9 DESCRIPCIÓN DE LOS MOVIMIENTOS: CINEMÁTICA

Para iniciar la parte de física, al igual que en ediciones anteriores, se ha creído conveniente mantener una unidad específica dedicada al conocimiento en cierta profundidad de las magnitudes cinemáticas que posteriormente, se usarán en las descripciones de otros movimientos.

Para ello, consideramos un requisito necesario e ineludible haber trabajado previamente la unidad de *Herramientas matemáticas de la física*, haciendo especial énfasis en el cálculo vectorial y en el cálculo diferencial.

En la presente unidad se hace un uso riguroso de la notación vectorial en la definición de las tres magnitudes cinemáticas: posición, velocidad y aceleración. En general, los alumnos que acceden a este nivel arrastran ciertos vicios derivados de un uso indulgente del carácter vectorial de dichas magnitudes en cursos anteriores, de modo que difícilmente conciben que un cuerpo pueda haberse movido y no haberse desplazado o que la velocidad media de un cuerpo en movimiento haya podido ser cero en un intervalo de tiempo. Tampoco conciben que un cuerpo cuya velocidad, en módulo, permanezca constante pueda estar acelerado. Así pues, encontraremos al principio de este nivel una gran renuencia por parte del alumnado a emplear correctamente el carácter vectorial de las magnitudes cinemáticas. Es importante pues, desmontar esos vicios citados y conseguir que tengan clara la distinción entre la «magnitud vectorial» y su «valor o módulo». En aras a simplificar las expresiones, de modo que no parezcan demasiado engorrosas, en el presente texto se ha optado por usar el símbolo de la magnitud sin flecha vectorial cuando nos referimos al valor o módulo y usar el símbolo con flecha cuando hablamos del vector en notación vectorial cartesiana. Debemos intentar que el alumnado sea igualmente riguroso en ese sentido y emplear la simbología adecuada al respecto, según esté determinando la magnitud vectorial en toda su extensión o tan solo su módulo.

Otra de las características de esta unidad, y del resto de unidades de física, es el empleo del concepto de derivada a la hora de tratar con magnitudes instantáneas. Para ello se ha reforzado notablemente este concepto, tanto en sus propiedades como en ejercicios resueltos, en la unidad de *Herramientas matemáticas de la física*.

Debemos tener presente que, como ya sucedía en currículos anteriores, la cinemática no figura en la programación de física de 2º de Bachillerato, de modo que necesariamente debemos garantizar una adecuada formación en la destreza del uso del cálculo diferencial en este nivel, pues será una herramienta que se considerará asumida por parte del alumnado cuando éste acceda a asignaturas de física en titulaciones universitarias.

Objetivos

1. Comprender el concepto de posición en un plano y en el espacio como magnitud vectorial y extraer toda la información a partir de la notación vectorial de la posición.
2. Distinguir entre magnitudes medias e instantáneas.
3. Obtener magnitudes instantáneas por el procedimiento de incrementos muy pequeños.
4. Aplicar el cálculo diferencial a la obtención de magnitudes instantáneas.
5. Utilizar correctamente la notación vectorial en las magnitudes cinemáticas.
6. Reconocer las componentes intrínsecas de la aceleración.

Relación de la unidad con las competencias clave

La competencia lingüística está presente en la correcta interpretación del texto y los enunciados de los problemas y cuestiones propuestos, así como en la exposición oral y escrita de las propuestas de *Investiga*. La competencia matemática y en ciencia y tecnología está presente en todo el desarrollo, así como en el uso de las herramientas matemáticas. La competencia digital se relaciona fundamentalmente con las propuestas de *investiga* y de la sección de *Física, tecnología y sociedad*. La competencia de aprender a aprender es inherente al propio desarrollo autosuficiente de la unidad, basado en la idea primordial de toda la obra de que ésta pudiera servir para el aprendizaje autodidacta del alumnado en caso de baja.

Temporalización

Se aconseja dedicar ocho sesiones lectivas al estudio de la unidad.

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	Relación de actividades del LA	Competencias clave
El problema del movimiento	1. Asociar el movimiento de los cuerpos a la elección del sistema de referencia.	1.1. Analiza el movimiento de un cuerpo en función del sistema de referencia elegido.	A: 1	CMCCT
La posición de los cuerpos ■ La ecuación de posición de un cuerpo en movimiento ■ Desplazamiento, trayectoria y espacio recorrido	2. Describir correctamente la posición de un cuerpo a partir del vector de posición en función de sus componentes y viceversa. 3. Calcular el desplazamiento y diferenciarlo del espacio recorrido.	2.1. Describe el movimiento de un cuerpo a partir de su vector de posición en función del tiempo.	A: 2-10 ER: 1 AT: 1-3, 21, 22, 23	CMCCT
La velocidad de los cuerpos ■ Velocidad media y velocidad instantánea ■ La velocidad instantánea como derivada de la posición ■ Características vectoriales de la velocidad instantánea	4. Calcular velocidades medias e instantáneas a partir de las ecuaciones vectoriales de posición en función del tiempo. 5. Relacionar gráficamente la posición con la velocidad en función del tiempo.	4.1. Obtiene las ecuaciones de la velocidad a partir de las de posición en función del tiempo.	A: 11-19 ER: 1-4 AT: 4-8, 17-24	CMCCT
La aceleración de los cuerpos ■ La aceleración instantánea ■ La aceleración instantánea como derivada de la velocidad ■ La aceleración tangencial y la aceleración centrípeta	6. Determinar la aceleración media e instantánea a partir de las ecuaciones de posición. 7. Resolver cuestiones que requieran la comprensión del concepto de aceleración en toda su extensión. 8. Calcular las componentes intrínsecas a partir de la ecuación de posición de un móvil en función del tiempo.	6.1. Describe el movimiento de un cuerpo a partir de su vector de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. 7.1. Obtiene las ecuaciones de la aceleración a partir de las de posición y velocidad en función del tiempo.	A: 20-24 ER: 1,4 AT: 9-16, 19-24	CMCCT

LA: libro del alumno; A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas; CCL: comunicación lingüística; CMCCT: competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; CD: competencia digital; CAA: Aprender a aprender; CSC: Competencias sociales y cívicas; CSIEE: Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; CCEC: Conciencia y expresiones culturales

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL ALUMNO

Video: El bólido de Cheliábinsk
Presentación

Enlace web: Movimiento y sistemas de referencia
Simuladores: 1. Paralajes estelares; 2 Sistemas de referencia

Enlace web: El vector de posición

Enlace web: Rapidez y velocidad
Video: Velocidad media y velocidad instantánea
Animación: La velocidad de los cuerpos

Enlace web: La aceleración instantánea
Simulador: Tipos de movimiento
Animación: La aceleración de los cuerpos

Unidad 9: Descripción de los movimientos: cinemática

1. El problema del movimiento

2. La posición de los cuerpos
- 2.1. La ecuación de posición de un cuerpo en movimiento
- 2.2. Desplazamiento, trayectoria y espacio recorrido

3. La velocidad de los cuerpos
- 3.1. Velocidad media y velocidad instantánea
- 3.2. La velocidad instantánea como derivada de la posición
- 3.3. Características vectoriales de la velocidad instantánea

4. La aceleración de los cuerpos
- 4.1. La aceleración instantánea
- 4.2. La aceleración instantánea como derivada de la velocidad
- 4.3. La aceleración tangencial y la aceleración centrípeta

PARA EL PROFESOR

Documento: Biografía de Galileo Galilei
Presentación: Desplazamiento paraláctico

Presentación

Documento: Magnitudes cinemáticas en un lanzamiento horizontal
Presentación: Posición de los cuerpos: coordenadas

Documento: Aproximación a la determinación de la velocidad de un cometa a partir de sus posiciones en el cielo
Presentación: Movimiento rectilíneo uniforme

Documento: Caída libre: gráficas
Actividades de ampliación: La aceleración y los límites humanos
Presentación: 1. Ecuaciones del movimiento rectilíneo con aceleración constante; 2. La caída libre

BIBLIOGRAFÍA

TIPLER, P. A.
Física. Editorial Reverté (3ª edición), Barcelona: 1995. Clásico de referencia obligada.

HOLTON, G.
Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas. Editorial Reverte, Barcelona: 1989.
Manual obligado para conocer la aparición y evolución de los conceptos desde el punto de vista histórico.

EISBERG, R. M. y LERNER, L. S.
Física: fundamentos y aplicaciones. McGraw Hill, Madrid: 1983. Se trata de un libro escrito con gran claridad y rigurosidad en los tratamientos. Lugar donde acudir a resolver esas dudas que de vez en cuando nos asaltan.

KANE, J.W. y STERNHEIM, M.M.
Física. Editorial Reverté, Barcelona: 1989. Multitud de ejemplos relacionados con las ciencias de la vida y de la salud.

ALONSO, M. y FINN, E. J.
Física. Addison-Wesley Longman: México, 2000. Clásico de referencia en cualquier tema de física.

Tests de autoevaluación interactivos

Física, tecnología y sociedad
CERN: acelerando protones casi a la velocidad de la luz

Técnicas de experimentación
Magnitudes cinemáticas en un lanzamiento horizontal

Estrategias de resolución y Actividades y tareas

Síntesis de la unidad y Autoevaluación

Documento: Prevención de desaceleraciones peligrosas: las almohadillas neumáticas *(aribags)*

Práctica de laboratorio: Determinación de la aceleración en los planos inclinados.

Pruebas de evaluación

WEBGRAFÍA

ed@d
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/
Página del proyecto ed@d (Enseñanza Digital a Distancia) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para mejorar el aprendizaje autónomo en un entorno tecnológico avanzado.

Fisquiweb
http://web.educastur.princast.es/proyectos/fisquiweb/
Espacio web dedicado a la enseñanza de la Física y la Química del portal de Educastur.

Física con ordenador
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/
Sitio web del profesor Ángel Franco García que incluye un nutrido conjunto de simulaciones de sistemas físicos, prácticas de laboratorio, experiencias de gran relevancia histórica, problemas interactivos, problemas-juego… Interesante el apartado de Cinemática.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

DESCRIPCIÓN DE LOS MOVIMIENTOS: CINEMÁTICA

¿Por qué estudiar cinemática? ¿Qué interés puede tener conocer con precisión la posición de un cuerpo en movimiento, así como sus otras magnitudes cinemáticas? Esa es una buena pregunta con la que iniciar el tema, indagando en las respuestas de los alumnos. Para acompañar ese pequeño debate introductorio, nada más apropiado que hacerlo con la lectura del texto introductorio y el video referido a la explosión del bólido de Cheliábinsk.

Vídeo: **EL BÓLIDO DE CHELIÁBINSK**

Información y filmación del bólido y su posterior onda de choque el 15 de febrero de 2013.

La conclusión que debe sacarse es que el estudio y conocimiento de los movimientos de los cuerpos no es un mero capricho intelectual, sino tan solo el inicio de un estudio más profundo que nos permita, por ejemplo, conocer y predecir las trayectorias de cometas o asteroides potencialmente peligrosos para la Tierra.

1. El problema del movimiento (página 217)

Este epígrafe sirve para reflexionar acerca de la necesidad de establecer claramente un sistema de referencia con respecto al cual poder determinar si un cuerpo está en movimiento o no, así como para discutir los propios movimientos dependiendo de cuál sea el sistema elegido.

