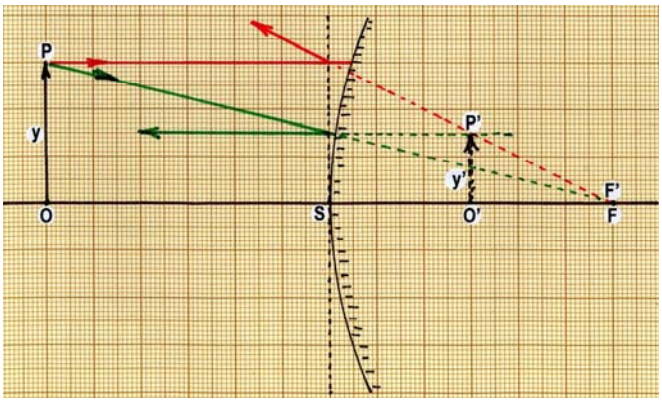
a) ¿A qué distancia hay que colocar un pequeño objeto en el eje para que su imagen tenga la mitad de tamaño?

b) Comprobación mediante construcción gráfica.

Aumento lateral, en espejos: $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

Además: $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}$ Por tanto: s = - 2s'

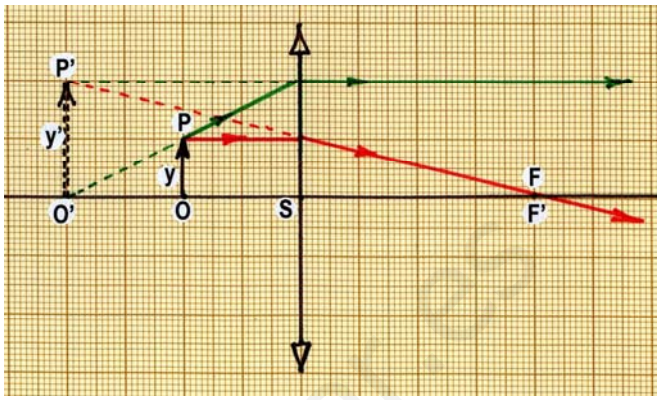
Sustituyendo este valor en la ecuación de los espejos, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$, siendo r = 120 cm resulta $\begin{cases} s = -60\text{cm} \\ s' = 30\text{cm} \end{cases}$ Es, por tanto, una imagen virtual y directa, pues s' > 0 y β' = ½ > 0, y de tamaño la mitad del tamaño del objeto.



3.- La potencia de una lente es de 5 dioptrías.

a) Si a 10cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.

b) Si dicha lente es de vidrio, de índice 1.5, y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra?



a) Potencia y focal: P' = 1/f' = 5 $\Rightarrow$ f' = 20 cm

Ecuación de las lentes delgadas: $-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$

donde s = - 10 cm y f' = 20 cm permite hallar la posición de la imagen:

$-\frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20}$ $\Rightarrow$ s' = - 20 cm

Aumento lateral: $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{-20}{-10}=2$

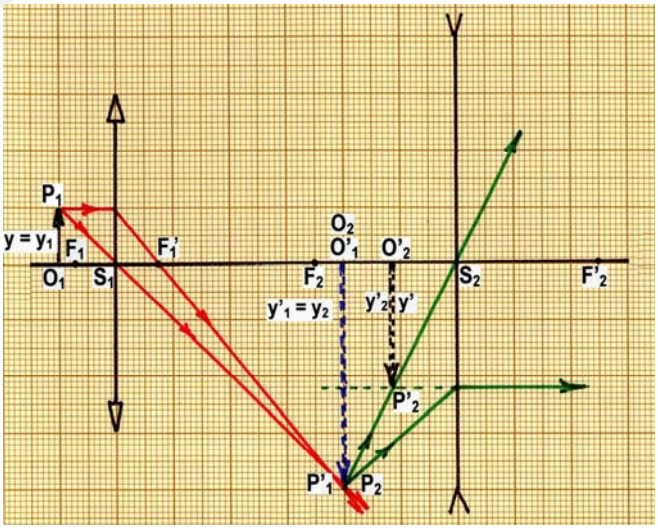
y' = β' y = 2x2 = 4 mm

$\Rightarrow$ La imagen es virtual (s' < 0), directa (β' > 0), y de doble tamaño que el objeto. Se sitúa en la posición del foco objeto F

b) Focal, en lentes delgadas: $\frac{1}{f'}=(n-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$ donde f' = 20 cm, n = 1,5 y r_1 = 10 cm conducen

a que $\frac{1}{r_2}=0$ $\Rightarrow$ $r_2 = \propto$ $\Rightarrow$ la lente es planoconvexa.

4.- Dos lentes, de focales respectivas f'$_1$ = 4 cm y f'$_2$ = - 12 cm, están separadas 30 cm. Un objeto de 7 mm se sitúa 5 cm por delante de la primera. ¿Dónde se forma la imagen? ¿Cuál es su tamaño?



+ Lente 1ª: $-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f'_1}$ donde s_1 = - 5 cm

y f'$_1$ = 4 cm $\Rightarrow$ s'$_1$ = 20 cm

+ Paso de una lente a la otra: en este problema es inmediato ver que s_2 = - 10 cm (figura). En otros no lo es tanto. Es bueno planteárselo así:

$s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -d + s'_1$

siendo d = S_1S_2 la distancia entre las lentes. En nuestro caso: s_2 = - 30 + 20 = - 10 cm

+ Lente 2ª: $-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}$ donde s_2 = - 10 cm y f'$_2$ = - 12 cm $\Rightarrow$ s'$_2$ = - 5,46 cm

+ Tamaño de la imagen final: $\beta' = \frac{y'_2}{y_1}=\frac{y'_2}{y_2}.\frac{y'_1}{y_1}=\beta'_2\,\beta'_1=\frac{s'_2}{s_2}.\frac{s'_1}{s_1}=\frac{-5.45}{-10}\frac{20}{-5}=-2{,}18$

y' = β' y = - 2,18x7 = 15,3 mm.

Resumiendo: la imagen final es invertida, virtual, se encuentra entre ambas lentes, a 5,46 cm a la izquierda de la segunda lente, y su tamaño es 15,3 mm.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Un objeto de 5 cm de altura se coloca delante de un espejo plano y a 60 cm de él. ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?.- ¿Cuál es su tamaño?
R.: A 60 cm, por detrás del espejo.- Imagen virtual, directa y de 5 cm.

2.- Delante de un espejo esférico convexo de 50 cm de radio de curvatura se sitúa un objeto de 4 cm de altura, perpendicular al eje óptico del espejo y a 75 cm de distancia de su vértice. Calcular la distancia focal del espejo y la naturaleza de la imagen.
R.: f' = 25 cm. La imagen se halla a 18.75 cm por detrás del espejo; es virtual, directa y mide 1 cm.

3.- Un espejo esférico tiene un radio de curvatura de 120 cm. Si a una distancia de 90 cm de él se coloca un objeto de 5 cm de altura, calcular la posición y el tamaño de la imagen si el espejo es cóncavo.- Idem, si es convexo.
R.: Cóncavo: Imagen a 180 cm por delante del espejo, real e invertida, de 10 cm de altura.- Convexo: Imagen a 36 cm por detrás del espejo, virtual y directa, de 2 cm de altura.

4.- ¿A qué distancia por delante de un espejo convexo de 30 cm de radio de curvatura y perpendicularmente a su eje debe colocarse un objeto para que el tamaño de la imagen se reduzca a la mitad? ¿Dónde aparece su imagen y cuál es su naturaleza? Realizar la construcción gráfica de la marcha de rayos y obtención de la imagen, según los resultados obtenidos.
R.: El objeto debe colocarse a 15 cm delante del espejo; la imagen resulta virtual, directa y situada a 7,5 cm por detrás del espejo

5.- A 35 cm de distancia de un espejo cóncavo de 60 cm de radio de curvatura se encuentra un objeto. Determinar a qué distancia hay que colocar un espejo plano perpendicular al eje del sistema para que la imagen formada después de reflejarse los rayos en este espejo quede situada en el centro de curvatura del espejo cóncavo. ***Resultado: d = 135 cm***

6.- Si delante de un espejo esférico podemos vernos en cualquier posición en la que nos situemos, ¿de qué clase de espejo se trata? ¿Y si a cierta distancia la imagen desaparece?

7.-Se dispone de un espejo cóncavo de 20 cm de radio y se desea que la imagen se forme a 1 m del espejo. ¿A qué distancia se deberá colocar el objeto? ***R.: Dos posibilidades: con imagen real a 1 m delante del espejo, objeto real a 11.1 cm delante del espejo; y con imagen virtual a 1 m tras el espejo, objeto real a 9.1 cm por delante del espejo***.

8.- La distancia focal de un espejo cóncavo es 0.2 m. ¿Cuánto mide su radio de curvatura? ¿A qué distancia se formará la imagen si el objeto está situado a 2 m del espejo?
R.: Radio de curvatura, 40 cm. Posición de la imagen, 22 cm por delante del espejo.

9.- ¿A qué distancia por delante de un espejo convexo de 30 cm de distancia focal habrá que colocar un objeto de 2 cm de altura para que su imagen tenga una altura de 0,2 cm? Posición y naturaleza de la imagen.
R.: Posición del objeto: 270 cm por delante del espejo. Posición de la imagen, virtual y directa: 27 cm por detrás del espejo.

10.- Sobre una pantalla se desea proyectar mediante un espejo esférico cóncavo que dista de ella 10 m, la imagen de un objeto, de modo que la imagen sea cuatro veces mayor. Determinar la distancia del espejo a la que se debe colocar el objeto, así como el radio de curvatura del espejo. ***R.: A 2.5 m por delante. El radio debe valer 4 m***

11. Un espejo esférico cóncavo, para afeitarse, tiene un radio de curvatura de 30 cm. ¿Cuál es el aumento lateral del espejo cuando el rostro del observador está a 10 cm del vértice del espejo? ***R.:*** **β' = 3**

12.- Un objeto de 5 cm de altura está situado a 60 cm de distancia de una lente convergente de 40 cm de focal. Calcular la potencia de la lente, la posición de la imagen y su tamaño.
R.: 2'5 dptr.- Imagen real, invertida, de 10 cm y situada a 120 cm detrás de la lente.

13.- Un objeto de 5 cm de altura se sitúa a 25 cm de distancia de una lente delgada de 50 cm de focal. Hallar la posición y el tamaño de la imagen, a) si es convergente.- b) si es divergente.
R.: a) Imagen virtual, directa, de 10 cm, a 50 cm delante de la lente.
b) Imagen virtual, directa, de 3.33 cm, situada a 16.7 cm delante de la lente.

14.- ¿Cuál es la potencia y la focal de un sistema óptico constituido por una lente convergente de 2 dioptrías en contacto con otra divergente de – 6 dioptrías? ***R.: - 4 dioptrías f' = - 25 cm***

15.- ¿A qué distancia de una lente convergente se ha de colocar un objeto para que su imagen sea de igual tamaño? ***R.: s' = 2f'***

16.- ¿Varía la distancia focal de una lente si se invierte su orientación respecto al sentido de propagación de la luz? Razona la respuesta, examinando las siguiente lentes:
a) Una lente biconvexa, cuyos radios miden 30 y 45 cm, e índice 1,45. Calcular su potencia y su focal. ***R.: P' = 2,5 dptr f' = 40 cm***
b) Una lente bicóncava, cuyos radios miden 30 y 45 cm, e índice 1,45. Calcular su potencia y su focal. ***R.: P' = - 2,5 dptr f' = - 40 cm***

17.- En un cine se desea aumentar el tamaño de la imagen proyectada sin modificar las dimensiones de la sala y para lograrlo se cambia el objetivo del proyector. ¿Cómo ha de ser la distancia focal del nuevo objetivo: mayor o menor que la del anterior? ***R.: Menor***

18.- Con una lente convergente se obtiene una imagen real a 5 cm de la lente si el objeto está situado a 25 cm de la lente. Calcular la distancia focal imagen. ***R.: f' = 4,17 cm***

19. Se coloca un objeto a 36 cm de una pantalla.
a) ¿En qué puntos entre el objeto y la pantalla ha de colocarse una lente de 8 cm de distancia focal para obtener una imagen sobre la pantalla?
b) ¿Cuál es el aumento de la imagen para estas posiciones de la lente?
R.: a) A 12 cm y a 24 cm del objeto; b) β' = - 2; β' = -1/2.

20.- Una lente tiene radios de 30 y 45 cm, e índice de refracción 1,45. Hallar:
a) La potencia de la lente bicóncava correspondiente, y su focal
b) La potencia de la lente biconvexa correspondiente, y su focal
R.: Bicóncava: P' = - 2,5 dptr f' = - 40 cm Biconvexa: P' = + 2,5 dptr f' = + 40 cm

21.- Una lente biconvexa delgada, de radios de curvatura iguales a 12 cm y de 8,33 dioptrías de potencia, proyecta sobre una pantalla una imagen de tamaño 20 veces mayor que el del objeto. Determinar a qué distancia de la lente es necesario colocar el objeto y la pantalla, así como el índice de refracción de la lente.
R.: El objeto a 12,6 cm y la pantalla a 2,52 m; n = 1,5

22.- A una lente delgada biconvexa de radios 20 y 25 cm e índice de refracción 1,4 se le pega por detrás una lente delgada bicóncava de radios 25 y 30 cm e índice 1,6. Hallar la focal del doblete óptico formado.

Y hallar la posición y naturaleza de la imagen de un objeto situado a 1,5 m por delante del doblete.
R.: Focal f' = - 1,25 metros.- La imagen se sitúa a 68 cm por delante del doblete; es directa, virtual y de menor tamaño (β' = 0,45)

23.- Una lente biconvexa delgada, cuyas caras tienen radios de curvatura de 20 cm, está situada a 25 cm de una pantalla. Si lleva acoplada una lente planocóncava, de índice de refracción 1.5, el sistema forma sobre la pantalla la imagen del infinito del eje. Si se quita la segunda lente, para que la imagen se siga formando en la pantalla es necesario aproximar ésta 8.34 cm. Calcular el índice de refracción de la primera lente, las potencias de ambas lentes y el radio de curvatura de la cara cóncava de la segunda.
R.: n = 1.6 P'_1 = 6 dioptrías; P'_2= -2 dioptrías ; r = 25 cm

www.yoquieroaprobar.es

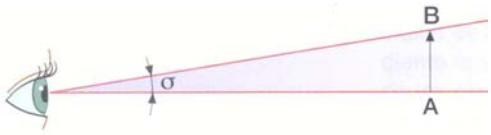
B.- INSTRUMENTOS ÓPTICOS

Las lentes y espejos, estudiados en el apartado anterior, son elementos fundamentales para la creación de sistemas ópticos más complejos, de gran utilidad para la observación visual, captura de imágenes, o transformación de éstas: son los ***instrumentos ópticos***.

Según la naturaleza de la imagen que producen, se pueden clasificar en:

a) Instrumentos de proyección: forman una **imagen real** sobre un receptor.
- El ***ojo***, que forma en la retina imágenes reales de objetos exteriores.
- La ***cámara fotográfica***. Forma imágenes reales sobre placas fotográficas, que son superficies con una emulsión fotosensible, o sobre fotosensores digitales.
- El ***aparato de proyección***, que proporciona imágenes reales de objetos pequeños sobre una pantalla.

b) Instrumentos de observación: son auxiliares del ojo (o de otros sistemas receptores de información óptica), el cual entra a formar parte del sistema completo, como parte última. Estos instrumentos producen una **imagen virtual**, la cual es observada, tras ellos, por el ojo. Pueden ser:
- ***Instrumentos de visión cercana***, que tiene por misión proporcionar la observación de objetos cercanos bajo ángulos visuales mayores que a simple vista. Son fundamentalmente: la *lupa* y el *microscopio* .
- ***Instrumentos de visión lejana***. Con ellos se observan objetos de grandes dimensiones, pero lejanos. El ángulo subtendido por un objeto lejano con el ojo (ángulo visual σ) es pequeño; pues bien, el instrumento óptico permite ver dicho objeto bajo un ángulo visual σ' mayor.
  Los más importantes son: el *anteojo astronómico*, el anteojo terrestre (catalejo), el anteojo de Galileo (gemelos), los prismáticos y el telescopio.

