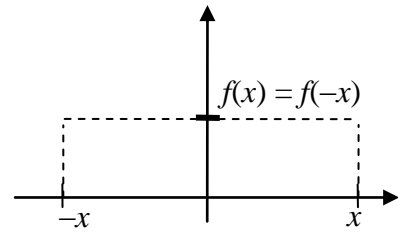


## FUNCIONES PARES E IMPARES

### 1. Función par

**Definición:** Una función  $f$  se dice **par** si  $\forall x \in D(f)$  se verifica:  $f(x) = f(-x)$  (o sea, si para cualquier  $x$  del dominio de la función, es decir, para todos los valores de  $x$  para los que existe imagen, la imagen de  $x$  y la de su opuesto  $-x$  coinciden).

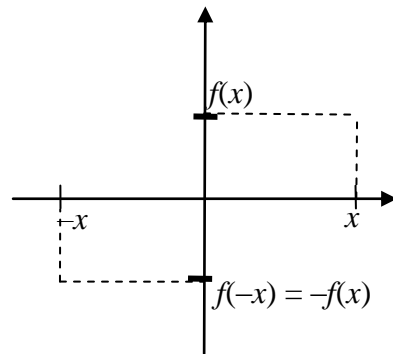
Si nos fijamos en el gráfico, esto significa que la gráfica de la función pasa por los puntos  $(x, f(x))$  y  $(-x, f(-x))$ , que son simétricos respecto del eje OY. Y como esto sucede para todos los  $x$  del dominio de  $f$ , la gráfica de una función par resulta ser simétrica respecto OY.



### 2. Función impar

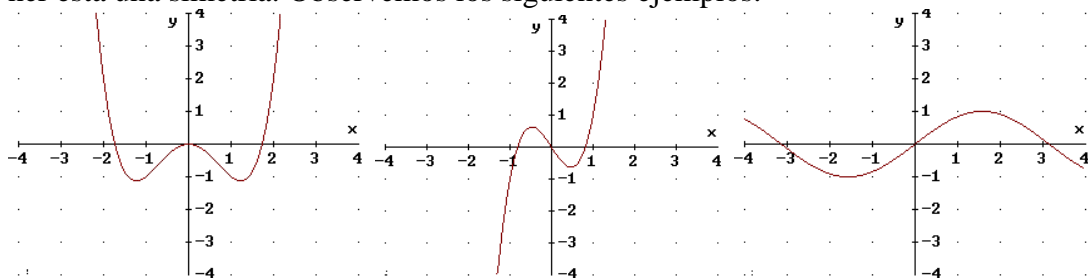
**Definición:** Una función  $f$  se dice **impar** si  $\forall x \in D(f)$  se verifica:  $-f(x) = f(-x)$ .

Analizando el gráfico descubrimos que la gráfica de la función pasa por los puntos  $(x, f(x))$  y  $(-x, f(-x))$ , que son simétricos respecto del punto O. Y como esto sucede para todos los  $x$  del dominio de  $f$ , la gráfica de una función par resulta ser simétrica respecto del origen de coordenadas.



### 3. Ejemplos

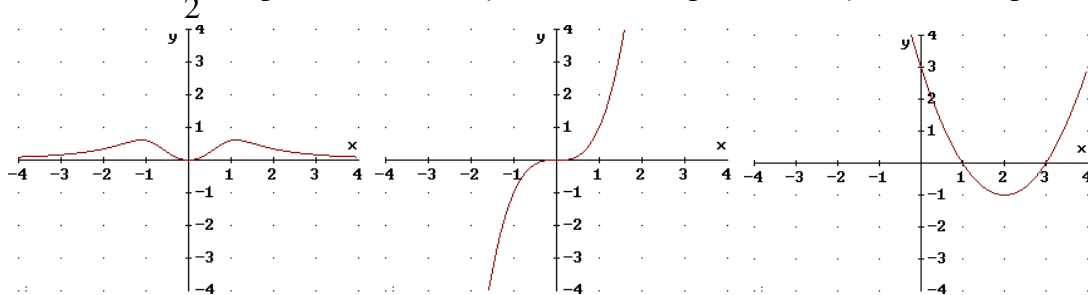
La mayoría de las funciones ni son pares ni impares. Sin embargo, descubrir si una función, dada por su fórmula, es par, impar o ninguna de las dos cosas suele ser bastante fácil y, caso de ser par o impar, nos aporta bastante información sobre la gráfica, al tener ésta una simetría. Observemos los siguientes ejemplos:



$$y = \frac{x^4 - 3x^2}{2} \text{ par}$$

$$y = 3x^3 - 2x \text{ impar}$$

$$y = \text{sen } x \text{ impar}$$



$$y = \frac{3x^2}{2x^4 + 3} \text{ par}$$

$$y = x^3 \text{ impar}$$

$$y = x^2 - 4x + 3 \text{ ni par ni impar}$$

Démonos cuenta de las simetrías de las funciones pares e impares, respecto de OY y de O, respectivamente. Nótese que la última función, al ser parábola, tiene una simetría respecto de su eje  $x = 2$ , pero no es par ni impar.

Otros ejemplos de funciones conocidas: Son pares las funciones  $y = \cos x$ ,  $y = x^2$ . Son impares  $y = 1/x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{arcsen} x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ . No son ninguna de las dos cosas  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$ .

#### 4. Problemas

1) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = \frac{x^4 - 3x^2}{2}$

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{2}; \quad -f(x) = -\frac{x^4 - 3x^2}{2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{2}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 3(-x)^2}{2} = \frac{x^4 - 3x^2}{2} \text{ que coincide con } f(x).$$

Luego, la función es par.

2) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = 3x^3 - 2x$

Antes de comenzar, observemos que  $(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$ . Pues bien:

$$f(x) = 3x^3 - 2x; \quad -f(x) = -(3x^3 - 2x) = -3x^3 + 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = 3[-x^3] + 2x = -3x^3 + 2x = -f(x)$$

En consecuencia, la función es impar.

3) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = \frac{3x^2}{2x^4 + 3}$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^4 + 3}; \quad -f(x) = -\frac{3x^2}{2x^4 + 3} = \frac{-3x^2}{2x^4 + 3}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2}{2(-x)^4 + 3} = \frac{3x^2}{2x^4 + 3} = f(x)$$

Por lo que la función es par.

4) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = x^2 - 4x + 3$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3; \quad -f(x) = -(x^2 - 4x + 3) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 3 = x^2 + 4x + 3, \text{ que no coincide ni con } f(x) \text{ ni con } -f(x).$$

Por ello, esta función no es par ni impar.

5) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}; \quad -f(x) = -\frac{x^3}{2x^2 - 8} = \frac{-x^3}{2x^2 - 8}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 8} = \frac{-x^3}{2x^2 - 8} = -f(x) \Rightarrow \text{Impar.}$$

6) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:  $y = \frac{x^2}{2x - 2}$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}; \quad -f(x) = -\frac{x^2}{2x - 2}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x)-2} = \frac{x^2}{-2x-2} = \frac{x^2}{-(2x+2)} = -\frac{x^2}{2x+2} \text{ que no coincide ni con } f(x)$$

ni con  $-f(x) = -\frac{x^2}{2x-2}$ , por lo que no es par ni impar.

7) Decir si  $y = \frac{3x^5}{3x^3 - 2x}$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \frac{3x^5}{3x^3 - 2x}; \quad -f(x) = -\frac{3x^5}{3x^3 - 2x} = \frac{-3x^5}{3x^3 - 2x}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^5}{3(-x)^3 - 2(-x)} = \frac{-3x^5}{-3x^3 + 2x} = \frac{-3x^5}{-(3x^3 - 2x)} = \frac{3x^5}{3x^3 - 2x}$$

Como consecuencia,  $f(x) = f(-x)$ , por lo que estamos ante una función par.

8) Estudiar si  $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}; \quad -f(x) = -\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Rightarrow \text{es } \boxed{\text{Par}}, \text{ ya que } f(-x) = f(x) \quad \forall x.$$

9) Estudiar si  $y = \text{sen } 4x$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \text{sen } 4x; \quad -f(x) = -\text{sen } 4x$$

$$f(-x) = \text{sen } 4(-x) = \text{sen } (-4x) =$$

Como  $g(x) = \text{sen } x$  es una función *impar*, se tiene que:  $\forall t, g(-t) = -g(t)$ , es decir:  $\text{sen } (-t) = -\text{sen } t$ . Por tanto,  $\text{sen } (-4x) = -\text{sen } 4x$ :

$$= -\text{sen } 4x = -f(x)$$

Luego lo que tenemos es una función impar.

10) Estudiar si  $y = \text{sen } (4x + 1)$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \text{sen } (4x + 1); \quad -f(x) = -\text{sen } (4x + 1)$$

$$f(-x) = \text{sen } (4(-x) + 1) = \text{sen } (-4x + 1) = \text{sen } [-(4x - 1)] = -\text{sen}(4x - 1)$$

(el último paso es porque  $\text{sen } x$  es *impar*, a semejanza de lo hecho en el ejercicio anterior. Como no coincide con ninguna de las anteriores  $\Rightarrow$  Ni par ni impar).

11) Estudiar si  $y = \text{sen } (4x^2 + 1)$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \text{sen } (4x^2 + 1); \quad -f(x) = -\text{sen } (4x^2 + 1)$$

$$f(-x) = \text{sen } (4(-x)^2 + 1) = \text{sen } (4x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow \text{es } \underline{\text{par}}.$$

12) Estudiar si  $y = \text{cos } 4x$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \text{cos } 4x; \quad -f(x) = -\text{cos } 4x$$

$$f(-x) = \text{cos } 4(-x) = \text{cos } (-4x) =$$

Como  $g(x) = \text{cos } x$  es una función *par*, se tiene que:  $\forall t, g(-t) = g(t)$ , es decir:  $\text{cos } (-t) = \text{cos } t$ . Por tanto,  $\text{cos } (-4x) = \text{cos } 4x$ :

$$= \text{cos } 4x = f(x)$$

Luego lo que tenemos es una función par.

13) Estudiar si  $y = \text{cos } (4x + 1)$  es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \text{cos } (4x + 1); \quad -f(x) = -\text{cos } (4x + 1)$$

$$f(-x) = \cos(4(-x) + 1) = \cos(-4x + 1) = \cos[-(4x - 1)] = \cos(4x - 1)$$

El último paso se hace usando que  $\cos x$  es par, de forma similar a como se procedió en el ejercicio anterior. Como no coincide con ninguna de las anteriores  $\Rightarrow$  Ni par ni impar.

14) Estudiar si  $y = \cos(4x^2 + 1)$  es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \cos(4x^2 + 1); \quad -f(x) = -\cos(4x^2 + 1)$$

$$f(-x) = \cos(4(-x)^2 + 1) = \cos(4x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow \text{es } \underline{\text{par}}.$$