El ejemplo más elocuente que puede servir para ilustrar esa dificultad es el de la propia determinación de los movimientos de la Tierra: ¿rota la Tierra o se mueven los demás astros en torno a nosotros? Esa fue la cuestión que le llevó siglos a la humanidad poder responder con pruebas irrefutables. Una de esas pruebas irrefutables del movimiento de traslación de la Tierra es la paralaje estelar, que puede entenderse de un modo muy claro a través del siguiente simulador.

Simulador: **PARALAJES ESTELARES**

Simulación interactiva que permite comprender la dificultad de medir paralajes estelares.

Enlace web: **MOVIMIENTO Y SISTEMAS DE REFERENCIA**

Enlace interesante sobre sistemas de referencia y movimiento.

Simulador: **SISTEMAS DE REFERENCIA**

Otro enlace interesante sobre sistemas de referencia y movimiento con simuladores.

Documento: **BIOGRAFÍA DE GALILEO GALILEI**

Imprimible donde se detallan datos biográficos de Galileo Galilei.

2. La posición de los cuerpos (página 218)

En este epígrafe se ha pretendido introducir en el texto el rigor de la notación vectorial que se debe haber trabajado convenientemente en la unidad de Herramientas matemáticas.

Si los alumnos han realizado la actividad 1 acerca de la localización del CERN en el plano, se habrán dado cuenta de que necesitan dos coordenadas para definir su posición. De ese modo, les resultará más fácil entender la existencia de dos componentes vectoriales.

Asimismo, al hablar de coordenadas cartesianas y polares (o esféricas en el espacio), debe mencionarse que las coordenadas terrestres (latitud y longitud) son un ejemplo de coordenadas esféricas (la tercera coordenada, que no se menciona, sería el radio terrestre), así como las coordenadas astronómicas *ascensión recta* y *declinación*.

Enlace web: **EL VECTOR DE POSICIÓN**

Tutorial sobre el vector de posición con ejercicios propuestos (y resueltos) con distinto nivel de dificultad.

2.1. La ecuación de posición de un cuerpo en movimiento

Debe recalcarse a los alumnos algo que puede parecernos obvio, pero que a ellos les entraña cierta dificultad; aquella coordenada en la que aparece el factor tiempo t es la coordenada que varía y, en consecuencia, el movimiento trascurre justamente en esa dirección. Si solo afecta a una componente, el movimiento es en una dirección. Si afecta a dos, el movimiento es en un plano.

2.2. Desplazamiento, trayectoria y espacio recorrido

Debe trabajarse especialmente la diferencia entre desplazamiento y espacio recorrido. Tanto el ejercicio resuelto 2 como la actividad 10 de desarrollo son de gran utilidad para este cometido.

3. La velocidad de los cuerpos (página 222)

En este epígrafe se ha tratado de relacionar íntimamente la notación matemática con el lenguaje empleado, a fin de ilustrar al alumnado acerca de la sencillez y elegancia del lenguaje matemático y su concreción en una expresión simple y compacta.

Así, se ha empezado aclarando lo que se entiende por *rapidez* y su traducción al lenguaje matemático, de modo que puedan definir matemáticamente las magnitudes enunciadas en la actividad 11 sin necesidad de haberlas visto previamente.

3.1. Velocidad media y velocidad instantánea

En lo referente al concepto de velocidad media, es muy conveniente deshacer el error que suelen cometer numerosos alumnos y alumnas de confundir *velocidad media* y *velocidad promedio* (en el sentido de hallar la media aritmética simple de dos velocidades). Resulta muy conveniente realizar en este apartado la "Estrategia de resolución n°2" para aclarar esa diferencia.

Al trabajar el cálculo de la velocidad instantánea por el método de incrementos muy pequeños, como se hace en este apartado, se pretende aproximar al alumnado al cálculo diferencial, pero también se le hace ver lo engorroso que podría ser hacerlo de esta manera, en contraposición a lo sencillo que resulta resolverlo por derivadas, como se propone en el siguiente apartado.

Video: VELOCIDAD MEDIA Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Divertido vídeo en inglés acerca de la diferencia entre velocidad media e instantánea, sin entrar en desarrollos matemáticos complejos.

3.2. La velocidad instantánea como derivada de la posición

La presente obra no elude el rigor matemático, pero tampoco lo expone sin una clara explicación previa. Por ello es absolutamente necesario que el alumnado haya trabajado y se haya familiarizado con el concepto de derivada y su cálculo en diferentes casos, en la unidad de Herramientas matemáticas. A tal fin, en la presente edición se ha ampliado notablemente el apartado dedicado al cálculo diferencial, con numerosos ejemplos y ejercicios. Haberlo hecho nos facilitará enormemente la tarea en adelante.

A la hora de resolver las actividades referidas a este apartado, debemos incidir en la diferencia entre las preposiciones *en* y *a*, de modo que sepan distinguir claramente entre "velocidad en los dos primeros segundos" y "velocidad a los dos segundos". Es decir, que sepan distinguir cuándo se les pide "velocidad madia en un intervalo de tiempo" y cuándo "velocidad en un instante".

Enlace web: RAPIDEZ Y VELOCIDAD

En este enlace hay un apartado de "gráfica *v-t*" muy interesante para trabajar el concepto de velocidad media e instantánea mediante un bonito simulador.

3.3. Características vectoriales de la velocidad instantánea

Es muy probable que cuando se imparta esta unidad, no hayan trabajado en matemáticas la interpretación gráfica de la derivada como la pendiente de la tangente a la función en un punto.

A partir de la figura 9.19 queda claro que el vector velocidad instantánea, como tal, tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en cada punto, aspecto muy importante a la hora de comprender el concepto de aceleración centrípeta.

4. La aceleración de los cuerpos (página 226)

Es muy importante recalcar en este epígrafe que existe aceleración siempre que cambie algún atributo del vector velocidad. Cuando el alumnado accede a este nivel, suelen asociar exclusivamente aceleración a aumento de velocidad (o, en el mejor de los casos, también a disminución de velocidad), como se habrá podido comprobar seguramente en la actividad 2 de la sección de *Comprueba lo que sabes*. Por ello, es fundamental deshacer a lo largo de este apartado esa idea mal preconcebida.

4.1. La aceleración instantánea como derivada de la velocidad

Al acabar este epígrafe, el alumnado debe ser capaz de resolver la aceleración a partir de la ecuación de posición.

Enlace web: LA ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Enlace sobre la aceleración media e instantánea.

4.2. La aceleración tangencial y centrípeta

En la presente obra, al igual que se hizo en las ediciones anteriores, se sigue considerando que éste es el momento más adecuado para introducir las llamadas componentes intrínsecas de la aceleración, dando así una visión completa de conjunto.

Es habitual encontrar textos que introducen la aceleración centrípeta cuando se aborda el estudio de los movimientos circulares. Sin embargo, debemos dejar bien claro que la aceleración centrípeta aparece en cualquier movimiento curvilíneo.

En la presente edición, en consonancia con la ampliación del tratamiento del concepto de derivada en la unidad de Herramientas Matemáticas, se proponen problemas ligeramente más complejos de cálculo de aceleraciones centrípetas, derivando el módulo de la velocidad. Ello supone haber adquirido una mínima destreza en el desarrollo de derivadas de raíces cuadradas en la unidad de Herramientas Matemáticas. En cualquier caso, el profesor deberá considerar hasta qué nivel de desarrollo desea llegar.

Simulador: TIPOS DE MOVIMIENTOS

Sitio web que incluye un laboratorio virtual de cinemática.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES (páginas 216/229)

Comprueba lo que sabes

1. ¿Puede un cuerpo haber recorrido 500 m y no haberse desplazado?

Se pretende comprobar si los alumnos conocen la diferencia entre desplazamiento y espacio recorrido. La respuesta es que sí podría ser cero el desplazamiento, pese a haber recorrido un espacio, siempre que la posición final coincida con la inicial.

2. Discute la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: siempre que un cuerpo está sometido a aceleración su velocidad aumenta.

En este caso se trata de verificar que el alumnado accede a este nivel con la idea, demasiado arraigada, de que solo existe aceleración cuando cambia el valor de la velocidad. Suelen asociar «acelerar» con «pisar el acelerador» y, por tanto, aumentar la velocidad. Es uno de esos conceptos que debemos trabajar en este nivel con especial ahínco para que, al final, saquen la conclusión correcta; hay aceleración siempre que se modifique cualquiera de los atributos del vector velocidad.

En consonancia con la anterior cuestión, la respuesta mayoritaria de nuestros alumnos suelen decir que el enunciado es falso. Pese a que la aceleración centrípeta se haya estudiado en 4º de la ESO, no acaban de comprender del todo su significado; es decir, no entienden el hecho de que un cuerpo esté sometido a aceleración sin que varíe el valor de su velocidad.

3. Si un objeto se desplaza siempre a 10 m/s, ¿podría estar acelerado?

Esta cuestión nos sirve justamente para introducir el primer apartado del tema; la percepción del movimiento según el sistema de referencia elegido. Esa percepción no solo se refiere al hecho de que un cuerpo pueda estar en reposo para un observador y en movimiento rectilíneo uniforme para otro, sino también a la propia descripción de la trayectoria de dicho movimiento.

En este caso, la respuesta es afirmativa; para un primer observador un cuerpo puede tener, por ejemplo, un movimiento rectilíneo uniforme; mientras que si un segundo observador se encuentra en un sistema de referencia que se desplaza respecto del primero con la misma velocidad y en la misma dirección que el objeto, a la vez que rota alrededor de un eje perpendicular al de la dirección del movimiento, describirá el movimiento del objeto como circular.

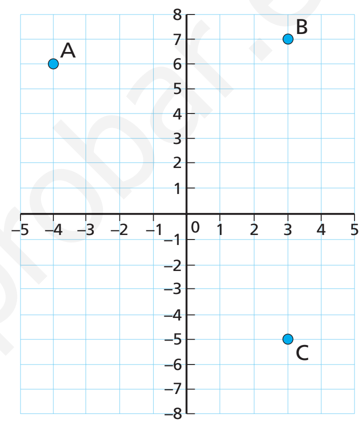
Actividades

1 A partir del mapa de la figura 9.3, determina con la mayor exactitud posible la posición del Laboratorio Europeo de Física de Partículas (CERN).

¿Qué tipo de coordenadas has usado? ¿Dónde estaría situado el origen del sistema de referencia utilizado?

La actividad va encaminada a entender que la posición de un punto en un plano requiere de dos coordenadas, en este caso la latitud y la longitud, y de un sistema de referencia, donde el punto (0,0) sería el punto de corte del meridiano de Greenwich (longitud 0) con el ecuador terrestre (latitud 0). Las coordenadas del CERN en este sistema de referencia son 46,23° N en latitud y 6,05° E en longitud.

2 Haciendo uso de la notación vectorial expresa los vectores de posición correspondientes a los puntos A, B y C de la figura 9.7.



a) ¿A qué distancia del origen se encuentra cada punto?

b) Determina las coordenadas polares de cada uno de los puntos.