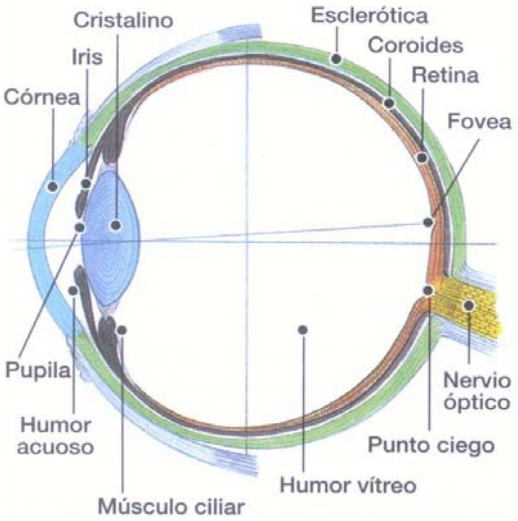


Ángulo visualal, σ.

3.- EL OJO HUMANO

El ojo humano es un sistema óptico constituido por un conjunto de medios transparentes que forman sobre la retina una imagen real e invertida de los objetos.

La forma del ojo es aproximadamente esférica, con un diámetro aproximado de 2,5 cm. Su pared está formada por tres capas concéntricas, que son:



+ La ***esclerótica***, la más exterior, de color blanco, que en su parte anterior forma un casquete transparente, llamada ***córnea***.

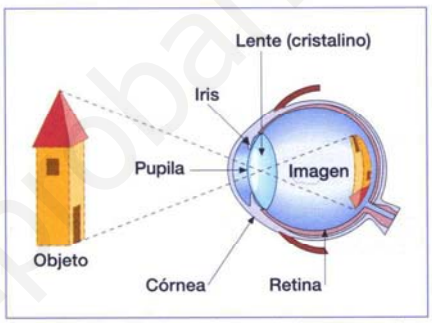
+ La ***coroides***, capa intermedia de color oscuro. Frente a la córnea se aplana, formando el ***iris***, que es una especie de disco de colores variados, en cuyo centro posee un orificio de abertura variable, llamado ***pupila***, a través del cual penetra la luz en el interior del ojo.

+ La ***retina***, que es la capa más interna en la que se encuentran las células receptoras de la luz - *conos* y *bastones* -, las cuales transmiten la información al cerebro por medio del ***nervio óptico***. En el punto de la retina situado detrás de la pupila existe una región llamada *mancha amarilla* en la que la visión es mucho más aguda; mientras que en el punto por donde el nervio óptico entra en el ojo no existen conos ni bastones, por lo que las imágenes que se formen en dicho punto no resultan visibles, denominándose por esta razón *punto ciego*.

Detrás del iris se encuentra el ***cristalino***, que es una lente biconvexa con un índice de refracción variable, desde 1.41 en el centro hasta 1.38 en la periferia; sus radios de curvatura, en reposo, son para un ojo normal r_1 = 10 mm y r_2 = - 6 mm. Esta curvatura puede ser modificada mediante la acción de los llamados *músculos ciliares*, para así permitir la visión de los objetos próximos y lejanos *(acomodación).*

El *humor vítreo* y el *acuoso*, de índice de refracción 1.336 (muy semejante al del agua) rellenan, respectivamente, los espacios del globo ocular situados detrás y delante del cristalino.

La luz penetra en el ojo a través de la córnea, encargándose el cristalino de enfocarla sobre la retina, donde se forman las imágenes de los objetos. Si todos los elementos constituyentes del ojo fuesen rígidos, habría una única distancia objeto para la cual se formaría una imagen nítida sobre la retina. Sin embargo, en la práctica el ojo normal puede enfocar con nitidez cualquier objeto situado entre el infinito (*punto remoto*) y unos 25 cm del ojo (*punto próximo*), lo que resulta posible gracias al proceso de ***acomodación*** antes mencionado.



En la retina del ojo se forma la imagen real e invertida de los objetos.

Con la edad el cristalino va perdiendo flexibilidad, y el alcance de la acomodación disminuye, alejándose el punto próximo del ojo. Este alejamiento del punto próximo con la edad se denomina presbicia o vista cansada, y no se trata realmente de un defecto de la visión, ya que se produce en la misma proporción en todas las personas. La presbicia, al igual que el defecto llamado hipermetropía, se corrige con lentes convergentes.

DEFECTOS DE LA VISIÓN

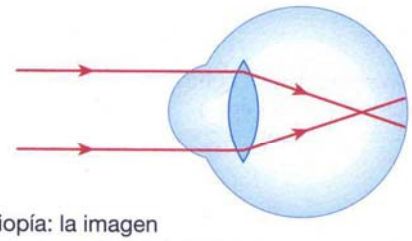
El ojo es un sistema óptico en el que la relación entre sus diversas partes no siempre es la correcta. Esto da lugar a una serie de defectos de funcionamiento que se traducen en una variación del intervalo de acomodación.

El ojo normal (*emétrope*) forma sobre la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Pero si no puede situar dicha imagen en ella, sino delante, se dice que el ojo es *miope*. Si la forma detrás, el ojo es *hipermétrope*.

Por otro lado, el ojo puede ser defectuoso también por falta de esfericidad del globo ocular o falta de esfericidad de las superficies del cristalino. El ojo presenta entonces el defecto denominado *astigmatismo*.

a) Miopía

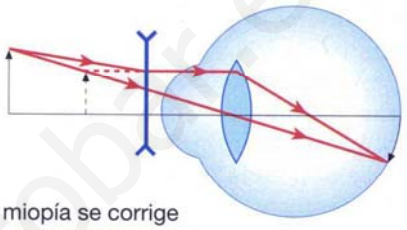
La miopía puede deberse o a que el globo ocular es demasiado largo comparado con el radio de curvatura de la córnea o a que el cristalino es excesivamente convergente; en cualquier caso, la imagen de un objeto situado en el infinito se forma delante de la retina.



Miopía: la imagen se forma delante de la retina.

El punto remoto del ojo se acerca y los objetos lejanos se ven borrosos. Por regla general, el punto próximo de un ojo miope también se encuentra más cercano que lo que corresponde a una persona con vista normal, pudiendo llegar a ser de sólo 5 cm

La miopía se corrige mediante el uso de *lentes divergentes* que formen la imagen de objetos lejanos a una distancia del ojo no superior al punto remoto, es decir, tales que su foco imagen coincida con el punto remoto del ojo. De esta manera se consigue que los rayos paralelos al eje y procedentes del infinito entren en el ojo, tras refractarse en la lente, como si procedieran del punto remoto.



La miopía se corrige con lentes divergentes.

Como ejemplo, un problema.-

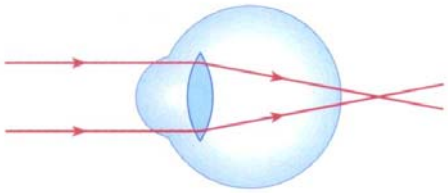
El punto remoto de un ojo miope se encuentra situado a 50 cm por delante del mismo. ¿Cuál ha de ser la potencia de la lente necesaria para corregir la miopía?

Se supone que la imagen de los objetos situados en el infinito se forma en el punto remoto del ojo. Por tanto, s = ∞ y s' = - 50 cm

$$-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{-50}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = -50 \text{ cm} = -0.5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad P' = 1/f' = -2 \text{ dioptrías}$$

⇒ la lente ha de ser divergente, de –2 dioptrías.

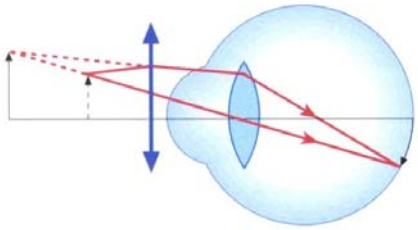
b) Hipermetropía



Hipermetropía: la imagen se forma detrás de la retina.

Es el defecto opuesto a la miopía. Se debe a que el globo del ocular es demasiado corto, o bien el radio de curvatura de la córnea es demasiado elevado, o también porque el cristalino no es suficientemente convergente. En consecuencia, la imagen de un objeto situado en el infinito se forma sin acomodación detrás de la retina.

Por la misma razón, el punto próximo del ojo hipermétrope se encuentra más lejos de lo normal. De esta forma, los objetos lejanos se ven perfectamente con acomodación, pero para la visión de los objetos próximos es necesaria la utilización de *lentes convergentes* tales que formen la imagen del objeto en el punto próximo o más allá de él.



La hipermetropía se corrige con lentes convergentes.

www.yoquieroaprobar.es

Como ejemplo, un problema.-

El punto próximo de un ojo hipermétrope se encuentra situado a 1 m por delante del mismo. Si se desea leer colocando el libro a 25 cm de distancia, ¿cuál ha de ser la potencia de la lente necesaria para conseguirlo?

La lente ha de formar la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo a una distancia de 1 m. Por tanto se debe verificar: objeto (libro), s = - 25 cm; imagen, s' = - 100 cm.

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas, resulta:

$$-\frac{1}{-25}+\frac{1}{-100}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = 33.33 \text{ cm} = \frac{1}{3}\text{m} \quad \Rightarrow \quad P' = \frac{1}{f'} = 3 \text{ dioptrías}$$

$\Rightarrow$ la lente tiene que ser convergente, de + 3 dioptrías.

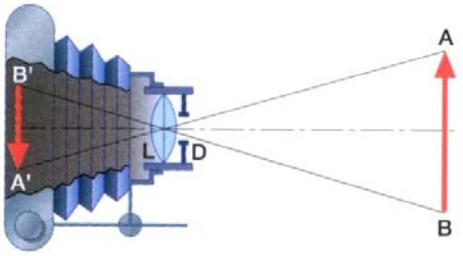
c) ***Astigmatismo***

Es un defecto debido a la falta de esfericidad de las superficies que limitan los diversos medios refringentes del ojo, en especial la córnea. Éstas no son perfectamente esféricas, sino que tienen una curvatura mayor en un plano axial que en otro. Se pone de manifiesto en que no se pueden ver simultáneamente y con claridad dos rectas perpendiculares situadas en el mismo plano frontal.

El astigmatismo se corrige mediante *lentes cilíndricas* de convergencia adecuada.

4.- LA CÁMARA FOTOGRÁFICA

La cámara fotográfica está constituida, a grandes rasgos, por un sistema convergente de lentes que recibe el nombre de ***objetivo***, situada en el interior de una estructura de paredes opacas (***cámara*** oscura). La longitud de esta cámara puede variar para conseguir el *«enfoque»* de los diversos objetos AB, de manera que su imagen correspondiente A'B' (real e invertida) se forme en el plano posterior, donde se coloca una placa o ***película fotosensible.***



Marcha de los rayos en una cámara fotográfica.

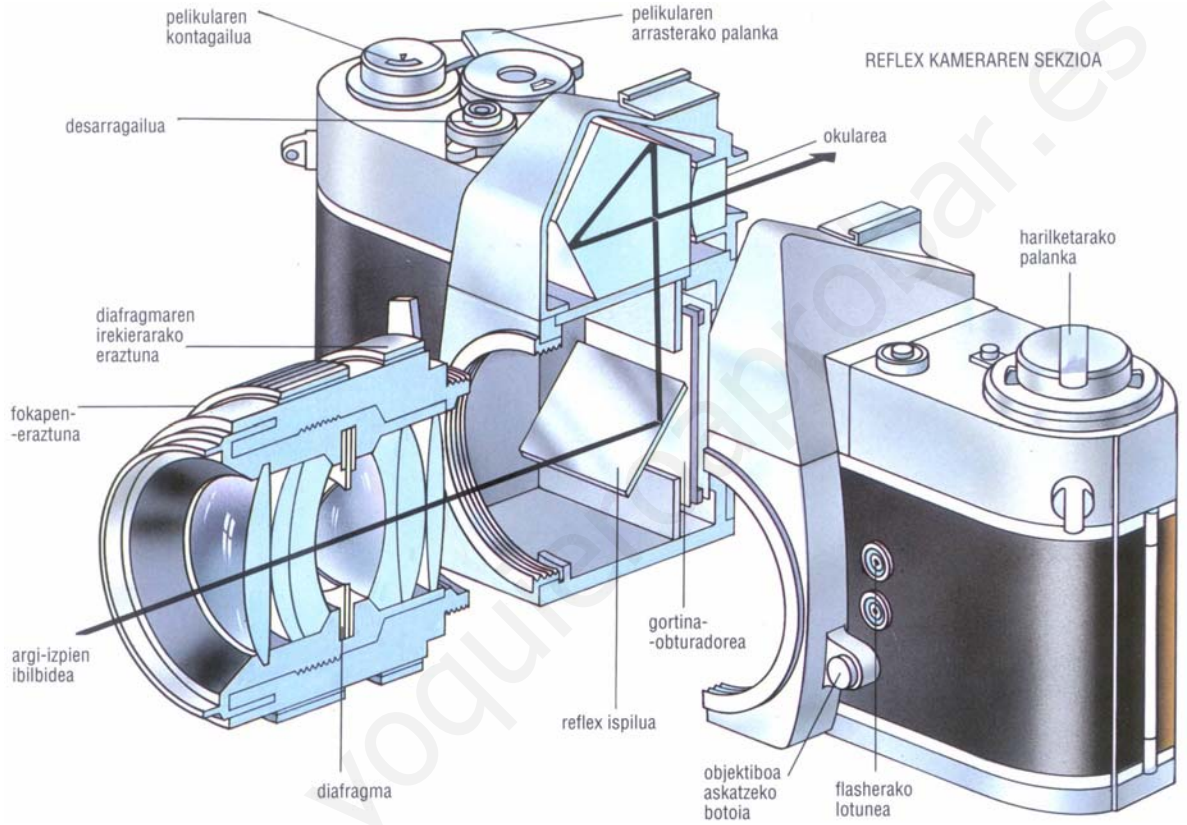
El cono luminoso que atraviesa el objetivo se regula por medio del *diafragma* D, que es una pantalla opaca provista de un orificio de diámetro variable.

Se llama *tiempo de exposición* el intervalo durante el cual permanece abierto el orificio del diafragma, una vez que se ha «disparado» su mecanismo de apertura u obturador

La ***iluminación*** de la imagen se puede regular modificando el *tiempo de exposición* o la *apertura del diafragma*, de modo que se pueden conseguir niveles de iluminación semejantes con grandes aperturas de diafragma y tiempos de exposición pequeños, o con pequeñas aperturas y exposiciones largas.

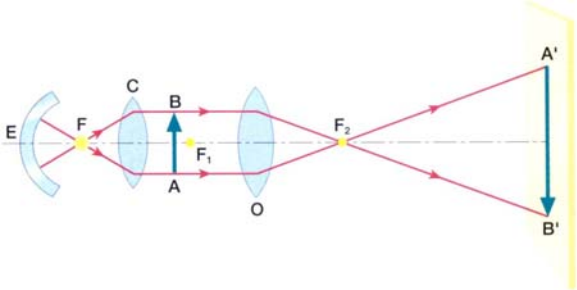
Sin embargo, hay que tener también en cuenta la propiedad llamada *profundidad de campo* o ***profundidad de enfoque***, consistente en el enfoque simultáneo de otros objetos situados a distancias diferentes del enfocado principal. Aunque esto resulta rigurosamente imposible, se puede obtener una nitidez aceptable en las fotografías eligiendo adecuadamente la abertura del diafragma.

La iluminación de la imagen es proporcional al cuadrado del diámetro del diafragma, mientras que *la profundidad de enfoque es tanto mayor cuanto menor es dicho diámetro.* Por tanto, hay que llegar a un compromiso entre ambas magnitudes, *abertura del diafragma y tiempo de exposición.* Hoy día, las cámaras fotográficas compactas resuelven dicho compromiso, regulando electrónicamente ambos factores de modo adecuado en cada caso concreto.