Los vectores de posición de cada punto (x, y) con respecto a un origen (x_o, y_o) se obtienen siempre de la siguiente manera:

$$\vec{r} = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j}$$

de modo que:

$$\overrightarrow{OA} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$$

a) La distancia al origen es el módulo de cada uno de los vectores:

$$d_A = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = 7,2$$

$$d_B = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7,6$$

$$d_C = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = 7,8$$

Expresadas en las unidades de distancia correspondientes.

b) Las coordenadas polares son:

- punto A: $r_A = 7,2$; $\theta_A = 123,7^o$
- punto B: $r_B = 7,6$; $\theta_B = 66,8^o$
- punto C: $r_C = 7,8$; $\theta_C = -39,8^o$

En los tres casos el ángulo se resuelve mediante la tangente como: tg $\theta = y/x$

3 **El vector de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia es:**

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Determina sus coordenadas polares.

Las coordenadas polares buscadas son r y θ, donde r es el módulo del vector de posición.

Así pues:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5{,}83$$

Por otra parte, si elegimos como coordenada θ el ángulo que forma el vector de posición con el eje X, entonces:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$$

Este valor de la tangente corresponde a un ángulo de 59°. Por tanto, las coordenadas polares que corresponden al vector de posición dado son:

$$r = 5{,}83;\ \theta = 59°$$

4 **Las coordenadas polares de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia son $r = 10$ m y $\theta = 30°$. Determina el vector de posición del cuerpo con respecto a dicho punto.**

Al ofrecerse dos coordenadas polares, se desprende que estamos hablando de la posición en un plano. Suele ser costumbre que, salvo indicación contraria, el ángulo θ sea el que forma el vector con el eje X.

Por tanto:

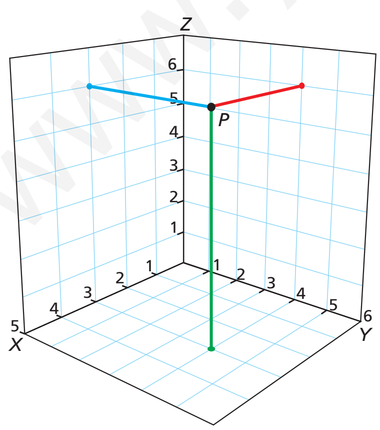
$$x = r\cos\theta = 10\cos 30° = 8{,}66$$

$$y = r\,\text{sen}\ \theta = 10\ \text{sen}\ 30° = 5$$

5 **Observa la figura 9.9 y calcula:**

a) **El vector de posición del punto P de la figura del margen.**

b) **Sus coordenadas esféricas r, α y β (considera α y β los ángulos definidos en la figura 9.8).**



a) Como puede comprobarse en la figura, las coordenadas del punto P son (3, 4, 6). Dado que el origen está situado en O (0,0,0), entonces:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2} = 7{,}81$$

b) Considerando los ángulos definidos en la figura 9.8, las coordenadas esféricas son:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{z}{r} \Rightarrow \alpha = 50{,}2°$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{y}{x} \Rightarrow \beta = 53{,}13°$$

En consecuencia, el vector de posición que corresponde a las coordenadas polares ofrecidas es:

$$\vec{r} = 8{,}66\vec{i} + 5\vec{j}$$

6 **Dos cuerpos, A y B, se mueven en la dirección del eje X según las ecuaciones $x_A = 8t$ y $x_B = 1{,}5t^2$.**

a) **Representa en una misma gráfica las posiciones de A y de B desde $t = 0$ s hasta $t = 5$ s.**

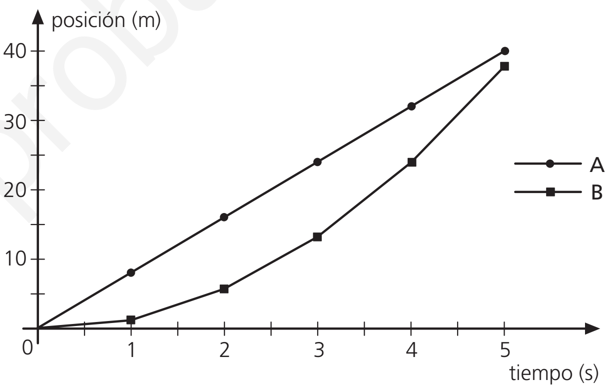
b) **¿Quién llega antes a los 100 m?**

c) **¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran los dos en la misma posición?**

d) **¿Quién alcanza antes los 300 m?**

e) **¿Qué diferencias encuentras entre el movimiento de A y el de B?**

a)



b) ¿Quién llega antes a los 100 m?

Calculando los tiempos que ambos tardan en recorrer los 100 m, se obtiene:

$$t_A = \frac{100}{8} = 12{,}5\ \text{s}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{100}{1{,}5}} = 8{,}16\ \text{s}$$

Por tanto, el cuerpo B alcanza antes los 100 m.

c) Igualando las posiciones de ambos, y despejando el tiempo, se obtiene $t = 5{,}3$ s.

d) Operando del mismo modo que en el apartado *b)* se aprecia que el cuerpo B alcanza antes los 300 m.

e) Como se aprecia por la gráfica comparada y por las ecuaciones, el movimiento de A transcurre con velocidad constante $(\vec{v} = d\vec{r}/dt)$ de $8\vec{i}$, mientras que el B tiene una velocidad variable igual a $3t\vec{j}$ m/s y una aceleración constante de $3\vec{i}$ m/s^2.

7 **¿Podría ser mayor el desplazamiento que el espacio recorrido?**

Dado que el valor del desplazamiento equivale a la distancia medida en línea recta entre la posición inicial y la final, el espacio recorrido será siempre mayor o, como mínimo, igual al desplazamiento. Coincidirán ambos valores cuando se trate de un movimiento rectilíneo. En los demás casos, el espacio recorrido siempre será mayor que el desplazamiento.

8 **¿Pueden ser equivalentes el espacio recorrido y el desplazamiento? ¿En qué caso?**

Dado que el valor del desplazamiento equivale a la distancia medida en línea recta entre la posición inicial y la final, el espacio recorrido será siempre mayor o, como mínimo, igual al desplazamiento. Coincidirán ambos valores cuando se trate de un movimiento rectilíneo. En los demás casos, el espacio recorrido siempre será mayor que el desplazamiento.

9 **¿Crees que un cuerpo puede haber recorrido un espacio si el desplazamiento es cero?**

Efectivamente, si la posición inicial y final coinciden, como sería el caso de un movimiento cíclico (circular, oscilatorio, etc.) o de ida y vuelta, entonces el desplazamiento neto sería cero; sin embargo, sí ha habido movimiento y, por tanto, se ha recorrido un espacio.

10 **Un péndulo de 1 m de longitud se separa 20° de su posición de equilibrio y se deja oscilar. Calcula:**

a) **El desplazamiento y el espacio recorrido de un extremo al otro.**

b) **El desplazamiento y el espacio recorrido en una oscilación completa.**

a) Considerando que el péndulo en su movimiento describe un arco de circunferencia de 40° y dado que πr es el arco correspondiente a 180°, entonces el espacio recorrido de un extremo al otro es:

$$s = \frac{20 \cdot \pi r}{180} = 0{,}698 \text{ m}$$

Mientras que el desplazamiento entre los dos extremos es:

$$d = 2x = 2L \text{ sen } 20 = 0{,}684 \text{ m}$$

b) Obviamente en una oscilación completa el desplazamiento es cero, mientras que el espacio recorrido es el doble del caso anterior, es decir 1,396 m.

11 **Teniendo en cuenta lo explicado en el texto, lee las definiciones y expresa matemáticamente las cuatro magnitudes.**

a) **Aceleración: es la rapidez con que cambia la velocidad.**

b) **Fuerza: es la rapidez con que cambia el momento lineal ($\vec{p}$) de un cuerpo.**

c) **Potencia (P): es la rapidez con que se realiza un trabajo (*W*).**

d) **Velocidad de una reacción química: es la rapidez con que cambia la concentración de un reactivo (*c*).**

La expresión matemática de las magnitudes pedidas sería:

a) Aceleración: $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$

b) Fuerza: $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$

c) Potencia: $P = \Delta W/\Delta t$

d) Velocidad de reacción: $v_r = \Delta c/\Delta t$

12 **Un cuerpo se desplaza en una recta según la siguiente ecuación: $\vec{r} = 5t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}$**

¿Cuál es su velocidad en los cinco primeros segundos?

Aplicando la definición general de velocidad, la velocidad (media) en los cinco primeros segundos será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(5) - \vec{r}(0)}{5 - 0}$$

Dada la ecuación de posición:

$$\vec{r}(5) = 5 \cdot 5\vec{i} + 2 \cdot 5\vec{j} = 25\vec{i} + 10\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{r}(0) = 5 \cdot 0\vec{i} + 2 \cdot 0\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j} \text{ m}$$

Entonces: $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\,j$ m/s

13 **¿Qué clase de movimiento realiza un cuerpo que se desplaza con velocidad constante? ¿Cómo sería la representación gráfica de la velocidad frente al tiempo?**

Dado que la velocidad es un vector, su constancia supone que es constante en módulo, dirección y sentido. Al ser constante en dirección, el movimiento es rectilíneo, y al ser constante en módulo, es uniforme. Así pues, el movimiento es rectilíneo y uniforme.

Si representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo, obtendremos una recta horizontal.

14 **Un cuerpo se mueve según esta ecuación de posición:**

$$\vec{r} = 5\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j} \text{ m}$$

a) **¿Qué desplazamiento ha realizado en los diez primeros segundos? ¿En qué dirección se mueve?**

b) **Calcula su velocidad en dicho intervalo de tiempo.**

a) El desplazamiento en los diez primeros segundos es:

$$\vec{r}(10) - \vec{r}(0) =$$
$$= [5\vec{i} + (3 \cdot 10^2 - 1)\vec{j}] - [5\vec{i} + (3 \cdot 0^2 - 1)\vec{j}] = 300\vec{j}$$

Es decir, se ha desplazado 300 metros en el sentido positivo del eje Y.

b) Su velocidad en los diez primeros segundos será:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{300\vec{j} \text{ m}}{10 \text{ s}} = 30\vec{j} \text{ m/s}$$

Es decir, se desplaza 30 m cada segundo en la dirección *Y* positiva.

15 **Repite el procedimiento del ejemplo anterior eligiendo como intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}000\,001$ s. ¿A qué valor exacto crees que tiende la serie?**

El valor así obtenido es la velocidad instantánea.

En este caso:

$$x_f = x(t + \Delta t) = 3(2{,}000\,001)^2 - 4(2{,}000\,001) =$$
$$= 4{,}000\,008 \text{ m}$$

$$x_0 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ m}$$

$$v = \frac{x_f - x_0}{\Delta t} = \frac{4{,}000\,008 - 4}{0{,}000\,001} = 8 \text{ m/s}$$

Al elegir intervalos de tiempo más pequeños, se obtiene el valor exacto de la velocidad instantánea.