5.- EL APARATO DE PROYECCIÓN

Consta básicamente de una lente convergente u ***objetivo***, O. El objeto que se va a proyectar (una diapositiva, por ejemplo) se sitúa entre el foco y el doble de la distancia focal, pues de esta manera se consigue una imagen real y de mayor tamaño. Pero como esta imagen es invertida con respecto al objeto, éste ha de colocarse en sentido contrario a como se le ha de observar, para que la imagen sea directa.



El *enfoque* se consigue variando levemente la distancia objeto-objetivo, por desplazamiento del objetivo, acercándolo o alejándolo del objeto.

Como, en general, la distancia L de la pantalla al objetivo es grande en comparación con la distancia focal f', puede considerarse que el objeto se encuentra prácticamente en el foco de la lente y, por tanto, el aumento del aparato de proyección, que es la relación entre los tamaños de la imagen y del objeto, será igual a la relación entre la distancia de la pantalla al objetivo y su distancia focal (s' = L y s = - f'): $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \approx -\frac{L}{f'}$ (signo – : imagen invertida)

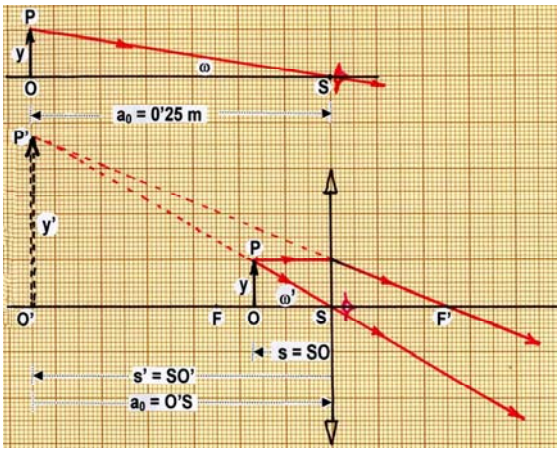
Para observar en buenas condiciones la imagen proyectada en la pantalla se requiere una gran iluminación, que se consigue mediante un ***foco luminoso*** potente (lámpara de incandescencia, F) y un ***condensador*** C (lente convergente en cuyo foco se sitúa el foco luminoso); para aprovechar al máximo la luz se coloca detrás del foco un ***espejo*** cóncavo, E, centrado en el foco luminoso).

6.- LA LUPA

Es el instrumento óptico más sencillo: es una lente convergente. Tiene como misión proporcionar al ojo una imagen virtual y directa de un objeto cercano que se vea bajo un ángulo mayor que el correspondiente a la visión sin la lente. Para ello es necesario que el objeto se coloque entre el foco objeto y la lente, pues sólo así la imagen resulta virtual y directa.

Como para todos los instrumentos auxiliares de ojo, el *aumento visual,* o simplemente ***aumento***, se define por el cociente entre las tangentes de los ángulos bajo los cuales se ve el objeto con y sin instrumento (figura):

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}$$



+ ***Imagen en el punto próximo:***

Cuando queremos observar un objeto cercano sin ningún instrumento auxiliar y queremos obtener de él la mayor cantidad de información, deberemos observarlo lo más cerca posible para que los detalles a captar subtiendan el mayor ángulo con el ojo. Pero esto tiene un límite, ya que más cerca del *punto próximo* no vemos con nitidez. Por ello, tomaremos como distancia de observación sin instrumento la *"distancia mínima de visión distinta"*. Para un ojo normal, se conviene en tomar, como tal distancia, a_0 = 0.25 m.

Para observar con la lupa en condiciones comparables, pongamos el mismo objeto *y = OP* en un punto O de modo que la imagen virtual *y' = O'P'* se forme en la posición s' = - a_0 = - 0.25 m respecto de la lupa. Si en estas condiciones suponemos el ojo inmediato a la lente junto al punto S, veremos la imagen *y'* bajo un ángulo ω'. De acuerdo con la figura anterior:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{OP}{OS} = \frac{y}{a_0} \qquad \operatorname{tg}\omega' = \frac{O'P'}{O'S} = \frac{OP}{OS} = \frac{OP}{-SO} = \frac{y}{-s} = -\frac{y}{s}$$

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{f'} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{f'}$$

Sustituyendo en la fórmula que define el aumento de la lupa:

$$A \equiv \frac{tg\omega'}{tg\omega} = \frac{-y/s}{y/a_0} = -\frac{a_0}{s} = a_0\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{f'}\right) = 1 + \frac{a_0}{f'} \rightarrow \boxed{A = 1 + \frac{0.25}{f'} = 1 + P'/4}$$

en donde recordamos que P'= 1/f' es la potencia de la lente, y ha de expresarse en dioptrías.

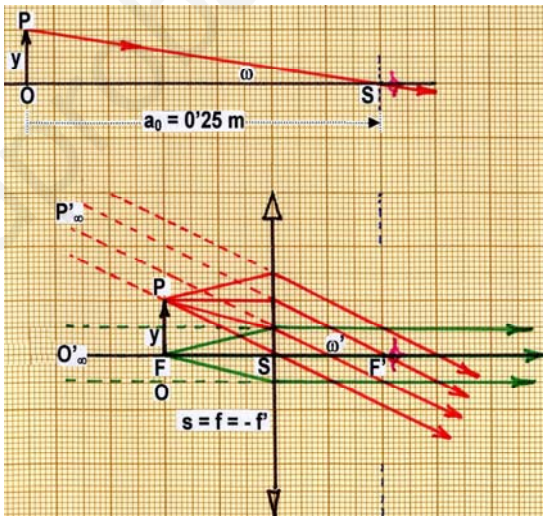
+ ***Imagen en el punto remoto (en el ∞):***

Otro modo de mirar con lupa es fijar la posición del objeto sobre su foco anterior, de modo que entonces la imagen virtual se forme en el infinito, con lo que el ojo normal la ve sin acomodación. En este caso los rayos procedentes del extremo P del objeto salen paralelos entre sí, formando un ángulo común con el eje, ω', tal que:

$$tg\ \omega' = \frac{FP}{FS} = \frac{FP}{-SF} = \frac{y}{-f} = \frac{y}{f'}$$

En este caso, el aumento se denomina *aumento comercial* de la lupa, y su valor es:

$$A_c \equiv \frac{tg\omega'}{tg\omega} = \frac{y/f'}{y/a_0} = \frac{a_0}{f'} \rightarrow \boxed{A_c = \frac{0.25}{f'} = P'/4}$$



Como vemos, según se sitúe la lupa al utilizarla, su aumento varía desde el valor A_c , para la visión sin acomodación, en el punto remoto, hasta el valor A para la visión a la mínima distancia de visión distinta, en el punto próximo, verificándose que $A = A_c + 1$.

Nótese que las lentes convergentes para que puedan ser utilizadas como lupas requieren tener al menos cuatro dioptrías de convergencia. En efecto, A_c debe ser mayor que la unidad para que ω' > ω, y pueda obtenerse una imagen mayor que el objeto.

Entonces: $A_c = P'/4 > 1 \Rightarrow P' > 4$ dioptrías.

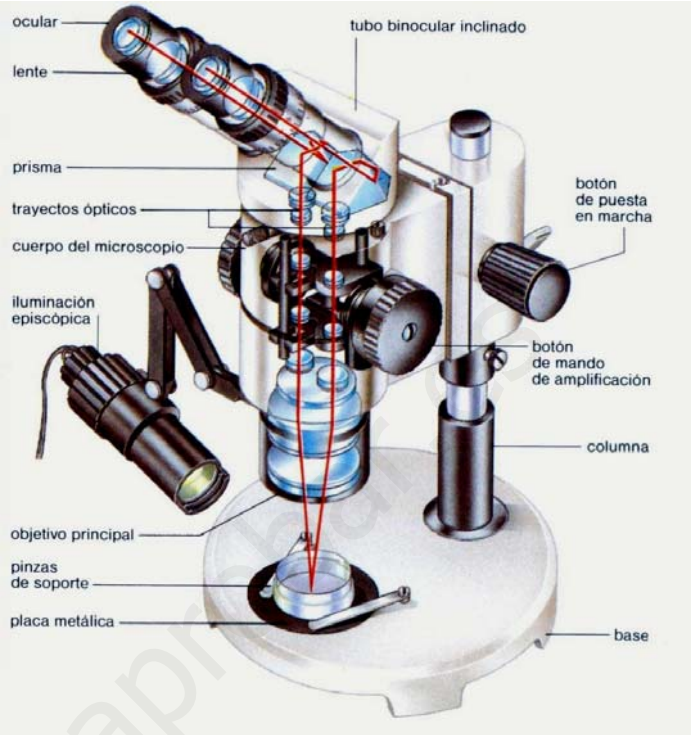
7.- EL MICROSCOPIO

El microscopio consta de tres partes esenciales: ***sistema de iluminación***, ***objetivo*** y ***ocular***. El sistema de iluminación está formado por una lámpara y una lente-condensador para iluminar fuertemente la preparación a observar. No hablaremos de este sistema.

Los objetivos y los oculares de un microscopio son sistemas convergentes, muy complejos; un estudio elemental los sustituye por dos lentes convergentes, que llamaremos asimismo objetivo y ocular del microscopio.

El papel del objetivo es obtener de un objeto muy pequeño una imagen real muy grande, que luego ha de ser observada a través del ocular, que actúa como una lupa. Véanse las figuras.

La distancia $\Delta \equiv F'_1 F_2$ (distancia entre el foco imagen del objetivo y el foco objeto del ocular) se denomina ***intervalo óptico*** del microscopio. Suele ser constante, e igual a 16 cm para la mayoría de los fabricantes



Observación: El objeto y_1 debidamente iluminado se sitúa delante del objetivo, y algo más alejado que su foco F_1.

El objetivo produce una imagen real y'_1 que es observada a través del ocular, al modo como una lupa observa un objeto: y'_1 es pues igual a y_2, y su imagen y'_2 será virtual. La observación por el ocular puede ser como señala la figura 1, o bien (como suele ser más común) situando y'_2 en el infinito, con lo cual el ojo no necesita esfuerzo de acomodación por lo que puede observar durante largo tiempo sin fatiga (figura 2).

Aumento: Funcionando el microscopio en las condiciones dichas en segundo lugar, el aumento total del microscopio será:

$$A = \beta'_{0bj}\,\beta'_{oc} = \beta'_{obj}\,A_c = \frac{y'_1}{y_1}\frac{0.25}{f'_2}$$

Teniendo en cuenta las igualdades

$$S_1Q_1 = y_1 \quad S_1F'_1 = f'_1 \quad F_2P'_1 = y'_1 \quad F_2F'_1 = -\Delta$$

y que los triángulos $Q_1S_1F'_1$ y $P'_1F_2F'_1$ son semejantes, resulta:

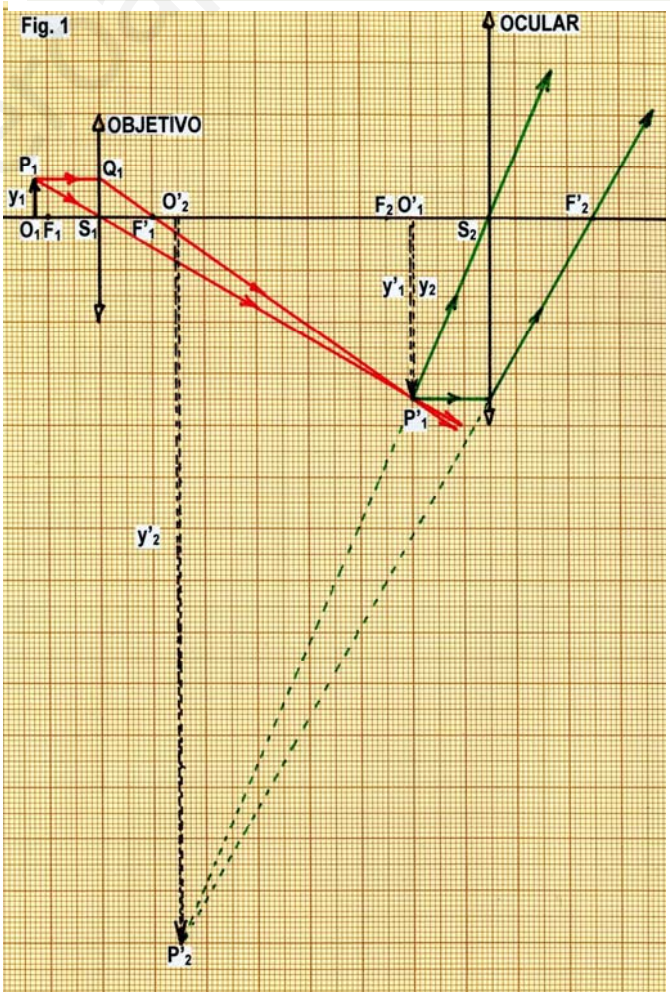
$$\beta'_{obj} = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{F_2F'_1}{S_1F'_1} = \frac{-\Delta}{f'_1}$$

Y sustituyendo arriba (llamando previamente $f'_1 = f'_{obj} = 1/P'_{obj}$ y $f'_2 = f'_{oc} = 1/P'_{oc}$), se llega a:

$$\boxed{A = -\frac{\Delta}{f'_{obj}}\frac{0.25}{f'_{oc}} = -0.25\,\Delta\;P'_{obj}\,P'_{oc}}$$

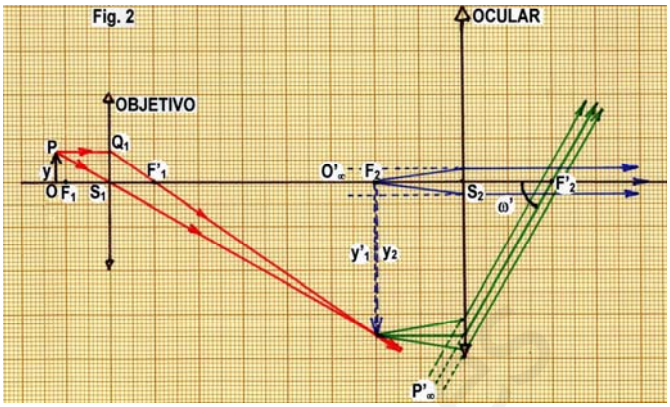
El signo menos señala que la imagen proporcionada por el microscopio es invertida, lo cual carece de importancia.

El valor numérico del factor Δ/f'_{obj} suele estar inscrito en los objetivos, seguido por un aspa, y el del factor $0.25/f'_{oc}$ lo está en los oculares precedido del mismo signo. Un microscopio con un objetivo de 50x y un ocular de x10 opera con 500 aumentos.



El aumento lateral de los objetivos varía entre 1 y 500, y el de los oculares entre 1 y 20, aproximadamente.

+ *Enfoque:* La distancia objetivo-ocular en un microscopio es constante. Por tanto, para enfocar el objeto iluminado se debe desplazar mediante una cremallera el cuerpo completo del microscopio, variando su distancia O_1F_1 al objeto. Estos movimientos siempre son muy finos, para un enfoque perfecto, por lo que también los microscopios suelen llevar un tornillo micrométrico de avance muy lento para el afinado del enfoque.

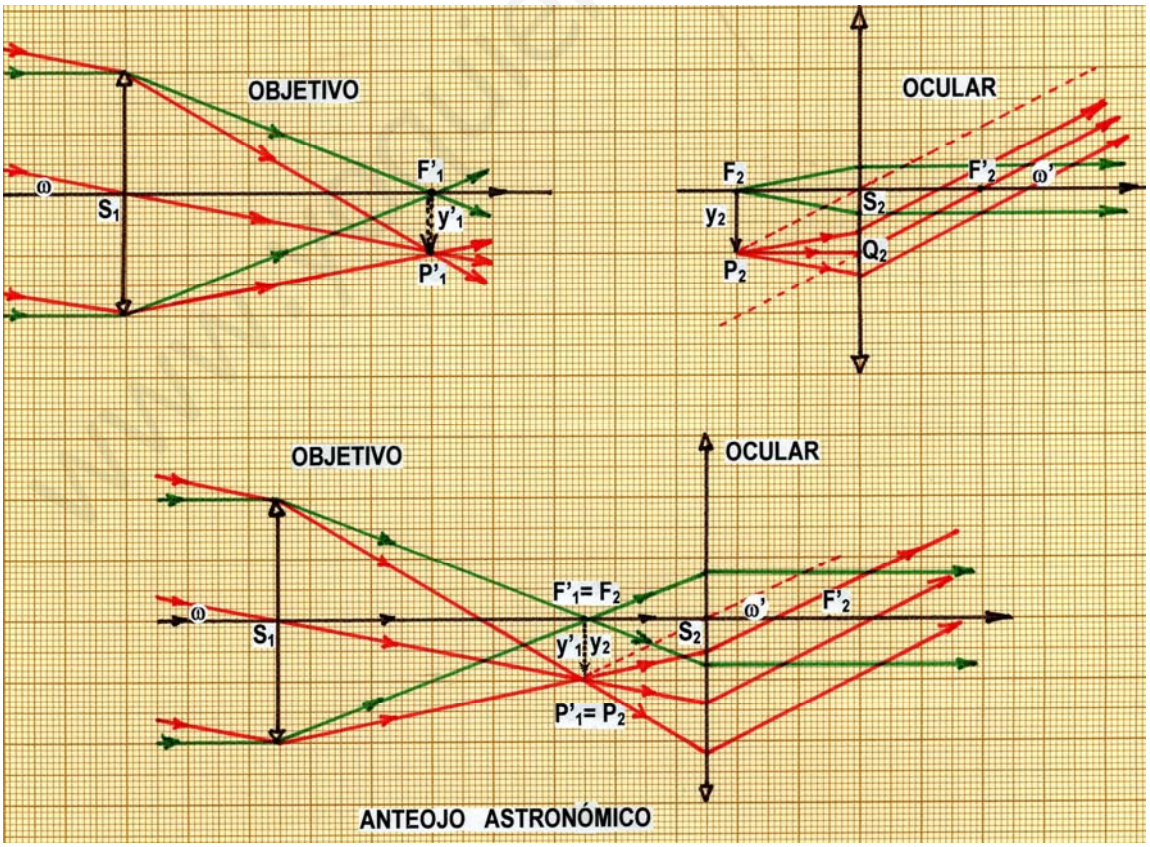


8.- EL ANTEOJO ASTRONÓMICO

El anteojo astronómico consta de dos sistemas convergentes, que en nuestro estudio elemental van a ser sustituidos por dos lentes convergentes:

+ ***el objetivo***: recibe los rayos procedentes de un objeto lejano (en el infinito), por ejemplo, la luna, el firmamento..., y forma en su plano focal imagen una imagen real e invertida.

+ ***el ocular***: la imagen dada por el objetivo se sitúa en el plano focal objeto del ocular, que actuando como una lupa, proporciona una imagen virtual, situada en el infinito, para ser observada por el ojo.



+ *Observación:* El conjunto de ambos sistemas (figura inferior) se acopla de modo que coincidan el foco imagen del objetivo con el foco objeto del ocular. De este modo, un objeto real en el infinito, que subtiende con el observador un ángulo visual ω, es visto por el ojo bajo un ángulo ω', mayor, procedente de una imagen virtual e invertida.

+ *Aumento:* El aumento producido por el anteojo es, como en casos anteriores:

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}$$

Según la figura: $\operatorname{tg}\omega = \frac{F'_1P'_1}{F'_1S_1} = \frac{F'_1P'_1}{-S_1F'_1} = \frac{y'_1}{-f'_1} = -\frac{y_2}{f'_1}$ $\qquad \operatorname{tg}\omega' = \frac{F_2P_2}{F_2S_2} = \frac{F_2P_2}{-S_2F_2} = \frac{y_2}{-f_2} = \frac{y_2}{f'_2}$

teniendo en cuenta que $y'_1 = F'_1P'_1 = F_2P_2 = y_2$. Por tanto.

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{-y_2/f'_2}{y_2/f'_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A \equiv -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{P'_{oc}}{P'_{obj}}}$$

donde se ha tomado $f'_1 = f'_{obj} = 1/P'_{obj}$ y $f'_2 = f'_{oc} = 1/P'_{oc}$.

Vemos que el aumento es negativo, como cabe esperar del hecho, gráficamente comprobado, de que el anteojo invierte las imágenes. Esto carece de importancia al observar estrellas, pero no así en la observación de objetos terrestres.

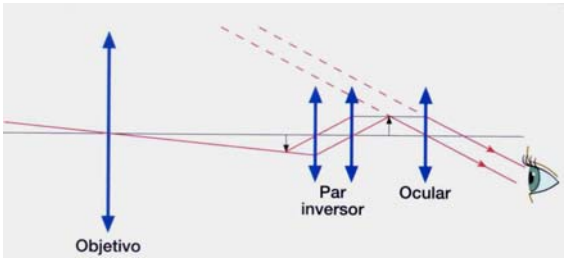
+ *Enfoque:* Teóricamente, el anteojo astronómico está enfocado. Pero ello sólo para objetos en el infinito y observación con ojo normal. En caso contrario (objeto no tan lejano y ojo no emétrope) será preciso buscar el mejor enfoque para cada situación; para conseguirlo, el ocular puede ser desplazado ligeramente en el tubo del anteojo.

9.- LOS ANTEOJOS TERRESTRES

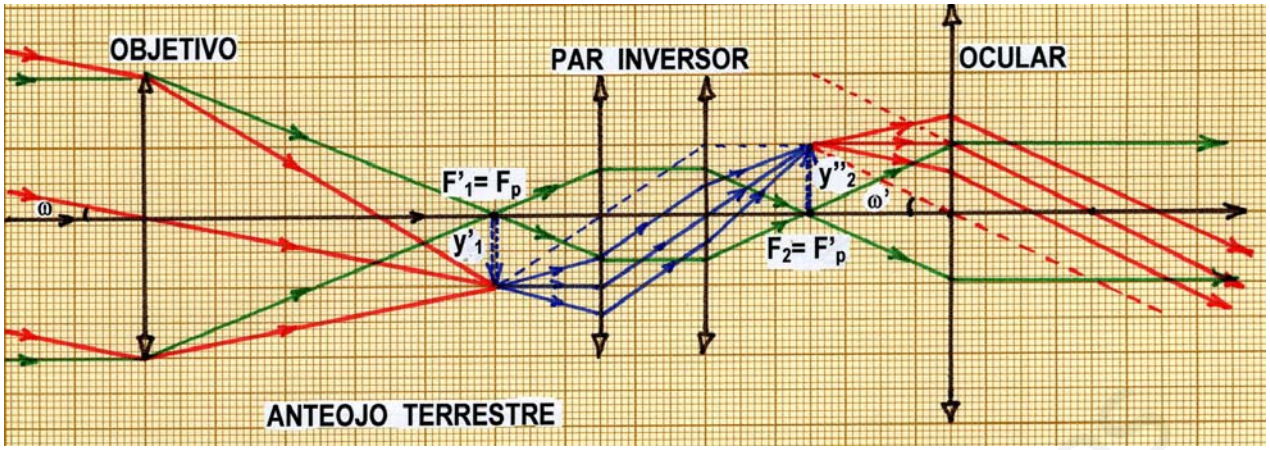
El anteojo astronómico produce imágenes invertidas. Por ello, no resulta apropiado para la observación de objetos terrestres, de los cuales conviene que la imagen sea directa. Hay diversas formas de invertir la imagen dada por el anteojo astronómico, con el fin de obtener una imagen final directa, las cuales dan lugar a otros tantos instrumentos de observación terrestre.

A.- ANTEOJO TERRESTRE (Catalejo).-

Lleva incorporado entre el objetivo y el ocular un ***par inversor*** consistente en un conjunto de dos lentes convergentes de igual distancia focal, tales que cada una de ellas está colocada en el foco de la otra.



Este par modifica la orientación de la imagen sin modificar su tamaño, consiguiéndose así la visión directa del objeto observado. Este proceso de inversión se traduce en un aumento de longitud del tubo del catalejo, problema éste que se puede solucionar diseñando el dispositivo de manera que conste de varios tubos que pueden penetrar uno en otro, formando un conjunto plegable.

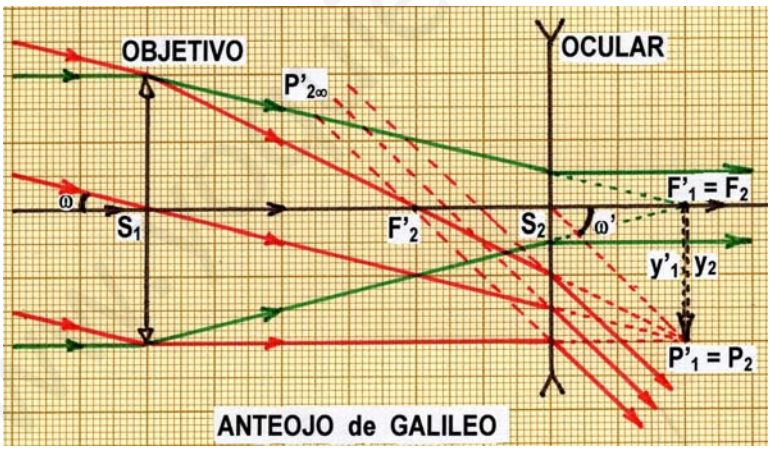


B.- ANTEOJO DE GALILEO (Gemelos de teatro).-

Utiliza como ocular una lente divergente, que produce una imagen virtual directa de la imagen real $y'_1 = y_2$ dada por el objetivo. Ésta última no llega a formarse, pues los rayos correspondientes son desviados por el ocular antes de que converjan.

Como el objeto está siempre muy alejado y los rayos que salen del ocular lo hacen prácticamente paralelos, el aumento del anteojo de Galileo viene dado por la misma expresión deducida para el anteojo astronómico:

$$A \equiv -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{P'_{oc}}{P'_{obj}}$$



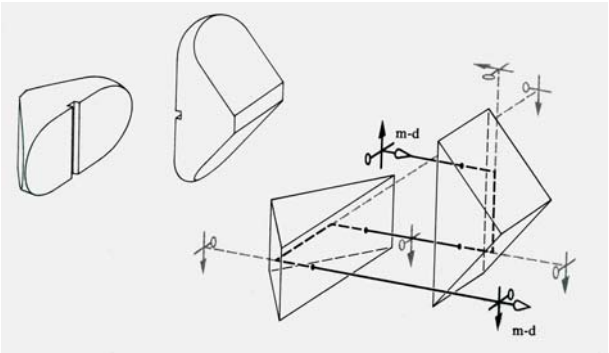
Este aumento es positivo, porque la focal y la potencia del ocular son negativas.

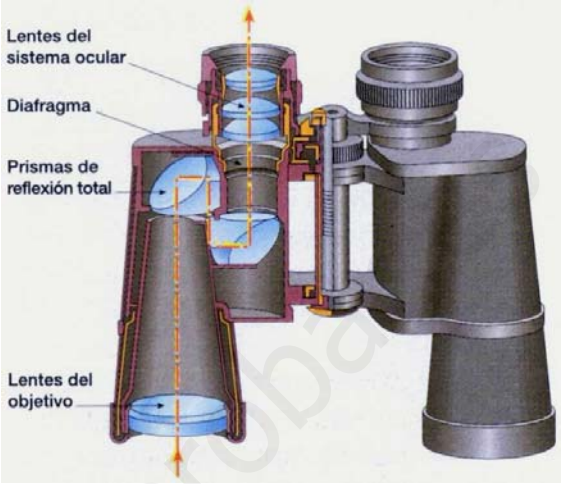
La longitud de este anteojo es relativamente pequeña debido a que los focos del ocular (lente divergente) están intercambiados, primero el foco imagen y más a la derecha el foco objeto, como se puede observar en la figura.

Sin embargo, su aumento es muy pequeño y sus aberraciones difíciles de corregir. Por este motivo, su uso se encuentra limitado en la actualidad a los llamados gemelos de teatro. Se llaman así por estar constituidos por dos anteojos de Galileo iguales y paralelos, con los que se consigue la visión binocular. La corta longitud del tubo (unos 10 cm) hace que el aumento sea pequeño, compensándose este defecto por su gran claridad.

C.- LOS PRISMÁTICOS.-

Los prismáticos consiguen la inversión de la imagen por medio de cuatro reflexiones que tienen lugar en dos prismas de reflexión total colocados entre el objetivo y el ocular, cruzados entre sí, como señala la figura. Como los rayos tienen un recorrido mayor, se logra reducir la longitud del tubo sin disminuir la longitud óptica; por lo tanto, puede utilizarse un objetivo de distancia focal muy grande, con el consiguiente incremento del aumento del anteojo.





Si se unen dos prismáticos simétricos para la visión binocular se obtienen los llamados gemelos prismáticos, que tienen la ventaja de que, por estar más separados los objetivos que los oculares, se favorece el efecto estereoscópico, consiguiéndose así mayor sensación de relieve. Esta modificación del anteojo astronómico fue ideada por Porro, por lo que el anteojo prismático se conoce también con el nombre de *anteojo de Porro.*

Los prismáticos de uso corriente se suelen especificar con dos números separados por un aspa. Es un error creer que su aumento venga dado por el producto de ambos números. El primero de ellos es el aumento, y el segundo es el diámetro del objetivo, en mm. Los tipos más usuales son: 4x20, 6x30, 8x30, 7x50, 12x60, ... Es importante el conocimiento de ambas especificaciones a la hora de elegir instrumento para hacer una observación determinada, si se tiene en cuenta que la iluminación de la imagen obtenida es tanto mayor cuanto mayor es el segundo número. Por ejemplo, para visión diurna bastaría unos prismáticos 4x20. Sin embargo, éstos darían imágenes pobremente iluminadas en visión nocturna, para la que iría mejor un 7x50.

10.- LOS TELESCOPIOS

Reciben este nombre aquellos instrumentos astronómicos cuyo objetivo, en vez de ser una lente convergente, está constituido por un espejo cóncavo, esférico o parabólico, construido de vidrio plateado o aluminado. Este espejo forma una imagen real de los objetos lejanos, la cual es observada luego por el ocular.

Existen distintos tipos de telescopios reflectores, cuyo diseño esquemático, así como la marcha de los rayos luminosos, se puede apreciar en las figuras que concluyen esta exposición.

Todos ellos presentan múltiples ventajas, entre las que se pueden citar las siguientes:

+ Mientras que una lente debe ser transparente y estar libre de burbujas internas, ha de tener un índice de refracción muy constante, etc... tal problema no existe en el caso de un espejo.

+ Mientras que en el caso de una lente se han de pulir dos superficies con la precisión mayor posible, en el caso de un espejo sólo se ha de pulir una superficie.