16 **Un cuerpo se mueve en una dirección determinada según la ecuación de posición:**

$$\vec{r} = (4\,t^3 - t)\vec{i} + 3t^2\vec{j} \text{ m}$$

Calcula:

a) **Su velocidad media en los diez primeros segundos.**

b) **Su velocidad instantánea en $t = 5$ s y en $t = 10$ s.**

a) Su velocidad media la podemos calcular según:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(10) - \vec{r}(0)}{10} =$$

$$= \frac{(4 \cdot 10^3 - 10)\vec{i} + 3 \cdot 10^2\,\vec{j} - (4 \cdot 0^3 - 0)\vec{i} + 3 \cdot 0^2\,\vec{j}}{10} =$$

$$= 399\vec{i} + 30\vec{j} \ \ \text{m/s}$$

Y su módulo:

$$\vec{v}_m = \sqrt{399^2 + 30^2} = 400 \ \ \text{m/s}$$

b) Su velocidad en los diez primeros segundos será:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}} = \frac{300\,\vec{j} \ \ \text{m}}{10 \ \ \text{s}} = 300\,\vec{j} \ \ \text{m/s}$$

Es decir, se desplaza 30 m cada segundo en la dirección Y positiva.

17 **Un cuerpo se mueve a lo largo del eje *X* según la siguiente ecuación $x = 5 \ \cos\left(\pi t + \pi/2\right)$ cm. Determina:**

a) **Su posición inicial y entre qué posiciones se mueve.**

b) **La expresión de su velocidad en función del tiempo.**

c) **Calcula los valores de la posición y la velocidad para los instantes $t = 0$ s, $t = 0{,}5$ s, $t = 1$ s, $t = 1{,}5$ s y $t = 2$ s.**

d) **A la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, describe las características de este tipo de movimiento.**

a) La posición inicial en $t = 0$ es 5 cos $\pi/2 = 0$ cm.

Dado que los valores del coseno oscilan entre +1 y −1, el cuerpo se mueve entre las posiciones +5 y −5 cm.

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de posición respecto del tiempo, de modo que:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \ \ sen\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{cm/s}$$

c) Representando los resultados en forma de tabla:

Tiempo (s)	0	0,5	1	1,5	2
Posición (cm)	0	−5	0	+5	0
Velocidad (cm/s)	-5π	0	$+5\pi$	0	-5π

Este ejercicio sirve para introducir al alumnado a los movimientos periódicos que repiten posiciones y velocidades en intervalos regulares de tiempo. Es el caso de los movimientos oscilatorios que se estudiarán en la unidad 15.

18 **¿Existe algún movimiento en el que la velocidad media y la instantánea sean iguales en todo momento? En caso afirmativo, di cuál.**

En el movimiento rectilíneo y uniforme, la velocidad media y la instantánea son iguales en todo momento.

19 **Un cuerpo se mueve según la ecuación:**

$$\vec{r} = (2t^2 + 5t)\,\vec{i} + t^3\vec{j} - 5t\,\vec{k} \ \ \text{m}$$

Determina la ecuación de su velocidad instantánea en función del tiempo. Después, expresa dicha velocidad en $t = 2$ s y halla su valor en dicho instante.

Como la velocidad instantánea es la derivada del vector de posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t + 5)\vec{i} + 3t^2\,\vec{j} - 5\vec{k} \ \ \text{m/s}$$

Para obtener la expresión para $t = 2$ s, no hay más que sustituir:

$$\vec{v}_2 = 13\ \vec{i} + 12\ \vec{j} - 5\ \vec{k}$$

El módulo será:

$$\vec{v}_2 = \sqrt{169 + 144 - 25} = 18{,}38 \ \ \text{m/s}$$

20 **A partir de la figura 9.20, y haciendo uso de las marcas de posición y la regla de referencia (graduada en cm), determina las velocidades medias entre cada par de marcas consecutivas si los intervalos de tiempo son de 1/30 s. Traza una gráfica velocidad-tiempo con los datos obtenidos. ¿Cuánto vale la aceleración media correspondiente a dicho movimiento?**

El alumnado debe observar que la velocidad aumenta de manera uniforme a lo largo de los instantes de tiempo, es decir, la velocidad media es constante en cada intervalo temporal.

Al representar los valores deberá obtener una recta con pendiente positiva, cuyo valor se corresponderá con el de la aceleración de caída de la bola de billar, aceleración en este caso constante e igual a la aceleración de la gravedad, *g*.

21 **Determina según el procedimiento empleado en el apartado 3.1. de esta unidad, la aceleración instantánea en $t = 3$ s de un móvil cuya velocidad varía según la expresión:**

$$v = 2\ t^2 + t \ \ \text{m/s}$$

a) **¿Se diferencia ese valor de la aceleración media durante los tres primeros segundos? ¿Por qué?**

b) **¿Qué dependencia del tiempo debería mostrar la ecuación para que ambos valores fuesen iguales?**

a) De acuerdo con el procedimiento descrito, tomaremos un intervalo de tiempo muy pequeño, por ejemplo, $\Delta t = 0{,}000\,001$ s, con lo que:

$$v_f = 2\left(t + \Delta t\right)^2 + \left(t + \Delta t\right) =$$

$$= 2 \cdot 3{,}000\,001^2 + 3{,}000\,001 = 21{,}000\,013 \ \ \text{m/s}$$

Para la velocidad inicial, no tenemos más que sustituir en la ecuación el tiempo por su valor (t3 s), luego:

$$v_i = 21 \ \text{m/s}$$

Sustituyendo en la expresión para la aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{21{,}000\,013 - 21}{0{,}000\,001} = 13 \ \ \text{m/s}^2$$

Pasemos ahora a calcular la aceleración media:

$$a = \frac{v_3 - v_0}{t} = \frac{21 - 0}{3} = 7 \ \ \text{m/s}^2$$

En un movimiento con aceleración variable lo normal es que la aceleración media y la calculada para un instante determinado no coincidan.

b) Para que la aceleración media y la instantánea coincidan en todo momento, esta magnitud debería ser constante, lo que ocurriría si la expresión de la velocidad fuese una ecuación de primer grado (movimiento uniformemente acelerado).

22 **La posición de un cuerpo viene determinada por la ecuación: $\vec{r} = -3t^2\vec{i} + 2t^3\vec{j} + 4t\vec{k}$ m**

a) **Determina las componentes de su aceleración. ¿Es esta constante?**

b) **Calcula el valor de la aceleración a los 2 s.**

a) La aceleración se obtiene derivando dos veces la ecuación de posición, con lo que resulta: $\vec{a} = -6\vec{i} + 12t\vec{j}$ m/s^2

Dado que depende del tiempo, no es constante.

b) A los 2 s, la aceleración es $\vec{a} = -6\vec{i} + 24\vec{j}$ m/s^2 y su valor es 24,7 m/s^2.

23 **Un cuerpo se mueve en el plano *XY* según la ecuación de posición: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 6t\vec{j}$ m**

a) **Determina la expresión de su aceleración instantánea en función del tiempo.**

b) **¿En qué dirección se acelera?**

c) **¿Varía su aceleración con el tiempo?**

a) Para obtener la aceleración instantánea, hay que hacer la segunda derivada de la ecuación de posición: $\vec{a} = 4\vec{i}$ m/s^2

b) El cuerpo se acelera en la dirección del eje X^+.

c) No, su aceleración es constante con el tiempo.

24 **Un cuerpo describe círculos de 10 m de radio con una velocidad cuyo valor varía con el tiempo según $v = 2t^2$ m/s. Determina:**

a) **Su aceleración tangencial en función del tiempo y su valor a los 3 s.**

b) **Su aceleración centrípeta en función del tiempo y su valor a los 3 s.**

c) **El módulo de la aceleración total en función del tiempo y su valor en los tiempos $t = 1$ s y $t = 3$ s.**

Derivando dos veces la ecuación de posición obtenemos la aceleración, de modo que:

$$\vec{a} = 4\ \vec{i}\ \ \text{m/s}^2$$

La aceleración es constante, puesto que no depende del tiempo y se acelera en la dirección del eje X$^+$.

a) Puesto que la aceleración tangencial se obtiene derivando el módulo de la velocidad respecto del tiempo, entonces:

$$a_t = 4\,t\ \text{m/s}^2$$

De modo que a los 3 s su aceleración tangencial vale 12 m/s^2.

b) La aceleración centrípeta en función del tiempo se obtiene a partir de:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4t^4}{10} = 0{,}4t^4\ \ \text{m/s}^2$$

siendo su valor a los 3 s de 32,4 m/s^2.

c) La aceleración total es:

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_c^{\,2}} = \sqrt{0{,}16\ t^8 + 16t^2} =$$
$$= 4t\ \sqrt{0{,}01\ t^6 + 1}\ \ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo los tiempos citados se obtienen los valores de 4,02 m/s^2 para $t = 1$ s y de 34,5 m/s^2 para $t = 3$ s.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
FÍSICA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD (página 230)

Lectura: CERN: ACELERANDO PROTONES CASI A LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Texto sobre los aceleradores de partículas.

Análisis

1 Describe cómo funciona un acelerador lineal mediante cavidades de radiofrecuencia y por qué deben producir polaridad variable.

Los aceleradores lineales que funcionan mediante cavidades de radiofrecuencia consisten esencialmente en un tubo de vacío construido en línea recta por el que circulan las partículas. En el interior del tubo existen cavidades cilíndricas a las que se conecta el voltaje alterno de radiofrecuencia (generalmente de microondas). El potencial aplicado produce una aceleración de los protones, de modo que la velocidad en la cavidad enésima viene dado por:

$$v_n = \sqrt{\frac{2\ n\ e\ V}{m}}$$

siendo e y m la carga y masa del protón respectivamente, V el potencial aplicado y n el número de cavidad correspondiente. Dado que la velocidad aumenta, la longitud de las cavidades debe hacerlo de manera similar, según la expresión:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_n}{f}$$

siendo f la frecuencia aplicada. Este es, esencialmente, el principio de un LINAC.

2 ¿Por qué una mayor energía de colisión es sinónimo de posibles nuevas partículas? Busca información acerca de una famosa ecuación de Einstein de equivalencia entre masa y energía que te ayudará a responder a la pregunta.

Se trata de que los alumnos indaguen acerca de la relación masa energía plasmada en la expresión $E = \Delta mc^2$.

3 ¿En cuántos puntos se hacen colisionar los haces de protones?

Se hacen colisionar en cuatro puntos, donde están situados los 4 detectores CMS, ATLAS, ALICE y LHCb.

Propuesta de investigación

4 Busca información sobre qué es exactamente el bosón de Higgs y por qué es tan importante para la física de partículas. ¿Por qué razón la masa del bosón de Higgs, y la de las partículas elementales en general, se expresan en unidades de energía?

El bosón de Higgs es necesario para dar consistencia al modelo estándar de la Física de partículas . Sin su confirmación, el modelo sería inconsistente. Es esencial para explicar la masa de los leptones. La medida de las partículas elementales en unidades de masa se debe a que en la realidad la masa no es otra cosa que una forma condensada de la energía, a tenor de la identidad $E = mc^2$.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
TÉCNICAS DE TRABAJO Y EXPERIMENTACIÓN (página 231)

Práctica de laboratorio: MAGNITUDES CINEMÁTICAS EN UN LANZAMIENTO HORIZONTAL

El objetivo de esta práctica es determinar las magnitudes cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) del movimiento parabólico correspondiente al lanzamiento horizontal.

Cuestiones

1 ¿Qué aceleración presenta este movimiento en vertical?