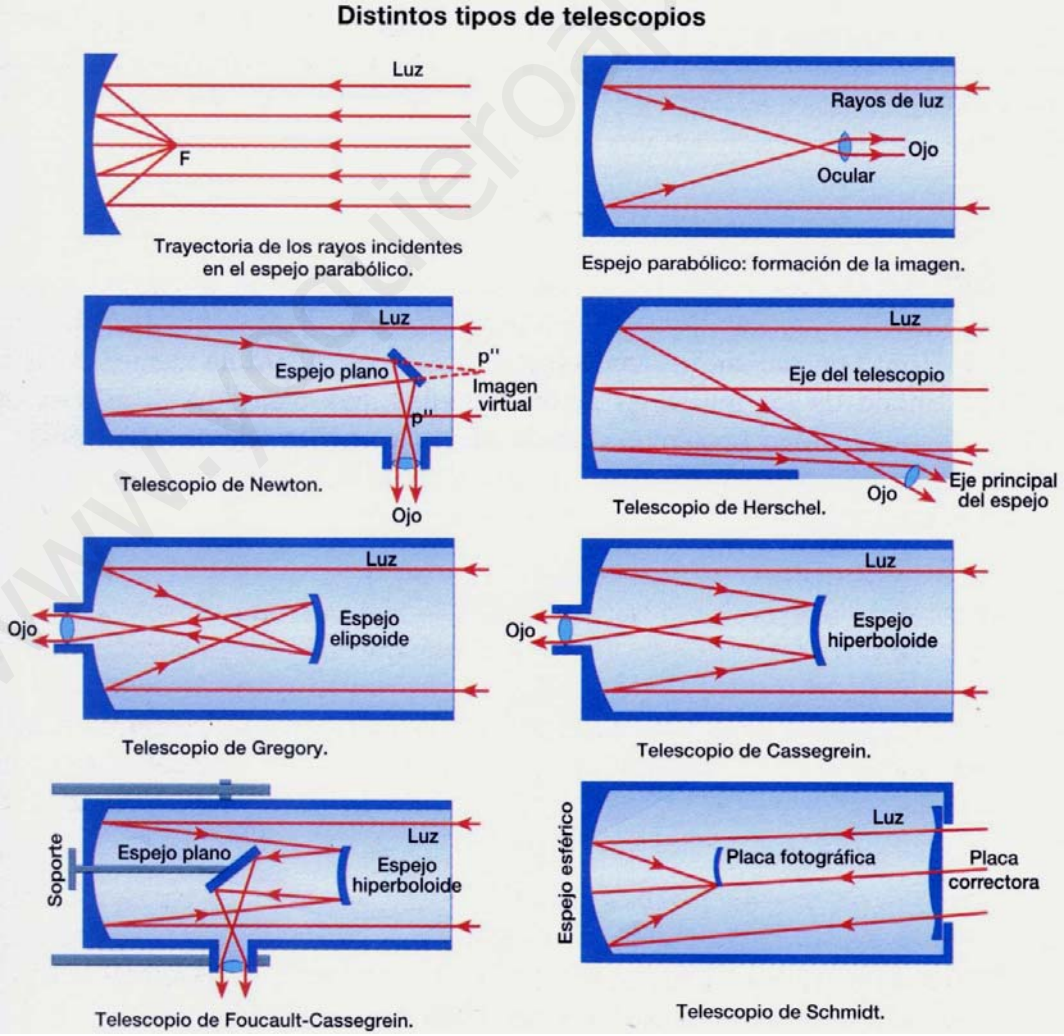
+ Las imágenes formadas no se ven afectadas de aberración cromática.

+ El tamaño de los espejos puede ser mucho mayor que el de las lentes, pues mientras éstas han de ser apoyadas sólo por su periferia, los espejos se apoyan haciendo uso de su cara posterior. Así, el instrumento refractor más grande es el telescopio de 40 pulgadas de Yekes en Williams Bay, Wisconsin, mientras que el reflector en el Monte Palomar, EE.UU., tiene 200 pulgadas de diámetro. Y en el Observatorio de Crimea (Ukrania) se dispone de un reflector de 236 pulgadas.

+ Debido al gran tamaño del espejo, pueden captar una gran cantidad de luz, concentrándola en el foco, lo que permite fotografiar con larga exposición estrellas que resultan invisibles incluso a través del telescopio.

+ Son más manejables y económicamente mucho menos costosos que los anteojos astronómicos (refractores).

Así pues, los telescopios reflectores predominan en todos los casos de telescopios grandes.



ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un ojo miope tiene el punto remoto a 150 cm. ¿Qué lente habrá que colocar delante para que los rayos procedentes del infinito converjan en la retina del ojo?

El ojo emétrope o normal tiene su punto remoto en el infinito; su cristalino enfoca los rayos procedentes del infinito en la retina, sin acomodación.

El ojo del miope del problema tiene su punto remoto en s = - 150 cm. Los rayos procedentes de este punto el ojo miope los enfoca en la retina.

Hay que conseguir mediante una lente que los rayos procedentes del infinito se enfoquen en el punto remoto del miope; así luego su cristalino los enfocará en la retina, sin acomodación. Así pues la lente debe tener una focal tal que de un objeto situado en s = ∞ dé una imagen en s' = - 150 cm.

$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$ donde s = ∞ y s' = - 150 cm $\Rightarrow$ $-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{-150}=\frac{1}{f'}$ $\Rightarrow$ f' = - 150 cm

$\Rightarrow$ P' = $\frac{1}{f'}=\frac{1}{-1{,}5}=-0{,}67$ dioptrías. Se precisa una lente divergente de 0,67 dioptrías

2.- Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene 10 dioptrías se retrata a una persona situada a 2,10 m de distancia. ¿A qué distancia del centro óptico del objetivo debe colocarse la placa fotográfica? Si la persona tiene 1,70 m de estatura, ¿qué altura mínima debe tener la placa para formar una imagen de cuerpo entero?

El objetivo fotográfico es considerado como una lente delgada situada en su centro óptico. Esta lente verifica: f' = $\frac{1}{P'}=\frac{1}{10}=0{,}1$ m = 10 cm

Posición de la persona, s = - 210 cm. Posición de su imagen, s'.

Ecuación de las lentes delgadas: $-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$ Por tanto, sustituyendo resulta s' = 10,5 cm

$\Rightarrow$ La placa fotográfica hay que colocarla 10,5 cm detrás del centro óptico del objetivo.

Aumento lateral, $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{10{,}5}{-210}=-0{,}05$ $\rightarrow$ y' = β' y = - 0,05x170 = - 8,5 cm

Prescindiendo del signo (cuyo significado es que la imagen es invertida), 8,5 cm representa el tamaño mínimo de la placa en vertical para que la persona salga en fotografía de cuerpo entero.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- A una persona que padece miopía el oftalmólogo le ha prescrito gafas de -2.50 dioptrías. ¿Cuál es el punto remoto de sus ojos?.- Si dicha persona utiliza gafas de -2.00 dioptrías, ¿cuál sería su máxima distancia de visión distinta***?*** ***R.: El punto remoto está a 40 cm delante de sus ojos.- Su máxima distancia de visión distinta es 50 cm.***

2.- Una persona de vista normal tiene un campo de acomodación desde 25 cm hasta el infinito. Si se coloca las gafas de un amigo que poseen una convergencia de +2 dioptrías, ¿entre qué distancias podrá ver claramente los objetos? R.: Entre 16.7 cm y 50 cm.

3.- ¿Qué gafas necesita para leer una persona cuyo punto próximo se encuentra a 200 cm?.- ¿Qué gafas precisa para «ver de lejos» una persona cuyo punto remoto está situado a 50 cm del ojo? ***R.: +3,5 dioptrías - 2 dioptrías***

4.- Al graduar la vista de una persona, el oftalmólogo extendió la receta adjunta. ¿Qué defectos visuales presenta ese paciente?

	Esférica	Cilíndrica	Eje
Ojo derecho	- 3.0	- 0.5	90º
Ojo izquierdo	- 3.5	- 1.0	125º

R.: Miopía y astigmatismo, en mayor medida en el ojo izquierdo que en el derecho.

5.- Para un observador cuyo punto próximo es de 25 cm, el aumento de un microscopio enfocado al infinito es 1250. Sabiendo que el ocular tiene una convergencia de 40 dioptrías y que la longitud del microscopio es 18'628 cm, calcular la focal del objetivo y el intervalo óptico del instrumento. ***R.: f'_{obj} = 1'28 mm Δ = 16 cm***

6.- Las distancias focales del objetivo y del ocular de un microscopio son, respectivamente, 1 cm y 0,8 cm, y la distancia entre ambas lentes es 17,8 cm. ¿Cuál es el aumento del microscopio? ***R.: A = - 500***

7.- Si cuando observamos con un anteojo todo el disco de la Luna tapamos la mitad del objetivo, ¿qué sucederá a la imagen? Razona tu contestación.
R.: La imagen se ve entera, pero con menos intensidad luminosa.

8.- En un anteojo de Galileo las distancias focales del objetivo y del ocular son 8 cm y - 2 cm, respectivamente. ¿Cuánto se debe desplazar el ocular para que de un objeto situado 2 m delante del objetivo se forme una imagen real sobre una placa situada a 30 cm de distancia del ocular? ***R.: d = 0,46 cm***

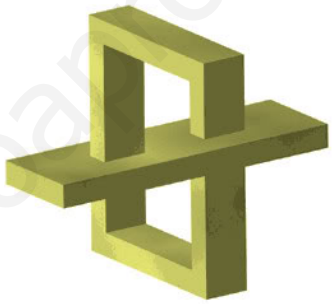
9. El objetivo de una cámara fotográfica barata es una lente delgada de 25 dioptrías de potencia. Con esta cámara queremos fotografiar a una persona de 1,75 m de estatura, situada a 1,5 m de la lente. a) ¿Cuál debe ser la distancia entre la lente y la película fotográfica?.- b) Si la película tiene una altura de 35 mm, ¿nos saldrá una foto «de cuerpo entero»?
R.: a) s'= 4'11 cm b) No.

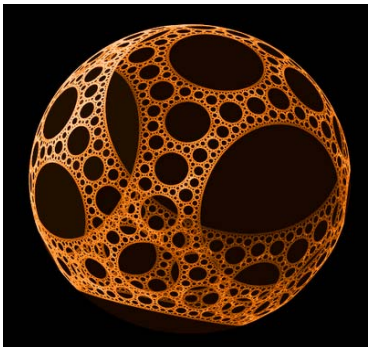
www.yoquieroaprobar.es

T E M A 10.-

ÓPTICA FÍSICA

Ondas luminosas





SUMARIO:

10.1.- Interferencias luminosas
10.2.- Difracción de la luz
10.3.- Polarización de la luz
10.4.- Dispersión de la luz
10.5.- Aplicaciones de la Óptica

FÍSICA.- 2º Bachillerato
Valentín Laconcha Abecia, S.M.
Doctor en C. Físicas

www.yoquieroaprobar.es

1.- INTERFERENCIAS LUMINOSAS

La luz, debido a su carácter ondulatorio, experimenta fenómenos interferenciales. Éstos se producen al superponerse en cada punto y en cada instante los campos eléctricos y magnéticos de las ondas luminosas individuales que interfieren (naturaleza electromagnética de la luz).

Para que sea posible la observación de interferencias luminosas, éstas han de ser estables, por lo que han de cumplir las siguientes condiciones:

+ Las fuentes luminosas han de ser ***coherentes***, es decir, la diferencia de fase entre ellas ha de ser constante, lo que implica que en cada punto del espacio será constante también la diferencia de fase entre las ondas luminosas que interfieren; estas diferencias de fase son debidas exclusivamente al diferente recorrido de las ondas componentes.

$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \delta$ donde δ = constante $\rightarrow$ $\Delta\Phi$ depende sólo de $\Delta x = x_1 - x_2$

+ Las fuentes deben ser ***monocromáticas***, es decir, de una única longitud de onda. En efecto, los fenómenos interferenciales dependen de la longitud de onda de modo esencial, como ya vimos en ondulatoria.

Un modo de conseguir fuentes de luz coherente a partir de una fuente luminosa monocromática S_0 consiste en hacer pasar su luz a través de dos pequeñas aberturas, S_1 y S_2, en forma de rendijas, practicadas en una pantalla. De esta manera, la luz que emerge de cada una de las rendijas es coherente, pues procede de una única fuente, y la misión de las rendijas es simplemente separar el haz original en dos partes.

DOBLE RENDIJA DE YOUNG

La interferencia de ondas luminosas procedentes de dos fuentes fue puesta de manifiesto por vez primera en 1801 por el médico y físico inglés Thomas Young (1773-1829). Al ser éste un estudio sencillo, y a la vez paradigmático, vamos a desarrollarlo brevemente.

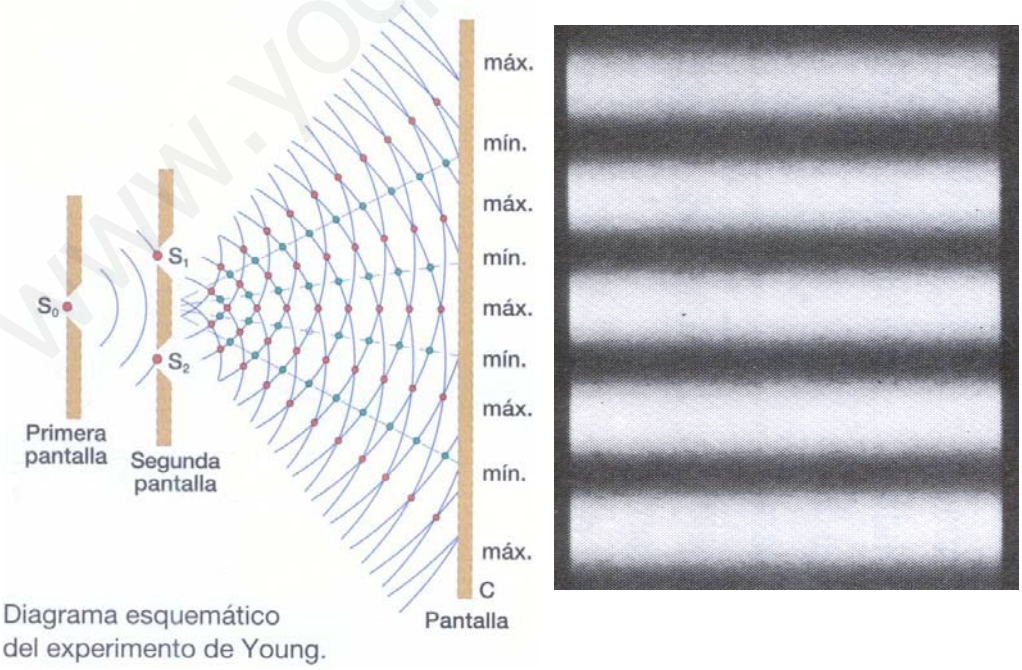
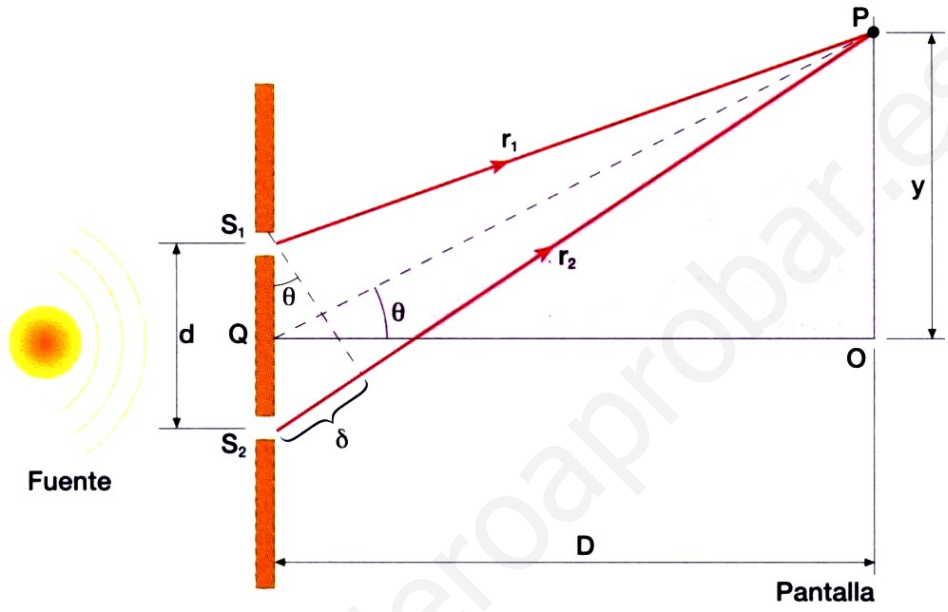


Diagrama esquemático del experimento de Young.

En la figura se muestra un diagrama esquemático del aparato utilizado. La luz pasa a través de una pequeña rendija S_o practicada en una pantalla e incide sobre una segunda pantalla que contiene dos rendijas, S_1 y S_2, estrechas y muy próximas una a otra (0'4 – 0'5 mm), que actúan como fuentes de luz coherente.

Como consecuencia, en la pantalla C se forman una serie de bandas paralelas brillantes y oscuras, denominadas ***franjas de interferencia***. Cuando la luz procedente de S_1 y S_2 llega a un punto de la pantalla de forma que se produzca una interferencia constructiva, aparece una línea brillante. En cambio, si la luz de las dos rendijas interfiere destructivamente, aparece una línea oscura. Véase el fotograma correspondiente anterior.