Se trata de que los alumnos comprueben que solo existe aceleración en el movimiento de caída, mientras que el avance horizontal transcurre de modo uniforme con velocidad constante. El valor que se obtiene para la aceleración es, aproximadamente, de 10 m/s^2. La precisión de los datos es mayor en la parte inferior de la fotografía.

2 ¿Cómo avanza la bola horizontalmente?

Avanza con movimiento rectilíneo uniforme.

3 Elabora un informe de la práctica.

Respuesta libre.

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES Y TAREAS (páginas 234/235)

La posición de los cuerpos

1 **Una balsa se encuentra a la deriva y, debido al movimiento de las aguas, se desplaza, cada segundo, 0,5 m hacia el este (eje *X*) y 0,25 m hacia el norte (eje *Y*).**

a) **¿Cómo expresarías su posición en función del tiempo respecto al punto donde se encontraba al principio?**

b) **¿Cuál es su posición al cabo de 10 min? ¿Y la distancia que se ha desplazado en esos 10 min?**

a) La ecuación de posición del cuerpo en función del tiempo es:

$$\vec{r} = 0{,}5\ t\ \vec{i} + 0{,}25\ t\ \vec{j}\ \text{ m}$$

b) Al cabo de 10 min = 600 s, su posición será:

$$\vec{r} = 300\ \vec{i} + 150\ t\ \vec{j}\ \text{ m}$$

Siendo la distancia respecto del punto inicial el módulo de dicho vector:

$$d = \sqrt{300^2 + 150^2} = 335{,}4\ \text{ m}$$

2 **Un cuerpo se mueve en el plano *XY* de modo que sus coordenadas varían con el tiempo, según la ecuación: $x = 6t + 2$ m e $y = 2t - 1$ m. Deduce la ecuación de su trayectoria (expresa *y* en función de *x*) y demuestra que se trata de una recta.**

Resolviendo la ecuación paramétrica de la recta:

$$x = 6t + 2$$

$$y = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad 3y = 6t - 3$$

Despejando $6t$ e igualando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

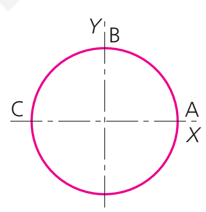
ecuación que corresponde a una recta.

3 **Un cuerpo describe un cuarto de circunferencia de radio 5 m desde A hacia B, como se aprecia en la figura, partiendo del punto A en el instante $t = 0$. Determina, considerando el origen en el centro:**

a) **El vector desplazamiento correspondiente al movimiento.**

b) **El módulo de dicho desplazamiento.**

c) **El espacio recorrido, ¿coincide con la respuesta del apartado *b*? ¿Por qué?**



d) **Realiza las tareas de los tres apartados anteriores considerando el movimiento desde A hasta C.**

a) La posición en A es $\vec{r}_A = 5\vec{i}$ m, mientras que en B es $\vec{r}_B = -5\vec{j}$ m, por lo que:

$$\Delta\vec{r} = -5\vec{i} + 5\vec{j}\ \text{ m}$$

b) Calculando su módulo se obtiene:

$$\Delta\vec{r} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 7{,}07\ \text{ m}$$

c) El espacio recorrido es:

$$s = \frac{\pi r}{2} = 7{,}85\ \text{ m}$$

Obviamente no coinciden, pues al no ser un desplazamiento diferencial, el arco de circunferencia (espacio recorrido) y la cuerda (desplazamiento) no coinciden.

d) La posición en C es $5\vec{i}$ m, por lo que el desplazamiento de A a C es $\Delta\vec{r} = -10\vec{i}$ m, siendo su módulo igual a 10 m. El espacio recorrido ahora es $s = \pi\, r = 15{,}7$ m.

La velocidad de los cuerpos

4 **¿Pueden ser iguales en todo momento la velocidad media y la instantánea en algún movimiento?**

Sí, en el movimiento rectilíneo y uniforme.

5 **¿Podría un cuerpo tener celeridad (módulo de velocidad) constante y velocidad variable?**

El objetivo de estas cuestiones es insistir en el carácter vectorial de la velocidad, por lo que en este caso en el que el módulo (celeridad) es constante, la variación de la velocidad significa que la dirección cambia. Esto ocurrirá en cualquier movimiento no rectilíneo que transcurra con celeridad constante. El ejemplo más simple es el movimiento circular uniforme.

6 **¿Crees que la velocidad media de un cuerpo en movimiento podría ser cero en cierto intervalo?**

Sí, siempre que al cabo de ese intervalo de tiempo escogido el cuerpo estuviese exactamente en la misma posición que al inicio de ese intervalo.

7 **Dos cuerpos se mueven en la dirección del eje *X*; siendo sus ecuaciones de posición: $x1 = 2t2 + 3t + 3$ m y $x2 = 8t + 4$ m. Razona:**

a) **¿Cuáles son sus posiciones iniciales?**

b) **¿Se cruzan en algún momento? En caso afirmativo, ¿en qué punto?**

c) **¿En qué instante tienen ambos la misma velocidad?**

d) **¿Qué puede decirse del movimiento de cada uno?**

a) Las posiciones iniciales son las que corresponden a $t = 0$, siendo:

$$x_{o1} = 3\ \text{m}\ ;\ x_{o2} = 4\ \text{m}$$

b) En el punto en que se cruzan, sus posiciones son coincidentes. En consecuencia, igualando ambas posiciones:

$$2\ t^2 + 3t + 3 = 8\ t + 4 \quad \rightarrow \quad 2\ t^2 - 5\ t - 1 = 0$$

Resolviendo el tiempo de cruce, obtenemos:

$$t = 2{,}68\ \text{s}$$

Y por tanto se cruzan en $x = 25{,}4$ m

c) Sus respectivas velocidades son:

$$v_1 = 4t + 3\ \text{m/s} \quad ; \quad v_2 = 8\ \text{m/s}$$

Igualando y resolviendo el tiempo, se obtiene:

$$t = 1{,}25\ \text{s}$$

d) Puesto que la velocidad del primero depende linealmente del tiempo, se trata de un movimiento rectilíneo con aceleración constante, mientras que el segundo es rectilíneo con velocidad constante.

8 **Un vehículo se desplaza durante los 70 primeros minutos de su trayecto a una velocidad constante de 90 km/h, y en los 30 minutos restantes a 144 km/h. ¿Cuál ha sido su velocidad media durante todo el trayecto?**

La distancia total recorrida es:

$$d = d_1 + d_2 = v_1 \; t_1 + v_2 \; t_2 =$$

$$= 90 \; \frac{7}{6} + 144 \cdot 0{,}5 = 177 \;\; \text{km}$$

Y el tiempo invertido en recorrerla ha sido de . Por tanto, su velocidad media resulta ser: v = 106,2 km/h

La aceleración de los cuerpos

9 **Explica qué tipo de movimiento describiría un cuerpo en las siguientes situaciones:**

a) $\vec{a}_t$ **es constante y** $\vec{a}_c$ **es cero.**

b) $\vec{a}_c$ **es constante y** $\vec{a}_t$ **es cero.**

c) **Ambas son 0.**

a) MRUA.

b) MCU.

c) MRU.

10 **¿Podría un cuerpo tener velocidad cero y, sin embargo, estar acelerado? Razona tu respuesta.**

Efectivamente. Conviene hacer notar al alumnado que del enunciado no se desprende que el cuerpo esté permanentemente en reposo. El enunciado se cumple igualmente si el cuerpo tiene velocidad cero en un instante dado.

11 **¿Puede cambiar el sentido de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?**

El sentido de la velocidad cambiará siempre que la aceleración constante sea contraria a la velocidad inicial.

12 **¿Puede un cuerpo aumentar su velocidad si su aceleración disminuye?**

Sí. La aceleración significa rapidez con que cambia (en este caso, aumentando) la velocidad. Que la aceleración disminuya significa que disminuye la rapidez con que aumenta la velocidad, pero no significa que la velocidad deje de aumentar; sigue haciéndolo, pero con «menos rapidez». Evidentemente, para que esto ocurra, la velocidad y la aceleración tienen que actuar en el mismo sentido. Un ejemplo en el que sucede lo que se plantea lo proporciona el movimiento de un péndulo desde un extremo hasta el punto más bajo; la aceleración en el extremo es máxima, pero la velocidad es cero. A medida que desciende, la velocidad aumenta, pero la aceleración disminuye hasta hacerse cero en el punto más bajo. El mismo análisis es válido para la oscilación de un muelle.

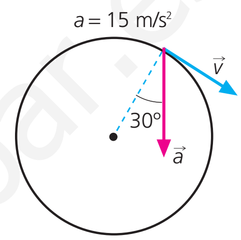
13 **¿Qué tipo de movimiento describiría un objeto cuya aceleración fuese en todo momento perpendicular a la trayectoria y aumentase, además, de forma constante? ¿Y si la aceleración se mantuviese constante?**

Hemos de insistir en estas cuestiones para que los alumnos y alumnas subrayen o anoten todos los aspectos que consideren relevantes y mediten sobre ellos. Aquí se nos indica que la aceleración es en todo momento perpendicular a la trayectoria. Es decir, la única aceleración que existe es centrípeta, por tanto será nula la aceleración tangencial. De ello se deduce que el módulo de la velocidad es constante.

En consecuencia, si la aceleración (centrípeta) aumenta de forma constante y el módulo de la velocidad no cambia, de la expresión de la aceleración centrípeta $a_c = v^2/r$ se desprende que el radio debe disminuir de forma constante. Por tanto, describiría un movimiento en espiral hacia el centro, con un módulo de velocidad constante.

En el segundo caso, si la aceleración es constante, también lo será el radio, por lo que el movimiento será circular y uniforme.

14 **La figura representa la aceleración total, en un instante determinado, de una partícula que describe circunferencias de 3 m de radio. Calcula, en ese instante la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial.**



a) La aceleración centrípeta, según se desprende de la figura, valdrá: $a_c = a \; \cos \; 30° = 12{,}99 \;\; \text{m / s}^2$.

b) Como $a_c = v^2/r$, entonces, dado que conocemos el valor de a_c y de r, obtenemos que:

$$v = 6{,}24 \text{ m/s}$$

c) La aceleración tangencial será:

$$a_t = a \;\; sen \;\; 30° = 7{,}5 \;\; \text{m / s}^2$$

15 **Dado el vector velocidad:**

$$\vec{v} = 3t \;\; \vec{i} + 4t \;\; \vec{j}$$

Calcula:

a) **La aceleración tangencial.**

b) **La aceleración normal.**

c) **El radio de curvatura.**

a) La aceleración tangencial, por definición, se obtiene derivando el módulo de la velocidad, que viene dado por:

$$r = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = \sqrt{25t^2} = 5t$$

Derivando el módulo de la velocidad, obtenemos la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 5\text{m / s}^2$$

b) y c) Si calculamos el vector aceleración total (derivando v), obtenemos que:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \;\; \text{m / s}^2$$

Es, por tanto, constante y su módulo resulta ser también de 5 m/s². Es decir, la única aceleración existente es la aceleración tangencial; al no haber aceleración centrípeta tampoco hay radio de curvatura.

16 **Un cuerpo se mueve describiendo círculos de radio *r* con valor de velocidad *v*. Al cabo de cierto tiempo, se observa que tanto el valor de la velocidad como el ra-**

dio se han duplicado. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) **Su aceleración centrípeta no ha cambiado.**

b) **Su aceleración centrípeta se ha duplicado.**

c) **Su aceleración centrípeta se ha reducido a la mitad.**

Al duplicarse el valor de la velocidad y el radio, la aceleración centrípeta se duplica con respecto a la original. Por tanto, la única propuesta cierta es la *b)*.

Análisis gráficos de movimientos

17 **¿Qué indica el área sombreada de la figura? ¿Qué tipo de movimiento representa? ¿Cuánto valdría su aceleración?**

Se trata de un rectángulo cuya área se obtendría multiplicando la altura (valor de velocidad) por la base (tiempo). Así, el área = *vt* representaría el espacio recorrido por el cuerpo.

El movimiento representado en la gráfica sería un movimiento que transcurre con módulo de velocidad constante.

Dado que la gráfica representa el valor de la velocidad (módulo) frente al tiempo, no podemos asegurar que la aceleración sea cero. Para poderlo hacer, hubiese sido necesario que en el eje de ordenadas se representara el vector velocidad. Así pues, nada podemos afirmar acerca de la existencia o no de aceleración. Lo único que podríamos decir es que, si hubiese aceleración, sería centrípeta.

Esta cuestión debe servir para que los alumnos y alumnas reflexionen una vez más sobre la importancia de distinguir entre módulo y vector.

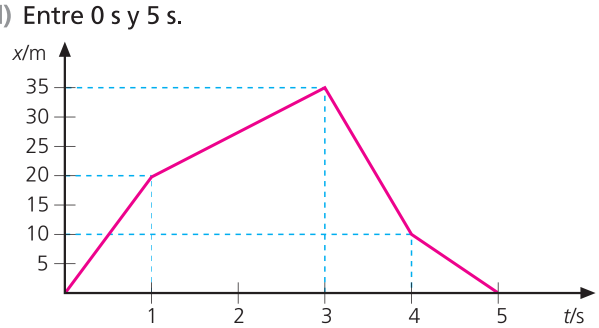
18 **La gráfica de la figura muestra el desplazamiento en función del tiempo para un cuerpo que se mueve a lo largo del eje X. Halla las velocidades medias en los siguientes intervalos:**

a) **Entre 0 s y 1 s.**

b) **Entre 0 s y 4 s.**

c) **Entre 1 s y 5 s.**

d) **Entre 0 s y 5 s.**



a) Entre 0 y 1 s: $v_m = \dfrac{x_1 - x_0}{t} = \dfrac{20 - 0}{1} = 20 \text{ m/s}$

b) Entre 0 y 4 s: $v_m = \dfrac{10 - 0}{4} = 2{,}5 \text{ m/s}$

c) Entre 1 y 5 s: $v_m = \dfrac{0 - 20}{4} = 2{,}5 \text{ m/s}$

d) Entre 0 y 5 s: $v_m = 0 \text{ m/s}$

Análisis numéricos de movimientos

19 **La ecuación de posición de un móvil viene dada por:**

$$\vec{r} = 4t^2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} \text{ m}$$

Razona y calcula:

a) **¿En qué dirección se mueve?**

b) **¿Cuánto se ha desplazado y cuál ha sido su velocidad media en los 10 primeros segundos?**

c) **¿Qué velocidad lleva a los 10 s?**

d) **¿Cuánto vale su aceleración? ¿Qué tipo de movimiento lleva?**

a) La única componente variable del vector de posición es la componente X, por lo que esa es la dirección del movimiento.

b) $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 10) - \vec{r}(t = 0) = 400\vec{i} \text{ m}$

c) $\vec{v} = \dfrac{\vec{r}}{\vec{t}} = 40\vec{i} \text{ m/s}$

d) La velocidad en cualquier instante es $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{d\vec{t}} = 8t\vec{i} \text{ m/s}$ lo que en $t = 10$ s, vale $80\vec{i}$ m/s.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad, $8t\vec{i}$ m/s. Por tanto, su movimiento es rectilíneo (en la dirección *X*) y con aceleración constante.

20 **En la tabla se muestra las coordenadas x, y, z (en metros) de una partícula en función del tiempo (en segundos):**

$\vec{r}$ (m) \ *t* (s)	0	1	2	3	4	5
x	2	2	2	2	2	2
y	0	2	4	6	8	10
z	0	1	4	9	16	25

a) **Determina su vector de posición en función del tiempo.**

b) **¿Cuál es el vector desplazamiento a los 5 s?**

c) **¿Cuántos metros ha recorrido en esos 5 s?**

d) **Representa las gráficas $v - t$ y $a - t$ en el intervalo de tiempo que aparece en la tabla.**

a) Analizando la variación temporal de cada coordenada, obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \text{ m} \\ y &= 2t \text{ m} \\ z &= t^2 \text{ m} \end{aligned}\right\} \vec{r} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k} \text{ m}$$

b) $\Delta\vec{r}(\text{entre } 0 \text{ y } 5 \text{ s}) = \vec{r}(5) - \vec{r}(0) =$

$= (2\vec{i} + 10\vec{j} + 25\vec{k}) - 2\vec{i} = 10\vec{j} + 25\vec{k} \text{ m}$

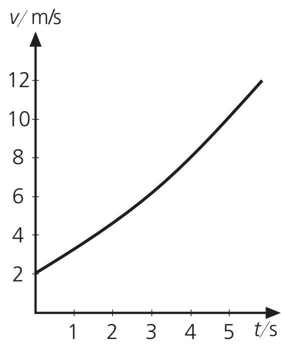
c) El valor del desplazamiento efectuado en ese tiempo es el módulo del vector calculado en el apartado anterior, esto es: 26,92 m

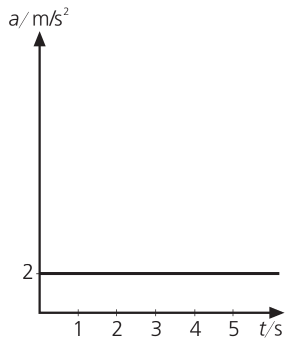
d) Para representar las gráficas, calculamos los módulos de la velocidad en $t = 0$, 1, 2, 3, 4 y 5 s, a partir de la ecuación de velocidad, $\vec{v} = 2\vec{j} + 2t\ \vec{k}$ m, de donde resulta:

$v(0) = 2$ m/s $v(1) = 2{,}8$ m/s $v(2) = 4{,}5$ m/s
$v(3) = 6{,}3$ m/s $v(4) = 8{,}2$ m/s $v(5) = 10{,}2$ m/s

Por otra parte, si calculamos la aceleración, obtenemos que $\vec{a} = 2\vec{k}$ m / s²; es, por tanto, constante.

Representando los valores obtenidos:





21 **La ecuación de movimiento de cierto cuerpo en el plano XY viene dada por la ecuación:**

$$\vec{r} = 4\ \cos\ 3t\ \vec{i} + 4\ \text{sen}\ 3t\ \vec{j}\ \text{m}\ (t\ \text{en segundos})$$

a) **Demuestra que la trayectoria de dicha partícula es una circunferencia centrada en el origen (0, 0) de $r = 4$ m.**

b) **Determina los vectores velocidad y aceleración.**

c) **Demuestra que el vector aceleración siempre apunta hacia el centro y que el módulo de dicha aceleración cumple la igualdad $|a| = |v|^2/r$.**

a) Las componentes x e y de la ecuación de posición son:

$$x = 4\cos 3t$$

$$y = 4\ \text{sen}\ 3t$$

Elevando ambas componentes al cuadrado y sumándolas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 4^2\ (\cos^2 3t + \text{sen}^2\ 3t)$$

de donde se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio 4 m centrada en el origen.

b) La velocidad se obtiene derivando el vector de posición, obteniéndose:

$$\vec{v} = -12\ \text{sen}\ 3t\ \vec{i} + 12\ \cos\ 3t\ \vec{j}\ \text{m / s}$$

siendo la aceleración:

$$\vec{a} = -36\ \cos\ 3t\ \vec{i} - 36\ \text{sen}\ 3t\ \vec{j}\ \text{m / s}^2$$

c) Como puede observarse, el vector $\vec{a}$ equivale a $-9\vec{r}$, por lo que es opuesto a este, apuntando hacia el centro.

d) El módulo de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-36\ \cos\ 3t)^2 + (-36\ \text{sen}\ 3t)^2} = 36\ \text{m / s}^2$$

Mientras que el módulo de la velocidad al cuadrado es:

$$|\vec{v}|^2 = (-12\ \cos\ 3t)^2 + (-12\ \text{sen}\ 3t)^2 = 144\ \text{m / s}$$

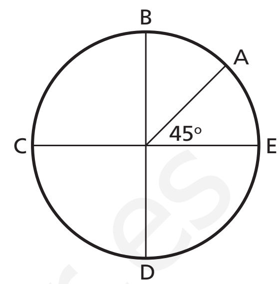
Se comprueba que: $\dfrac{|\vec{v}|^2}{r} = \dfrac{144}{4} = 36\ \text{m / s}^2$

22 **La posición de un cuerpo en función del tiempo viene dada por la expresión**

$$r = 10\ \cos\ 2t\ \vec{i} + 10\ \text{sen}\ 2t\ \vec{j}\ (\text{metros}),$$

donde el argumento del seno y del coseno se expresa en radianes y el tiempo en segundos.

a) **Demuestra que se trata de un movimiento circular y calcula su radio.**



b) **Determina en qué instantes pasa por las posiciones A, B, C, D y E.**

c) **Calcula el desplazamiento entre las posiciones A y C, vectorialmente y en módulo, así como el espacio recorrido entre dichas posiciones.**

d) **Determina la expresión vectorial de la velocidad en función del tiempo y halla su módulo o valor. ¿Depende dicho valor del tiempo?**

e) **Determina la expresión vectorial de la aceleración en función del tiempo y halla su módulo o valor. ¿Depende dicho valor del tiempo?**

a) La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. En nuestro caso:

$$x^2 + y^2 = 100\ (\cos^2 2t + \text{sen}^2\ 2t) = 100$$

de modo que el radio es de 10 m.

b) Las posiciones A,B,C,D y E corresponden a ángulos de $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ y 2π radianes, respectivamente. Igualando el argumento $2t$ del seno o coseno a cada uno de esos valores, se obtienen los valores de tiempo correspondientes, resultando:

$t_A = 0{,}39$ s ; $t_B = 0{,}78$ s ; $t_C = 1{,}57$ s ; $t_D = 2{,}35$ s ; $t_E = 3{,}14$ s

Obviamente, el último valor correspondiente a la posición E también podría ser 0, al ser E la posición inicial del movimiento.

c) El vector desplazamiento entre A y C es el que resulta de restar $\vec{r_c} - \vec{r_A}$ siendo:

$$\Delta\vec{r} = -10\ \vec{i} - (5\sqrt{2}\ \vec{i} + 5\sqrt{2}\ \vec{j}) =$$
$$= -17{,}07\ \vec{i} - 7{,}07\ \vec{j}\ \text{m}$$

siendo su módulo igual a:

$$d = 18{,}48\ \text{m}$$

Por su parte, el espacio recorrido desde A hasta C es el arco de circunferencia correspondiente a un ángulo de $3\pi/4$ rad, siendo, por tanto:

$$s = 23{,}56\ \text{m}$$

d) La velocidad la obtenemos derivando la ecuación de posición, de modo que:

$$\vec{v} = -20\,\text{sen}\,2t\ \vec{i} + 20\cos 2t\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

siendo su módulo igual a:

$$v = \sqrt{(-20\,sen\,2t)^2 + (20\cos 2t)^2} = 20\,\frac{m}{s}$$

Como podemos comprobar, el valor de la velocidad no depende del tiempo.

e) Derivando la velocidad, obtenemos la aceleración, de modo que:

$$\vec{a} = -40\cos 2t\ \vec{i} - 40\,sen\,2t\ \vec{j}\ \ m/s^2$$

Resolviendo el módulo de modo similar al expuesto para la velocidad, obtenemos que:

$$a = 40\ m/s^2$$

Puede comprobarse que esta aceleración es centrípeta, pues el valor de la velocidad no cambia, y equivale a v^2/r.