Representación geométrica del experimento de Young

Para interpretar cuantitativamente el experimento de Young, supongamos que la pantalla en la que se producen las franjas de interferencia dista D de la pantalla que contiene las rendijas, siendo d la distancia entre éstas. Si la fuente es monocromática, las ondas que proceden de S_1 y S_2 tienen la misma frecuencia y amplitud, y están en fase, $\delta = 0$ (suponemos $S_0S_1 = S_0S_2$). Estas ondas, para llegar al punto P, tienen que recorrer unas distancias r_1 y r_2. La diferencia de recorrido es Δr:

$$\Delta r = r_2 - r_1 \cong d \operatorname{sen}\theta$$

Esta ecuación supone que r_1 y r_2 difieren poco, es decir, Δr y d son del mismo orden de magnitud y ambas mucho menores que la distancia D de las rendijas a la pantalla.

Como vimos en el tema 5, 8 B, ec. (32), si la diferencia de camino recorrido es nula o un múltiplo entero de la longitud de onda de la luz, las dos ondas al llegar a P se encuentran en fase y se produce en dicho punto un ***máximo interferencial***, es decir, una interferencia constructiva (franjas brillantes). Por tanto, la condición de interferencia constructiva es:

$$\boxed{d \operatorname{sen}\theta = n\,\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, ...)}$$

n recibe el nombre de ***orden interferencial***. La franja brillante central, que se forma en O, para la cual $\theta = 0$ y $n = 0$ se conoce como máximo de orden cero. El primer máximo a cada lado, para $n = \pm 1$ se denomina máximo de primer orden, y así sucesivamente.

Por el contrario, si la diferencia de recorrido es un múltiplo impar de $\lambda/2$, las dos ondas al llegar a P se encuentran en oposición de fase y se produce un ***mínimo interferencial***, una interferencia destructiva (franjas oscuras), lo que tendrá lugar cuando:

$$d \operatorname{sen}\theta = (2n + 1)\,\lambda/2 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

La posición de las franjas de interferencia (brillantes y oscuras) en la pantalla, es decir, su distancia vertical a 0, se puede determinar fácilmente por consideraciones geométricas basadas en la suposición de que $D >> d$ y, además, $d >> \lambda$. Estas condiciones se suelen cumplir en la práctica, puesto que D es del orden del metro, mientras que $d \approx 10^{-4}$ m y $\lambda \approx 10^{-7}$m, para la luz visible; si esto es así, se puede emplear la aproximación: $\operatorname{sen}\theta \cong \operatorname{tg}\theta$, y en el triángulo OPQ se verifica:

$$\operatorname{sen}\theta \cong \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{D}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de interferencia constructiva y destructiva, la posición de las franjas brillantes y oscuras vendrá dada, respectivamente, por:

$$y_{max} = n\,\frac{D}{d}\lambda \qquad y_{min} = (2n + 1)\frac{D}{d}\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Llamamos ***interfranja*** (o intervalo interferencial) a la distancia, medida en la pantalla, entre dos máximos o dos mínimos consecutivos. Su valor es, evidentemente:

$$i = \frac{D}{d}\lambda$$

Podemos observar que el experimento de la doble rendija permite medir la longitud de onda de la luz: para ello, conocidos los valores de D y d, se mide en el experimento la interfranja i y se aplica la expresión anterior. Es lo que fue realizado precisamente por Young, sirviendo el experimento para asentar sobre bases definitivas el modelo ondulatorio.

2.- DIFRACCIÓN DE LA LUZ

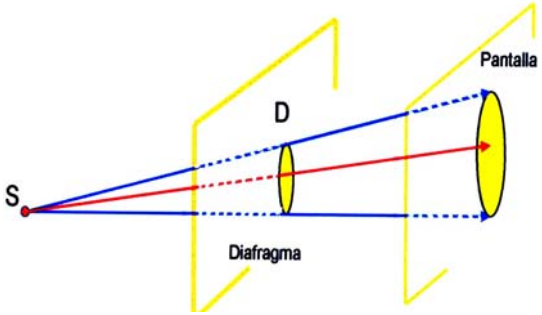
A.- FENÓMENOS DE DIFRACCIÓN

Este fenómeno fue ya descubierto en el siglo XVII por el científico italiano Francesco María Grimaldi (1618-1663), el cual observó que, al interponer un diafragma opaco provisto de una pequeña abertura en la trayectoria de un haz luminoso, aparecían sobre una pantalla franjas de interferencia claras y oscuras, interpretables como si la luz fuese capaz de bordear los obstáculos.

La difracción resulta inexplicable mediante la teoría corpuscular de la luz. Sin embargo, la difracción queda plenamente justificada aceptando el modelo ondulatorio y el principio de Huygens. Para ello, es necesario que el tamaño de los elementos productores de difracción (aberturas u obstáculos) sean comparables a la longitud de onda de la luz empleada.

Supongamos una fuente luminosa de pequeñas dimensiones que ilumina una pantalla; intercalamos entre ellas una superficie opaca con una abertura circular regulable (diafragma).

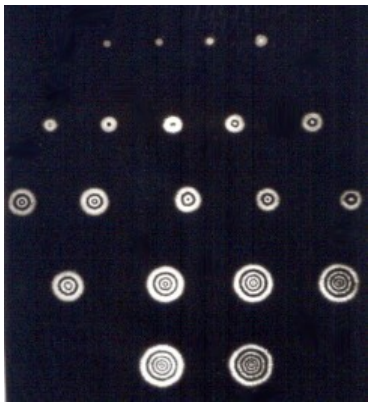
Si la luz es monocromática (ondas luminosas de una longitud de onda determinada) se observa que tal imagen en la pantalla no posee sus contornos netamente definidos, sino difusos; más aún, el diámetro de la imagen sobre la pantalla crece al decrecer el diámetro de la abertura.



Además, el contorno se rodea de anillos oscuros y claros sucesivos, cada vez más tenues. Algo parecido ocurre con un obstáculo intercalado entre la fuente y la pantalla.

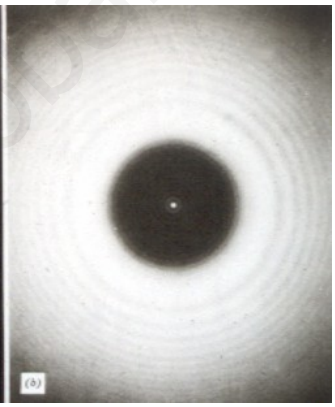
Es una de tantas experiencias que prueban la naturaleza ondulatoria de la luz. Ésta es capaz de contornear los obstáculos que encuentra en su propagación, por lo que la propagación rectilínea de la luz (Óptica geométrica) es sólo una aproximación.

Obsérvense figuras de difracción diversas en los ejemplos que se han fotografiado:



Difracción por aberturas circulares de radios decrecientes

Difracción por una abertura circular

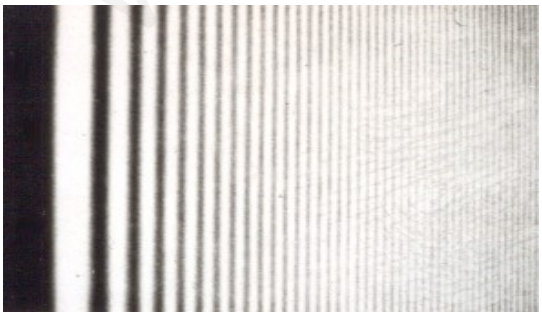


Difracción por un obstáculo circular

Los fenómenos de difracción se presentan siempre que las ondas de luz experimentan, en su propagación, la supresión de alguna parte de su frente de onda, por medio de obstáculos o aberturas.

Por otra parte, se observa que existe una cierta periodicidad en la distribución luminosa en la pantalla, apareciendo franjas o anillos, alternándose zonas de luz y oscuridad.

En las siguientes figuras se muestran más ejemplos de este fenómeno.



Difracción por un borde rectilíneo

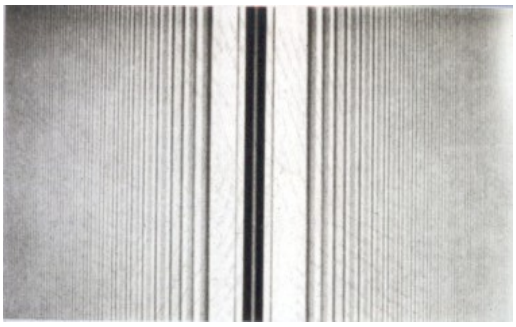
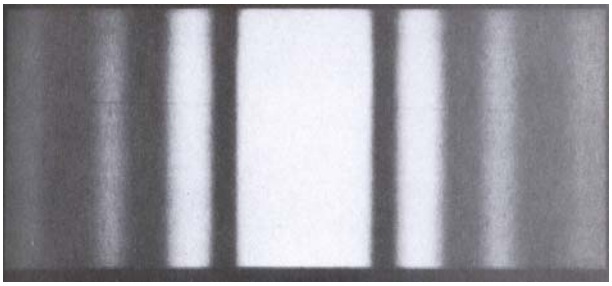
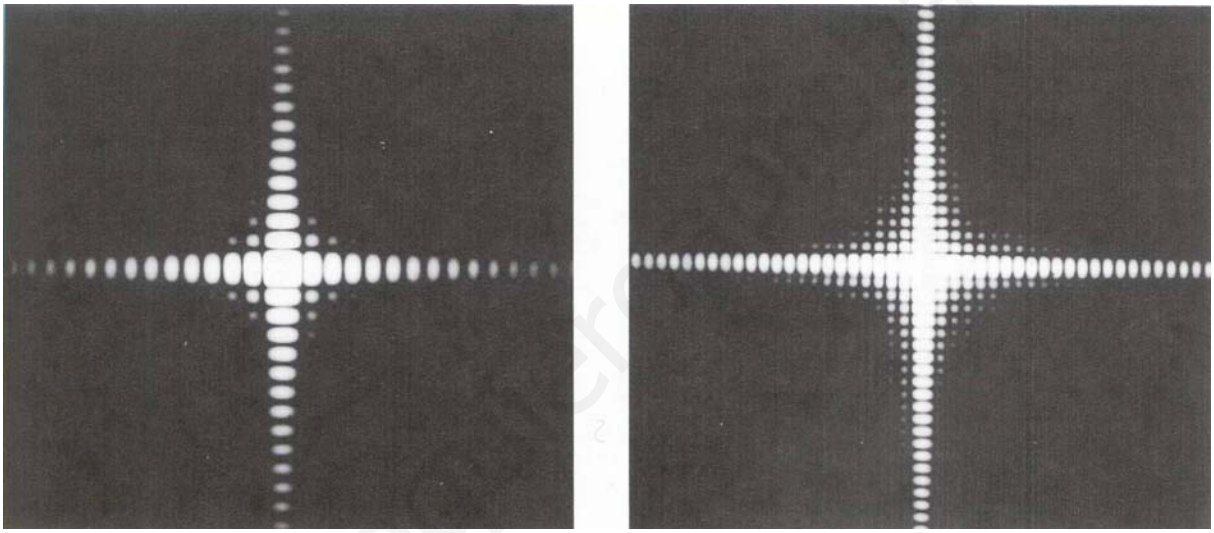


Imagen de difracción de un hilo

Sombra de una hoja de afeitar



Difracción producida por una rendija



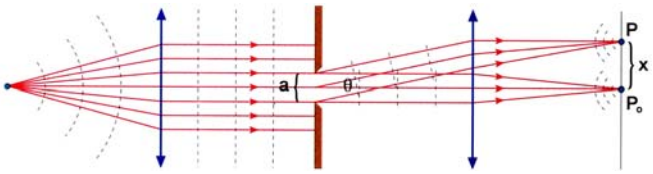
Difracción por una abertura cuadrada: dos registros con distinto tiempo de exposición

B.- DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA

El estudio de la difracción producida por una rendija (difracción de Fraunhofer) es un ejemplo paradigmático que puede ayudarnos a profundizar en sus mecanismos más elementales.

Llamamos ***rendija*** a una abertura rectangular, axb, en la que suponemos que una dimensión es mucho más pequeña que la otra, a<<b. Los fenómenos de difracción son debidos de modo preeminente a la anchura a, suponiendo despreciables los debidos a la longitud b.

Consideremos la difracción producida por una rendija sobre la que incide normalmente al plano que la contiene una onda plana (haz de rayos paralelos) de luz monocromática de longitud de onda λ, procedente de un colimador (primera lente).



La observación se realiza mediante un anteojo, o bien, como señala la figura, en una pantalla, pre-

via focalización en ella por una segunda lente.

La onda plana, interceptada por el plano opaco de la rendija experimenta una ruptura en su frente de onda; sólo la parte que incide sobre la rendija es capaz de emerger al otro lado, dando lugar a la figura de difracción, imagen de la rendija, como aparece en la fotografía que se recoge en la pantalla:

En ella aparece un máximo central que posee la mayor parte de la luz emergente, bordeado a ambos lados por mínimos nulos y máximos poco luminosos, intercalados alternativamente. Estos máximos secundarios, cada vez menos intensos al alejarse del centro, son de anchura mitad a la del máximo central.

La explicación de esta figura de difracción se basa en el principio de Huygens.

Al llegar el frente de ondas a la rendija, los puntos de ésta se constituyen en focos secundarios de ondas esféricas. Las partes de cada onda esférica que se propagan normalmente al plano de la rendija quedarán enfocados por la segunda lente en P_o, mientras que las que lo hacen en una cierta dirección que forma un ángulo cualquiera θ, se enfocarán en otro punto, tal como el P. Dos rayos cualesquiera en esa dirección θ llevan un desfase $\Delta\Phi$ debido a la diferencia de recorrido entre ellos Δr, siendo su relación (tema 5, ec.(7)):

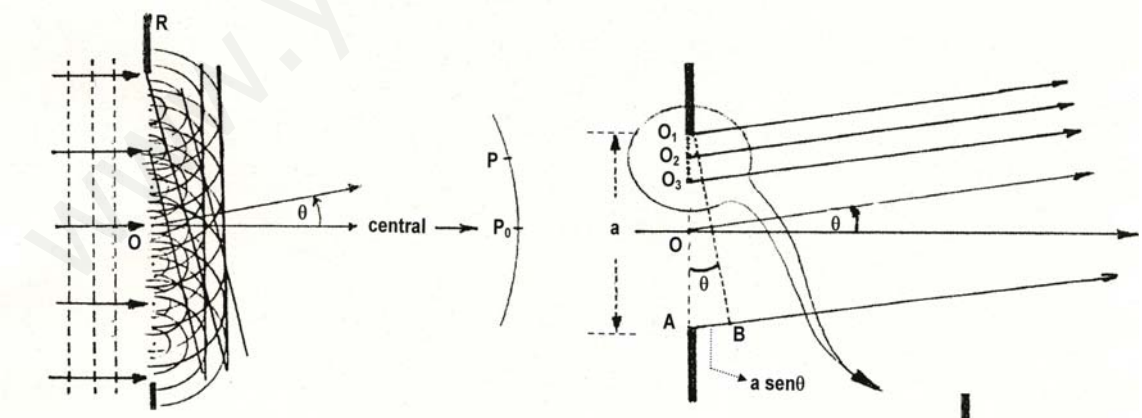
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$$

Sean dos rayos procedentes de la rendija, O_1 y O_2; sea $O_1O_2 = x$. Si la diferencia de recorrido entre estos dos rayos es $\lambda/2$, los rayos llegan a P en oposición de fase:

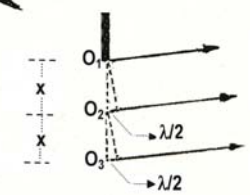
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \text{ donde } \Delta r = \lambda/2 \Rightarrow \Delta\Phi = \pi$$

por lo que al interferir, su efecto luminoso se contrarresta, dando lugar a un mínimo nulo. La distancia x es tal que (figura):

$$x \operatorname{sen}\theta = \lambda/2$$



Difracción por una rendija: esquemas explicativos de la marcha de los rayos y sus direcciones.



Si $O_2O_3 = O_1O_2 = x$, los rayos de todo el haz O_1O_2 encuentran en los del haz O_2O_3 su rayo homólogo con quien interferir, anulando su efecto en P. Por consiguiente, el haz O_1O_3, de anchura 2x, llega a P en condición de mínimo nulo.