23 Dos cuerpos se mueven en el eje X según las ecuaciones $x_1 = 10$ sen $3t$ m y $x_2 = 10$ cos $3t$ m respectivamente, razona:

a) ¿Entre qué posiciones se mueven dichos cuerpos?

b) Deduce los dos primeros valores del tiempo en que se cruzan. ¿En qué posiciones se cruzan?

c) ¿Qué velocidad lleva cada uno en el primer instante en que se cruzan?

d) ¿Cuánto vale la aceleración que actúa sobre ellos cuando se cruzan por primera vez?

a) Dado que los valores de seno y coseno oscilan entre -1 y $+1$, ambos cuerpos se mueven entre las posiciones -10 y $+10$ m respectivamente.

b) Cuando se cruzan se cumple que $x_1 = x_2$, de modo que:

$$sen\ 3t = cos\ 3t$$

Los ángulos que cumplen la condición de que su seno es igual a su coseno, son $\pi/4$ y $5\pi/4$. Por tanto, los dos primeros valores de tiempo en que se cruzan satisfacen la igualdad:

$$3t_1 = \frac{\pi}{4}\ ;\ 3t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

de modo que:

$$t_1 = 0{,}26\ s\ ;\ t_1 = 1{,}31\ s$$

Sustituyendo el argumento $3t$ por los valores de ángulos citados, podemos comprobar que se cruzan en las posiciones:

$$x_1 = 7{,}07\ m\ ;\ x_2 = -7{,}07\ m$$

c) Las velocidades de cada uno vienen dadas por las derivadas de las ecuaciones de posición. Así pues:

$$v_1 = 30\ cos\ 3t\ m/s\ ;\ v_2 = -30\ sen\ 3t\ m/s$$

Sustituyendo $3t$ por los ángulos en que se cruzan, obtenemos que los valores de velocidad son:

$$v_1 = 21{,}2\ m/s\ ;\ v_2 = -21{,}2\ m/s$$

d) La expresión de la aceleración de cada uno se obtiene derivando la ecuación de velocidad. En consecuencia:

$$a_1 = -90\ m/s^2\ ;\ v_2 = -90\ cos\ 3t\ m/s^2$$

Sustituyendo $3t$ por $\pi/4$, que es el primer ángulo de cruce, obtenemos que la aceleración para ambos es:

$$a = -63{,}6\ m/s^2$$

24 Un cuerpo se mueve en el plano XY según la ecuación:

$$\vec{r} = (2t+5)\ \vec{i} - (3t^2 + 2t)\ \vec{j}\ \ m$$

a) Deduce las expresiones de sus vectores velocidad y aceleración en función del tiempo, así como las de sus respectivos módulos en función del tiempo.

b) Determina la expresión para su aceleración tangencial en función del tiempo.

c) Calcula los valores de la velocidad, la aceleración y la aceleración tangencial en $t = 1$ s.

d) Determina la aceleración centrípeta en $t = 1$ s.

e) Calcula el radio de curvatura en dicho instante.

a) Derivando la ecuación de posición, obtenemos la velocidad:

$$\vec{v} = 2\ \vec{i} - (6t+2)\vec{j}\ \ m/s$$

siendo su módulo:

$$v = \sqrt{36t^2 + 24t + 8}\ \ m/s$$

Del mismo modo, derivando la expresión de la velocidad, obtenemos la aceleración:

$$\vec{a} = -6\vec{j}\ \ m/s^2$$

siendo su módulo igual a 6 m/s².

b) Derivando el módulo de la velocidad como la raíz de una función compuesta, se obtiene la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\,(36t^2 + 24t + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (72t + 24)$$

Que, una vez reorganizado y simplificado, queda:

$$a_t = \frac{18t + 6}{\sqrt{9t^2 + 6t + 2}}\ \ m/s^2$$

c) Sustituyendo $t = 1$ s en los valores de velocidad y aceleración tangencial (la aceleración total es constante e igual a 6 m/s²), obtenemos:

$$v = 8{,}24\ m/s\ ;\ a_t = 5{,}82\ m/s^2$$

d) La aceleración centrípeta es:

$$a_c = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 1{,}46\ \ m/s^2$$

e) El radio de curvatura en dicho instante se obtiene a partir de la expresión de la aceleración centrípeta, de modo que:

$$r = \frac{v^2}{a_c} = 46{,}5\ \ m$$

SOLUCIONES DE LA EVALUACIÓN (página 237)

1. Escribe el vector de posición en función del tiempo de un cuerpo que, partiendo de la posición inicial (2,3), se desplaza 8 m cada segundo en la dirección del eje Y, y 5 m cada segundo en la dirección del eje X. Escribe su vector velocidad. ¿Estaría dicho movimiento dotado de aceleración?

El vector de posición según las condiciones del problema es:

$$\vec{r} = (5t+2)\vec{i} + (8t+3)\ \vec{j}\ \text{m}$$

Derivando la expresión de la posición, se obtiene la de la velocidad:

$$\vec{v} = 5\ \vec{i} + 8\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

Dado que la velocidad no depende del tiempo, el cuerpo no tiene aceleración alguna.

2. ¿Es posible que un cuerpo en movimiento sometido a una aceleración constante tenga en algún momento un desplazamiento neto igual a cero?

Sí, siempre y cuando en el intervalo de tiempo considerado, su posición inicial y final coincidan. Ejemplos de un movimiento de este tipo sería un lanzamiento vertical considerando el intervalo igual al tiempo total de vuelo, o bien un movimiento circular uniforme al cabo de una vuelta completa.

3. Considerando un cuerpo sometido a aceleración constante, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Su trayectoria nunca podrá ser curvilínea.

b) Su velocidad siempre irá en aumento.

c) No pasará dos veces por el mismo punto.

a) Es falsa; en los movimientos parabólicos la aceleración es constante y en los circulares también. Así pues, el requisito es que el vector aceleración actúe en dirección diferente de la del vector velocidad.

b) También es falsa; si la aceleración constante es centrípeta, el valor de la velocidad se mantiene constante. Pero también, en otros casos podría disminuir si la aceleración es opuesta a la velocidad.

c) También es falsa. Tanto en un lanzamiento vertical como en un movimiento circular uniforme, el cuerpo vuelve a pasar por el mismo punto.

4. Un cuerpo se encuentra en reposo en el punto (4, –3, 2). Escribe su vector de posición con respecto a un sistema de referencia centrado en el punto (0, 0, 0). ¿Cómo sería dicho vector de posición si el sistema de referencia estuviera centrado en el punto (2, 2, 2)?

Teniendo en cuenta que, en general:

$$\vec{r} = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_o)\vec{k}$$

En el primer caso, el vector de posición es:

$$\vec{r} = 4\ \vec{i} - 3\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$$

Mientras que en el segundo será:

$$\vec{r}' = 2\ \vec{i} - 5\ \vec{j}$$

5. Escribe los vectores de posición en función del tiempo según los dos sistemas de referencia de la cuestión anterior, teniendo en cuenta que el cuerpo ha comenzado a moverse 3 m cada segundo en la dirección del semieje OX+ y 2 m cada segundo en la dirección del semieje OY–. Deduce cuál sería el vector velocidad y su valor en cada uno de los dos sistemas de referencia citados. ¿Qué conclusión se obtiene?

Según lo expuesto, las coordenadas *x* e *y* varían con el tiempo, desde las posiciones iniciales, según $3t$ en el primer caso y $-2t$ en el segundo. Así pues, los vectores de posición según los sistemas de referencia elegidos serán ahora:

$$\vec{r} = (3t+4)\vec{i} - (2t+3)\vec{j} + 2\ \vec{k}\ \text{m}$$

$$\vec{r}' = (3t+2)\vec{i} - (2t+5)\vec{j}\ \text{m}$$

El vector velocidad en ambos sistemas de referencia es el mismo e igual a: $\vec{v} = 3\ \vec{i} - 2\ \vec{j}$ m/s

En consecuencia, ambos sistemas de referencia son inerciales.

6. Razona si la siguiente afirmación es correcta o no: «la aceleración, en caso de existir, tiene siempre la misma dirección y el mismo sentido que la velocidad».

La afirmación es rotundamente falsa; lo correcto sería decir que la aceleración, en caso de existir, tiene la misma dirección y sentido que la *"variación de la velocidad"* .

7. Un cuerpo se mueve según la ecuación de posición en función del tiempo:

$$\vec{r} = 5\ \cos\ \pi t\ \vec{i} + 5\ \text{sen}\ \pi t\ \vec{j}\ \text{m}$$

a) Describe las características del tipo de movimiento que realiza.

b) Determina las coordenadas (x, y) de los puntos en los que se encontrará en los siguientes instantes: a los 0 s; a los 0,5 s; a 1 s; a 1,5 s y a los 2 s. ¿Qué conclusión obtienes?

c) ¿Cuál es el vector velocidad correspondiente a este movimiento? ¿Y su valor?

Como ya se ha comprobado en problemas anteriores, el cuerpo describe un movimiento circular uniforme.

Sustituyendo los valores de tiempo dados, las coordenadas (x,y) en dichos instantes son:

$t = 0$, (5,0); $t = 0,5$, (0,5); $t = 1$, (–5,0); $t = 1,5$, (0,–5); $t = 2$, (5,0)

Como puede apreciarse, el cuerpo repite posiciones cada 2 s.

El vector velocidad es:

$$\vec{v} = -5\pi\ sen\ \pi t\ \vec{i} + 5\pi\ cos\ \pi t\ \vec{j}\ \text{m/s}$$

Siendo su valor o módulo igual 5π m/s.

8. Razona si un cuerpo que se mueve bajo una aceleración constante perpendicular a su trayectoria puede variar el valor de su velocidad.

Dado que la aceleración es siempre perpendicular a la trayectoria, nunca podrá modificarse el valor de la velocidad, dado que se trata de una aceleración centrípeta.