Si la anchura total de la rendija, a, es un número entero de 2x, a = 2 n x, todo el haz procedente de la rendija accede a P en condiciones de mínimo nulo. Por tanto:

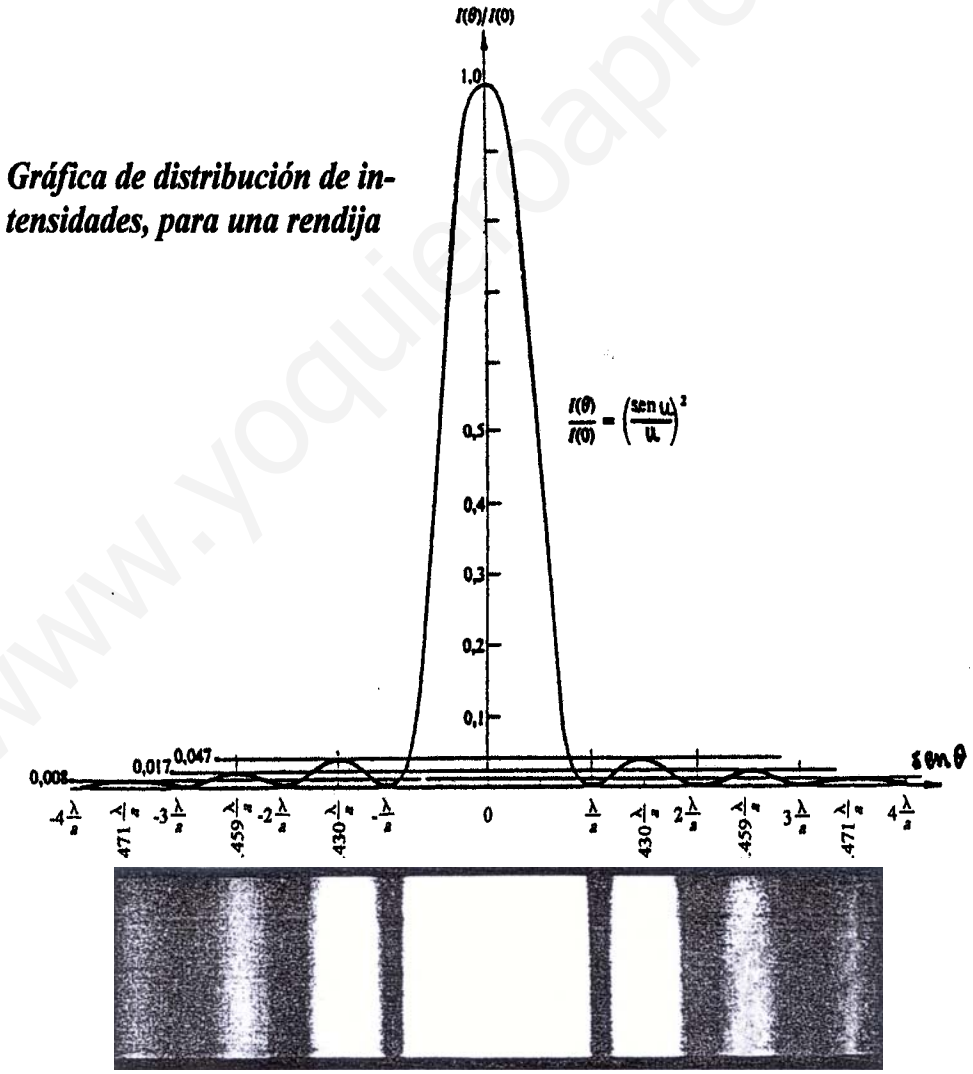
$$a = 2\,n\,x = 2n\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\text{sen}\theta} = n\frac{\lambda}{\text{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a\,\text{sen}\theta = n\,\lambda \qquad (n = 1, 2, 3, ...)}$$

Ésta es la ***condición de mínimo de difracción: Hay un mínimo de difracción en la dirección θ, cuando el producto a.senθ es un número entero de longitudes de onda".***

Intercalados entre los mínimos, aparecen los máximos secundarios. La condición de máximo secundario viene a ser:

$$\boxed{a\,\text{sen}\theta = p\,\lambda \qquad (p = 1'430,\ 2'459,\ 3'471,\ 4'477,\ 5'482,\ \ldots)}$$



Las intensidades de estos máximos son pequeñas comparadas con la del máximo central; considerando la intensidad de éste el 100%, los máximos secundarios presentan valores aproximados y sucesivos:

4,7% 1,7% 0.8% 0.5% 0.3% etc...

Un estudio más preciso del fenómeno conduce al cálculo de la distribución luminosa $I(\theta)$, cosa que expresamos en la figura anterior.

RENDIJA ***(anchura a)***

$$sen\theta = p\frac{\lambda}{a}$$

La tabla de la derecha presenta las direcciones de máximo y mínimo conjuntamente a deducir de la expresión:

$$\boxed{sen\theta = p\frac{\lambda}{a}}$$

siendo los valores de p enteros para mínimos y no enteros para máximos secundarios.

p		***I/I₀ (%)***	
MAX.	***MIN.***	***MAX.***	***MIN.***
0		100	
	1		0
1'430		4'7	
	2		0
2'459		1'7	
	3		0
3'471		0'8	
	4		0
4'477		0'5	
	5		0
5'482		0'3	
	6		0

Dos conclusiones:

a) La anchura de la imagen de difracción crece al disminuir la anchura de la rendija. En efecto: $sen\theta_{min}$ es proporcional a 1/a

b) La anchura de la imagen de difracción depende de la longitud de onda de la luz incidente. En efecto: $sen\theta_{min}$ es proporcional a λ

Si la luz es blanca (contiene todas las longitudes de onda del visible), se producirá una dispersión de la luz, que se traduce en la aparición de bordes irisados en la imagen de difracción (mínimos de orden 1º) pues su posición depende de la longitud de onda, como se indica.

3.- POLARIZACIÓN DE LA LUZ

El fenómeno de la polarización es característico de las ondas trasversales (como vimos en el tema 5, 8 D). Este fenómeno se presenta en al caso de la luz (y de las ondas electromagnéticas, en general). Constituye pues una prueba fehaciente de la naturaleza trasversal de las ondas electromagnéticas.

Puesto que en el tema señalado en la Unidad II, tema 5, tratamos ya las características generales del fenómeno de polarización de las ondas, nos referiremos en éste exclusivamente a las ondas luminosas.

La luz es una onda electromagnética producida por campos eléctricos y magnéticos variables con el tiempo, y que se propaga en dirección perpendicular a dichos campos. (Se verá una ligera introducción en el tema15).

www.yoquieroaprobar.es

Un haz ordinario de luz está compuesto por numerosas ondas de este tipo emitidas por átomos o moléculas de la fuente luminosa.

Cada átomo, al vibrar, produce una onda con su correspondiente orientación del campo eléctrico, que será la misma que la dirección de vibración, y que es precisamente la dirección de polarización de la onda. Sin embargo, como todas las direcciones de vibración son posibles, la onda electromagnética luminosa resultante es una superposición de las ondas producidas por las fuentes atómicas individuales, lo que da como resultado una ***onda luminosa no polarizada*** (luz natural).

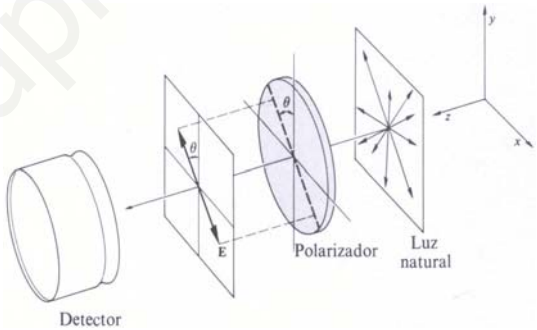
Se dice que una onda luminosa está ***polarizada linealmente*** si en un todos los puntos el campo eléctrico vibra en todo instante en la misma dirección. Recibe el nombre de ***plano de polarización*** de la onda el que forman el campo eléctrico y la dirección de propagación.

Si el extremo del vector representativo del campo eléctrico describe, al vibrar, una circunferencia, decimos que la luz presenta una ***polarización circular***.

Por último, si la trayectoria que describe dicho extremo del vector campo eléctrico es una elipse, la luz posee ***polarización elíptica***.

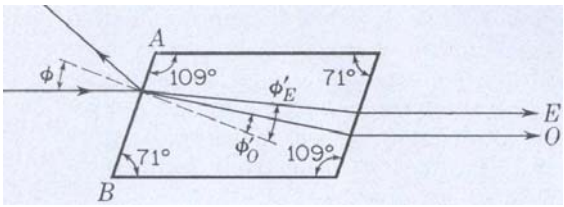
Existen diferentes <u>métodos</u> de obtener los diversos tipos de luz polarizada descritos. En concreto, los ***polarizadores*** son dispositivos mediante los cuales se obtiene ***luz linealmente polarizada***.

Algunos polarizadores se fundamentan en la ***absorción selectiva*** que presentan algunos materiales, tanto naturales (turmalinas) como sintéticos (polaroides, láminas plásticas muy utilizadas hoy día para múltiples aplicaciones: gafas de sol, parabrisas de coches, en fotografía, ...). Estos materiales absorben más o menos las ondas que inciden sobre ellos según la posición de los planos de polarización de cada componente.

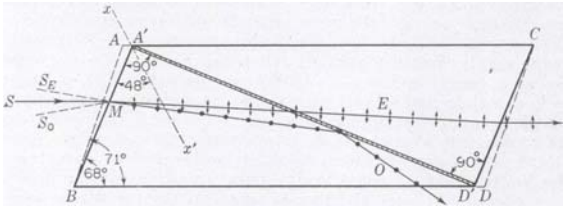


Luz natural al atravesar un polarizador: LLP

Otro método en el que se fundamentan otros polarizadores es el fenómeno de la ***doble refringencia*** que presentan algunas sustancias como el espato de Islandia, variedad transparente e incolora de calcita. Cuando una onda luminosa penetra en un cristal de espato de Islandia, se descompone en dos ondas polarizadas en direcciones perpendiculares que se propagan a diferente velocidad: se denominan <u>*rayos ordinario y extraordinario*</u>. Por tanto, el cristal presenta dos índices de refracción, uno para cada rayo: rayo ordinario, n_O= 1,6584; rayo extraordinario, n_E = 1,4864. Este hecho fue aprovechado por W. Nicol para obtener luz linealmente polarizada. El método se basa en la utilización del llamado <u>prisma de Nicol</u>, que es un cristal de <u>espato de Islandia</u> tallado de una forma adecuada y cortado diagonalmente en dos mitades que se pegan posteriormente con <u>bálsamo de Canadá</u>, una sustancia transparente cuyo índice de refracción está comprendido entre los correspondientes al rayo ordinario y al extraordinario (n_B = 1,55).

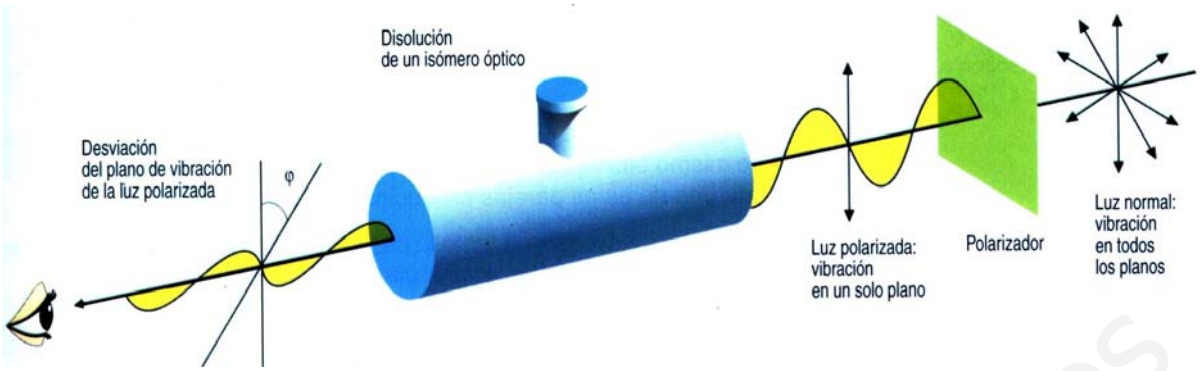


Marcha de la luz a través de un cristal de espato de Islandia



Prisma de Nicol: obtención de luz linealmente polarizada

De esta manera, el rayo ordinario experimenta la reflexión total, mientras que el extraordinario atraviesa las dos mitades del prisma de Nicol, obteniéndose a la salida luz linealmente polarizada.

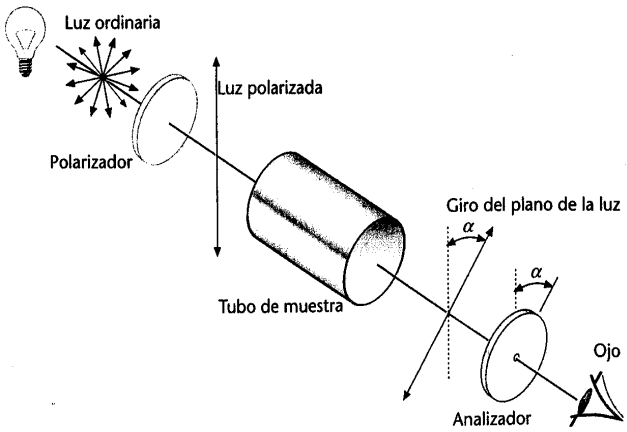


El físico francés J. Biot descubrió que algunos compuestos orgánicos naturales hacen girar el plano de la luz polarizada cuando ésta pasa por ellos: son compuestos ***ópticamente activos***. Como esta rotación ocurre también cuando están en disolución, se trata de una propiedad asociada a la estructura de las moléculas.

Las sustancias ópticamente activas se denominan *dextrógiras o levógiras* según giren el plano de polarización a derecha o izquierda. Muchos pares de sustancias orgánicas son iguales en todas sus propiedades físicas y químicas, excepto en que una es dextrógira y la otra levógira; se dice que son ***isómeros ópticos***. Los isómeros ópticos deben tener al menos un carbono asimétrico, es decir, con sus cuatro sustituyentes diferentes. La sacarosa (*azúcar*), la glucosa, el ácido láctico, ... son ejemplos de sustancias ópticamente activas.

El ***polarímetro*** (véanse las figuras) es utilizado para determinar la concentración de sustancias ópticamente activas.

Consta de: foco de luz, polarizador, cubeta con ventanas de vidrio en la que se pone la muestra, y analizador, que está graduado en grados y permite medir el ángulo girado por el plano de polarización. La magnitud del giro depende de diversos factores: de la sustancia ópticamente activa, de su concentración, de la temperatura, del disolvente, de la longitud de onda de la luz utilizada y de la longitud de la cubeta. Si se fijan todas las variables excepto la concentración puede establecerse la relación entre el ángulo girado y la concentración, por lo que el polarímetro es utilizado para la realización de *análisis químicos cuantitativos*.

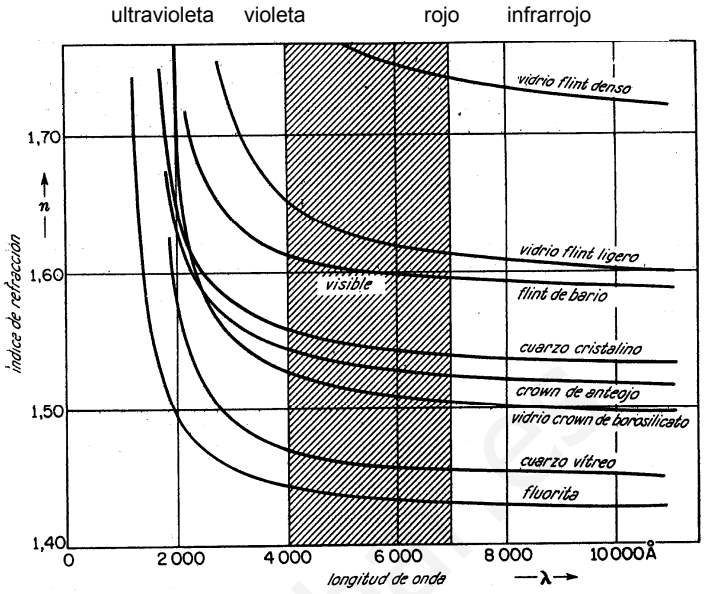


Más aún, existen polarímetros específicos como los *sacarímetros*, en los que el fabricante incluye, en el analizador, una escala en la que ya se expresa directamente la concentración de azúcar en la disolución analizada.

4.- DISPERSIÓN DE LA LUZ

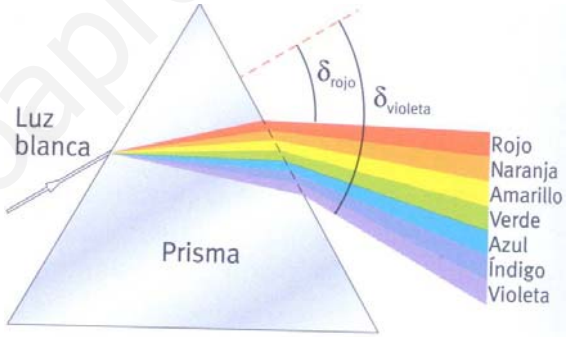
La velocidad de propagación de la luz depende del medio en el que se propaga. Ahora bien, también depende de la longitud de onda de dicha luz, $v_P(\lambda)$ Siendo esto así, puesto que el índice de refracción n de un medio se define por el cociente entre las velocidades de la luz en el vacío y en el medio en cuestión, resulta pues que el índice n depende de la longitud de onda:

$$n(\lambda) = \frac{c}{v_P(\lambda)}$$



Se llama ***luz blanca*** a aquélla que contiene todos los colores del visible, es decir, desde longitudes de onda de unos 400 nm (violeta) hasta unos 750 nm (rojo).

Por tanto, si se hace incidir un haz de luz blanca sobre un prisma óptico, se producirá diferente desviación según las diferentes componentes de la luz. Decimos entonces que el prisma ha ***dispersado*** la luz, la ha descompuesto en sus componentes. (Véase en la figura adjunta representada la dispersión de la luz blanca por un prisma óptico).



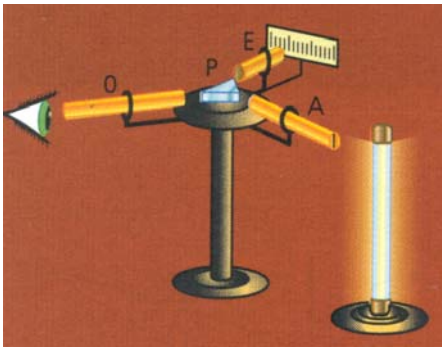
Recogiendo en una pantalla la luz dispersada por un prisma se obtienen unas zonas coloreadas según las distintas luces monocromáticas (simples) que llegan a ella, originando así lo que denominamos ***espectro visible***.

Los colores que se observan a la salida son los colores del arco iris (rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta).

Dispersión de la luz es pues la descomposición de la luz compleja en sus colores más simples. Por ejemplo, en el caso del "arco iris", las gotas de agua dispersan la luz del sol en sus refracciones en cada una de ellas: la luz se refracta al entrar en la gota de agua, se refleja una o dos veces en su parte posterior y vuelve a refractarse al salir: así se producen los dos arco iris característicos.

Aquellos dispositivos que, como el prisma óptico, permiten descomponer un haz de luz policromático en las distintas radiaciones monocromáticas que lo componen reciben el nombre de ***espectroscopios***.

Cuando van provistos de una escala graduada para la realización de medidas, se denominan ***espectrómetros***. Su parte fundamental es el sistema dispersor (prisma o red de difracción), que da lugar a la dispersión de la luz que se va a analizar.

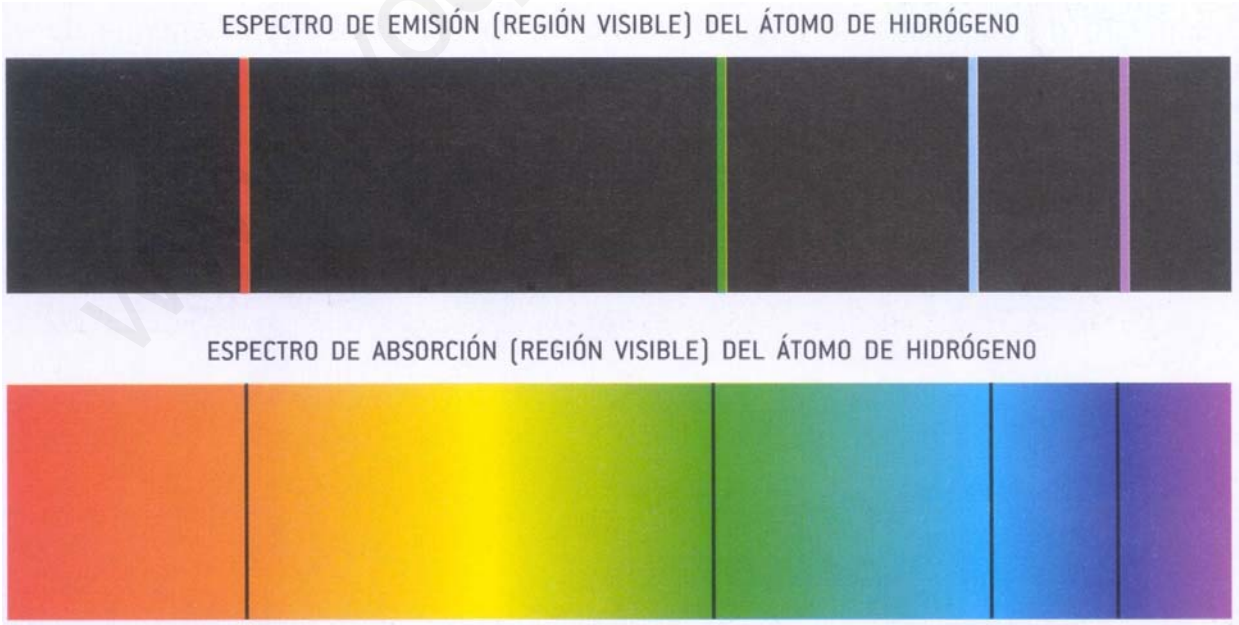


.

Cuando el foco luminoso es un sólido o un líquido incandescentes, el espectro obtenido es ***continuo*** y abarca todos los colores, desde el rojo hasta el violeta. Por el contrario, los espectros que producen los gases y vapores a presión baja y sometidos a una descarga eléctrica son ***discontinuos*** y están formados por una serie de rayas o bandas brillantes, de distintos colores, que destacan sobre un fondo oscuro.

Por último, conviene mencionar que cuando el espectro está originado por la luz emitida por un foco luminoso recibe el nombre de ***espectro de emisión*** mientras que si la luz pasa a través de una sustancia absorbente antes de ser analizada en el espectroscopio, se obtiene un ***espectro de absorción***.

Los espectros de emisión y de absorción de una misma sustancia son complementarios, en el sentido de que las mismas rayas brillantes que aparecen en espectro de emisión, figuran como rayas negras en el de absorción.



+ Cada elemento químico presenta un espectro discontinuo específico propio.
+ Cada raya del espectro se corresponde con una determinada longitud de onda.
+ Los espectros de emisión de los elementos presentan rayas espectrales en la zona infrarroja, visible y ultravioleta.

Los espectros atómicos han tenido siempre un gran interés analítico. Los químicos alemanes Kirchhoff y Bunsen demostraron en 1860 mediante métodos espectroscópicos la existencia en el Sol de muchos elementos, y el químico escocés W. Ramsay descubrió en 1903 el elemento helio en el Sol.

El físico suizo J.J. Balmer, en 1885, al estudiar el espectro de emisión del hidrógeno, encontró que las longitudes de onda de rayas espectrales en la zona visible del espectro electromagnético seguían una relación experimental. Relaciones similares entre rayas de series espectrales del hidrógeno se encontraron en las zonas ultravioleta (Lyman, 1916), infrarroja (Paschen, 1908) y otras. Rydberg dedujo una fórmula empírica general para todas ellas:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right) \quad \text{donde} \quad R_H = 1{,}09\text{x}10^7\ m^{-1}$$

Las fórmulas particulares de los espectros anteriormente mencionados se obtienen con n_i = 1 (Lyman), 2 (Balmer), 3 (Paschen) , 4 (Brackett)... y $n_j = n_i + 1, n_i + 2, n_i + 3, ...$

Esta fórmula fue interpretada de forma teórica por Bohr mediante el modelo atómico que lleva su nombre y que supone la existencia de niveles energéticos discretos en la corteza de los átomos. Las transiciones electrónicas entre estos niveles de energía producen la emisión (o absorción) de fotones con energía y longitud de onda concretas y que se manifiestan como rayas espectrales separadas.

Los espectros atómicos son una prueba de la cuantización de la materia.

5.- APLICACIONES DE LA ÓPTICA

(Lectura extraída del artículo: Óptica y sus Áreas de Aplicación.- H.H. Cerecedo y P.Padilla)

1. Introducción

Una de las motivaciones para escribir este artículo surgió de observar que en el proceso de formación, los estudiantes de la licenciatura en física de algunas universidades no cuentan con una idea clara sobre las diferentes ramas de la física y sus alcances. En un momento dado esto puede llegar a ser importante, pues el estudiante al conocer desde sus inicios la estructura general de un área de la física le puede ser de gran utilidad ya que obtiene una idea más clara de sus futuros estudios o bien puede involucrarse tempranamente con actividades de investigación. Este artículo pretende dar un panorama de la óptica y sus aplicaciones, no solo a los estudiantes, sino a la comunidad en general que no está involucrada en esta área de especialidad.

El estudio de la Física concierne a dos grandes áreas, la Física Teórica y la Física Experimental, ambos estudios no son excluyentes. Dentro de las ramas de la Física teórico-experimental encontramos a la Óptica: estudio de la luz (del rango de longitudes de onda electromagnética que pueden ser percibida por el ojo humano - entre 380 y 780 nm - y en rangos cercanos a esos extremos, hasta 244nm por un extremo (UV cercano) y 1600nm por el otro (IR Cercano).

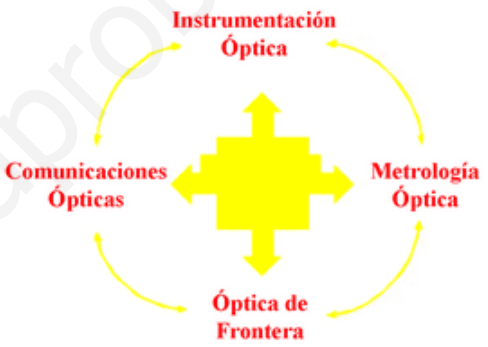
Desde el punto de vista académico, la Óptica podría clasificarse para su estudio en dos grandes grupos, la óptica básica y la fotónica. La **óptica básica** se encarga de estudiar los fenómenos fundamentales, como la *propagación de la luz* de un medio a otro, la *polarización*, la *difracción*, y la *coherencia de la luz*, etc. La **fotónica** se refiere al estudio de fenómenos más complejos de la óptica. El estudio de la fotónica concierne al estudio de los *láseres*, *amplificadores ópticos*, *holografía, fibras ópticas*, *cristales especiales (fotónicos)*, *electro-óptica*, *acustoóptica*, *óptica estadística*, *óptica cuántica*, etc. Los temas que se analizan dentro de la fotónica llevan a la creación de nuevas tecnologías en comunicaciones, sensores y computación.

2. Areas de aplicación

A nivel mundial, el reciente desarrollo y crecimiento de la Óptica ha tenido como consecuencia novedosas aplicaciones en las actividades cotidianas del ser humano.

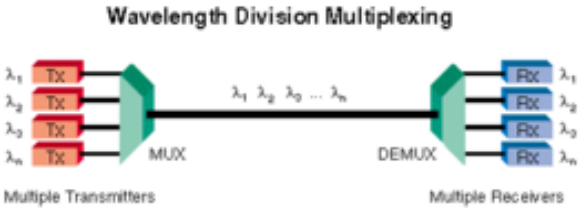
Desde el punto de vista de las aplicaciones en la Óptica, se pueden separar **en tres grandes áreas** en las cuales inciden las investigaciones que actualmente se realizan: **Instrumentación óptica**, **Comunicaciones ópticas**, **Metrología óptica**.

Sin embargo, y como soporte de estas tres, debe de mencionarse un área más de investigación, la **Óptica de frontera** (y que está estrechamente relacionada con la fotónica). Estos cuatro grupos de aplicaciones no están aisladas entre sí; al contrario, hay una estrecha relación entre ellos. Por ejemplo, las aplicaciones en instrumentación óptica están relacionadas con aplicaciones en comunicaciones ópticas y metrología, así mismo, la óptica de frontera está relacionada con la instrumentación óptica a través de los nuevos conceptos o descubrimientos que se van generando.



Para ver entonces un panorama general de las aplicaciones en óptica, analicemos brevemente cada uno de estos grupos.

Instrumentación Óptica: se incluye el estudio y diseño de elementos, y sistemas ópticos que se utilizan principalmente para recoger imágenes. Como ejemplo de ello podemos citar: lentes, prismas, espejos, microscopios, telescopios, etc. Los temas relacionados con la instrumentación óptica son: trazado de rayos, aberraciones, análisis de Fourier, difracción, etc. Los sistemas ópticos se utilizan en muchos ámbitos de la vida cotidiana así como en investigaciones científicas, aplicaciones tecnológicas y militares.

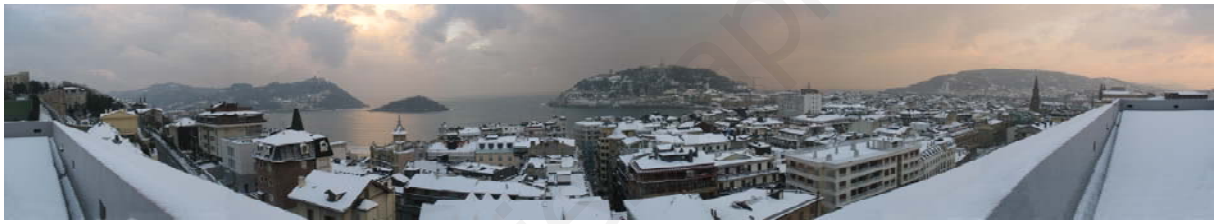


Comunicaciones Ópticas: en este grupo de aplicaciones se utiliza a la luz como portadora de información y se usan sistemas ópticos para la transmisión y recepción de señales. Los temas relacionados con esta área de aplicaciones son: cristales especiales, fibras ópticas, detectores, fuentes de luz (láseres), procesamiento de señales, holografía, óptica no lineal, entre otros. Una aplicación importante de la óptica en comunicaciones, es el empleo de fibra óptica para el envió de información a través de lo que conocemos como "internet".

Metrología Óptica: tienen que ver con la determinación de parámetros físicos, usando sistemas y métodos de no contacto utilizando luz, lo cual conlleva la realización de pruebas no destructivas. Los temas relacionados con este grupo de aplicaciones son: sistemas ópticos, polarización, interferencia, emisión de la luz, detectores de luz, procesamiento de imágenes, etc. La metrología óptica ha tenido un gran impacto en la solución de problemas industriales y de ingeniería. Igualmente se han implementado técnicas de aplicación en el área médica.

Óptica de Frontera: investiga fenómenos relacionados con radiación luminosa de alta potencia, la rápida detección y transmisión de información generada con luz, nuevos materiales ópticos, fuentes de radiación y detección luminosa. Temas relacionados: coherencia, óptica cuántica, fibras fotónicas, óptica no lineal, etc. Las aplicaciones derivadas de estos estudios se reflejan en la aparición de nuevos tipos de láseres o bien en el perfeccionamiento de los ya existentes. Estas investigaciones también permiten el empleo de nuevos materiales para aplicaciones diversas como en las comunicaciones y sensores ópticos.

En general, las aplicaciones más sobresalientes de estas cuatro áreas se manifiestan en la industria, la medicina, la biología, las comunicaciones, las medidas del medioambiente, entre muchas otras.



Fin del Tomo I
FÍSICA 2.- 2º Bachillerato
Valentín Laconcha Abecia

Donostia, Agosto 2010

www.yoquieroaprobar.es