9. **Un cuerpo se desplaza los primeros 50 km de su trayecto a una velocidad constante de 80 km/h y los siguientes 50 km (en la misma dirección) a otra velocidad constante de 70 km/h. ¿Cuál ha sido su velocidad media en todo el trayecto?**

El desplazamiento total efectuado es de 100 km. El tiempo invertido en cada tramo es:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = 0{,}625 \text{ h} \; ; \; t_2 = \frac{d_2}{v_2} = 0{,}714 \text{ h}$$

En consecuencia, la velocidad media total ha sido de:

$$v = 74{,}68 \text{ km/h}$$

10. **Un péndulo de 0,5 m de longitud es separado 20° de su vertical y soltado. ¿Cuánto vale el desplazamiento máximo de su movimiento? ¿Y el espacio recorrido correspondiente a dicho desplazamiento?**

El desplazamiento máximo es $d = 2L$ sen 20 = 0,34 m. Por otra parte, el espacio recorrido es el arco de circunferencia correspondiente a 40°, que resulta ser de 0,35 m. Como puede apreciarse, al ser un ángulo pequeño, el desplazamiento y el espacio recorrido son prácticamente iguales.

RÚBRICA DE ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

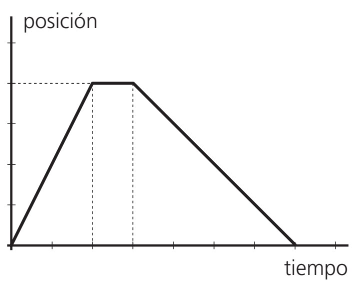
Estándar de aprendizaje evaluable	Herramientas de evaluación (actividades del LA)	Excelente 3	Satisfactorio 2	En proceso 1	No logrado 0	Puntos
1.1 Analiza el movimiento de un cuerpo en función del sistema de referencia elegido.	A: 1	Explica de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
2.1 Describe el movimiento de un cuerpo a partir de su vector de posición en función del tiempo.	A: 2-10 ER: 1 AT: 1-3, 21, 22, 23	Explica de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
4.1 Obtiene las ecuaciones de la velocidad a partir de las de posición en función del tiempo.	A: 11-19 ER: 1-4 AT: 4-8, 17-24	Explica de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
6.1 Describe el movimiento de un cuerpo a partir de su vector de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.		Explica de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
7.1 Obtiene las ecuaciones de la aceleración a partir de las de posición y velocidad en función del tiempo.	A: 20-24 ER: 1,4 AT: 9-16, 19-24	Explica de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Explica los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	

A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas.

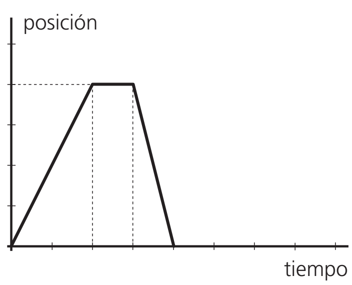
PRUEBA DE EVALUACIÓN A

1. Una persona se desplaza a una velocidad constante. Al cabo de 2 minutos, decide detenerse durante un minuto para regresar posteriormente al punto de partida al doble de velocidad que llevaba a la ida. Razona cuál de las siguientes gráficas representa el movimiento efectuado por dicha persona:

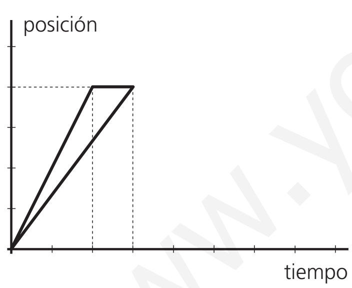
gráfica **A**



gráfica **B**



gráfica **C**



La gráfica correcta es la b), puesto que al regresar con el doble de velocidad que en el trayecto de ida, efectuará el mismo desplazamiento en la mitad de tiempo, situación que recoge dicha gráfica.

2. Un coche se desplaza durante un viaje con los siguientes valores de velocidad:

Intervalo de tiempo (h)	0-1	1-2	2-2,5	2,5-4,5	4,5-6
Valor de velocidad (km/h)	v	$3v$	$2v$	$v/2$	$v/3$

a) ¿Cuál ha sido su velocidad media en el trayecto completo?

b) ¿Qué distancia total ha cubierto si en la primera hora recorrió 40 km?

a) Para calcular la velocidad media en todo el trayecto, es preciso calcular el desplazamiento total y dividirlo entre el tiempo invertido (6 h). El desplazamiento en cada intervalo de tiempo viene dado por $d_i = v_i\,\Delta t_i$, de modo que la velocidad media será:

$$v_{media} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{\Delta t_{total}} =$$

$$= \frac{v \cdot 1 + 3v \cdot 1 + 2v \cdot \frac{1}{2} + \frac{v}{2} \cdot 2 + \frac{v}{3} \cdot \frac{3}{2}}{6} = \frac{13}{12} v$$

b) Llamamos d al desplazamiento efectuado en la primera hora (igual a $v \cdot 1 = v$) y sumamos todos los desplazamientos señalados en al apartado anterior. Se obtiene, así, $d_{total} = 6{,}5 \cdot d = 6{,}5 \cdot 40$ km $= 260$ km.

3. La celeridad de una partícula que se mueve en una circunferencia de 3 m de radio aumenta a una razón constante de 2 m/s². En cierto instante la aceleración total de la partícula es de 6 m/s².

a) Determina la aceleración centrípeta de la partícula en ese instante.

b) Calcula el valor de su velocidad en ese instante.

a) La aceleración tangencial vale 2 m/s², puesto que es la rapidez con que varía la celeridad (módulo de la velocidad). Así pues:

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \Rightarrow \sqrt{a_{total}^2 + a_t^2} = 5{,}66 \text{ m/s}^2$$

b) Dado que $a_c = \frac{v^2}{r}$, entonces $v = \sqrt{a_c r} = 4{,}12$ m/s.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje X viene dada por la ecuación:

$$x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t \text{ m}$$

Determina:

a) Los tiempos en los que la partícula pasa por la posición inicial.

b) La velocidad instantánea de la partícula en cualquier instante.

c) Los tiempos en los que la velocidad es igual a cero.

d) La aceleración instantánea en los tiempos del apartado c).

e) El desplazamiento entre los dos tiempos en que la velocidad es cero.

a) La posición de la partícula puede expresarse como $x(t) = t(t^2 - 3t + 2)$ m, ecuación que equivale a cero para los valores de tiempo $t = 0$ s (posición inicial), $t = 1$ s y $t = 2$ s.

b) La velocidad instantánea en cualquier instante es:

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 3t + 2 \text{ m/s}$$

c) Resolviendo los valores de t que igualan a cero la ecuación anterior, se obtiene $t = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, es decir, $t = 0{,}42$ s y $t' = 1{,}58$ s.

d) La aceleración instantánea es: $a = 6t - 6$ m/s^2, por tanto los valores en los tiempos del apartado anterior son, respectivamente:

$$a = -3{,}48 \text{ m/s}^2$$

$$a' = 3{,}48 \text{ m/s}^2$$

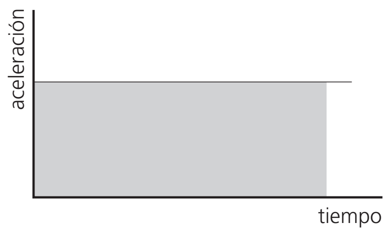
e) Sustituyendo los respectivos valores de t en la ecuación de posición, se obtiene que el desplazamiento en ese intervalo de tiempo es:

$$\Delta x = -0{,}38 - 0{,}38 = -0{,}76 \text{ m}$$

El signo negativo indica que se ha desplazado 0,76 m hacia posiciones situadas en el semieje negativo del eje X.

5. ¿Qué representa el área bajo la recta en la gráfica aceleración-tiempo de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado? Razona tu respuesta.

La zona sombreada bajo la recta es un rectángulo de área $= a \cdot t$. Por tanto, representa la variación de velocidad acontecida en ese intervalo de tiempo.



6. Una partícula se mueve según la ecuación de posición:

$$\vec{r} = 5t^2\vec{i} + 4t\vec{j} \text{ m}$$

Determina:

a) Su velocidad media en los 5 primeros segundos y su módulo.

b) Su velocidad instantánea en $t = 5$ s y su módulo.

c) Su aceleración.

a) Su velocidad media en los cinco primeros segundos es:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_0}{t} = \frac{125\vec{i} + 20\vec{j}}{5} = 25\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m/s}$$

Su valor (módulo) es igual a 25,3 m/s.

b) Derivando la ecuación de posición, se obtiene la velocidad instantánea, con lo que resulta 10 t m/s

Así pues, cuando $t = 5$ s, y su valor o módulo es igual a 50,16 m/s.

c) Derivando la velocidad, obtenemos la aceleración, que resulta ser constante e igual a $10\vec{i}$ m/s^2.

7. Un cuerpo se mueve sobre una circunferencia. Al cabo de media vuelta, ¿cuánto vale su desplazamiento? ¿Qué espacio ha recorrido? Demuestra tus afirmaciones.

Su desplazamiento es igual a $2R$, donde R es el radio de la circunferencia, mientras que el espacio recorrido es igual a πR y resulta, por tanto, mayor que el desplazamiento.

PRUEBA DE EVALUACIÓN B

Señala la respuesta o respuestas correctas en cada uno de los ejercicios:

1. Un cuerpo se desplaza 10 m cada segundo hacia el norte y 3 m cada segundo hacia el este. Si su posición inicial es (0, 2), ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa correctamente la posición en función del tiempo?
   a) $x = (2 + 10t) + 3t$ m
   b) $\vec{r} = (2 + 10)t\vec{i} + 3t\vec{j}$ m
   c) $\vec{r} = 3t\vec{i} + (2 + 10)t\,\vec{j}$ m
2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?
   a) Un movimiento con velocidad constante nunca puede ser circular.
   b) La aceleración, en caso de existir, tiene siempre la misma dirección y sentido que la velocidad.
   c) La velocidad tiene la misma dirección y sentido que el vector posición.
3. Si la ecuación de posición de un cuerpo es $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   a) Su velocidad es $\vec{v} = 2\vec{i}$ m/s.
   b) Se desplaza 20 m en los 10 primeros segundos.
   c) Todas las respuestas anteriores son incorrectas.
4. Si la ecuación de posición de un cuerpo es $\vec{r} = 5\vec{i} + 2t^2\vec{j}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?
   a) Su movimiento transcurre en una recta.
   b) Su aceleración es constante.
   c) Todas las respuestas anteriores son incorrectas.
5. ¿Qué afirmaciones de las siguientes son ciertas para un movimiento cuya aceleración es tangencial y constante?
   a) Recorre los mismos espacios en los mismos intervalos de tiempo.
   b) Es rectilíneo.
   c) Su velocidad nunca podrá ser cero.
6. De un movimiento cuya aceleración constante es siempre perpendicular a la trayectoria podemos decir que:
   a) Su velocidad es constante.
   b) Tiene aceleración tangencial constante.
   c) Pasa por la misma posición en intervalos de tiempo iguales.
7. Si un cuerpo está sometido a aceleración constante, puede decirse que:
   a) Su trayectoria nunca podrá ser curvilínea.
   b) Su velocidad siempre irá en aumento.
   c) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
8. Si un cuerpo se desplaza los primeros 50 km a una velocidad constante de 80 km/h y los siguientes 50 km (en la misma dirección) a otra velocidad constante de 60 km/h, entonces la velocidad media en todo el trayecto es:
   a) 68,57 km/h
   b) 70 km/h
   c) 72,35 km/h