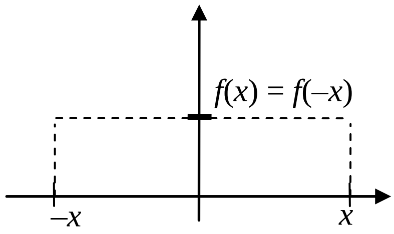
FUNCIONES PARES E IMPARES

1. Función par

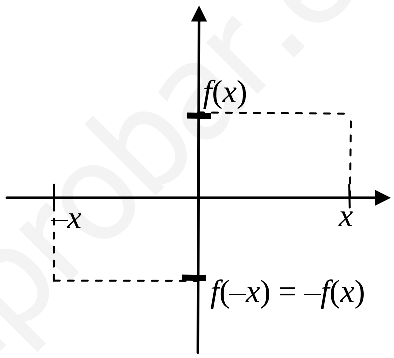
<u>Definición</u>: Una función f se dice <u>par</u> si $\forall x \in D(f)$ se verifica: $f(x) = f(-x)$ (o sea, si para cualquier x del dominio de la función, es decir, para todos los valores de x para los que existe imagen, la imagen de x y la de su opuesto $-x$ coinciden).



Si nos fijamos en el gráfico, esto significa que la gráfica de la función pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$, que son simétricos respecto del eje OY. Y como esto sucede para todos los x del dominio de f, <u>la gráfica de una función par resulta ser simétrica respecto OY</u>.

2. Función impar

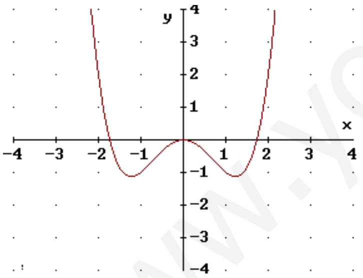
<u>Definición</u>: Una función f se dice <u>impar</u> si $\forall x \in D(f)$ se verifica: $-f(x) = f(-x)$.



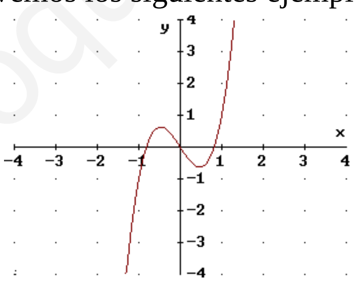
Analizando el gráfico descubrimos que la gráfica de la función pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$, que son simétricos respecto del punto O. Y como esto sucede para todos los x del dominio de f, <u>la gráfica de una función par resulta ser simétrica respecto del origen de coordenadas</u>.

3. Ejemplos

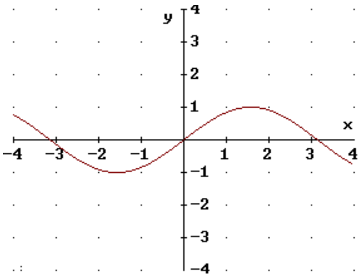
La mayoría de las funciones ni son pares ni impares. Sin embargo, descubrir si una función, dada por su fórmula, es par, impar o ninguna de las dos cosas suele ser bastante fácil y, caso de ser par o impar, nos aporta bastante información sobre la gráfica, al tener ésta una simetría. Observemos los siguientes ejemplos:



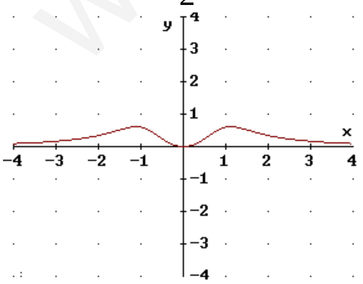
$y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{2}$ par



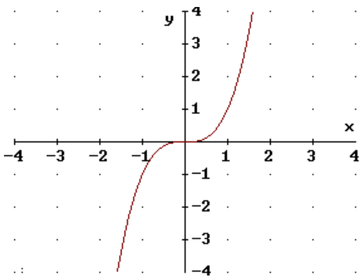
$y = 3x^3 - 2x$ impar



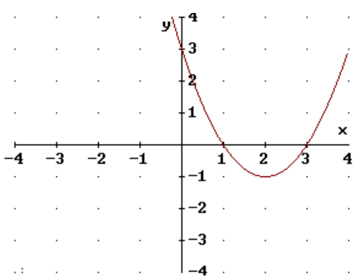
$y = \operatorname{sen} x$ impar



$y = \dfrac{3x^2}{2x^4 + 3}$ par



$y = x^3$ impar



$y = x^2 - 4x + 3$ ni par ni impar

Démonos cuenta de las simetrías de las funciones pares e impares, respecto de OY y de O, respectivamente. Nótese que la última función, al ser parábola, tiene una simetría respecto de su eje $x = 2$, pero no es par ni impar.
Otros ejemplos de funciones conocidas: Son pares las funciones $y = \cos x$, $y = x^2$. Son impares $y = 1/x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \operatorname{arctg} x$. No son ninguna de las dos cosas $y = e^x$, $y = \ln x$.

4. Problemas

1) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{2}$

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{2}; \qquad -f(x) = -\frac{x^4 - 3x^2}{2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{2}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 3(-x)^2}{2} = \frac{x^4 - 3x^2}{2} \text{ que coincide con } f(x).$$

Luego, la función es par.

2) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = 3x^3 - 2x$
Antes de comenzar, observemos que $(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$. Pues bien:

$$f(x) = 3x^3 - 2x; \qquad -f(x) = -(3x^3 - 2x) = -3x^3 + 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = 3[-x^3] + 2x = -3x^3 + 2x = -f(x)$$

En consecuencia, la función es impar.

3) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = \dfrac{3x^2}{2x^4 + 3}$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^4 + 3}; \qquad -f(x) = -\frac{3x^2}{2x^4 + 3} = \frac{-3x^2}{2x^4 + 3}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2}{2(-x)^4 + 3} = \frac{3x^2}{2x^4 + 3} = f(x)$$

Por lo que la función es par.

4) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = x^2 - 4x + 3$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3; \qquad -f(x) = -(x^2 - 4x + 3) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 3 = x^2 + 4x + 3, \text{ que no coincide ni con } f(x) \text{ ni con } -f(x).$$

Por ello, esta función no es par ni impar.

5) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = \dfrac{x^3}{2x^2 - 8}$

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}; \qquad -f(x) = -\frac{x^3}{2x^2 - 8} = \frac{-x^3}{2x^2 - 8}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 8} = \frac{-x^3}{2x^2 - 8} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Impar}}.$$

6) Estudiar si es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas: $y = \dfrac{x^2}{2x - 2}$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}; \qquad -f(x) = -\frac{x^2}{2x - 2}$$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{2(-x)-2} = \dfrac{x^2}{-2x-2} = \dfrac{x^2}{-(2x+2)} = -\dfrac{x^2}{2x+2}$ que no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x) = -\dfrac{x^2}{2x-2}$, por lo que no es par ni impar.

7) Decir si $y = \dfrac{3x^5}{3x^3-2x}$ es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \frac{3x^5}{3x^3-2x}; \quad -f(x) = -\frac{3x^5}{3x^3-2x} = \frac{-3x^5}{3x^3-2x}$$

$$f(-x) = \frac{3(-x)^5}{3(-x)^3-2(-x)} = \frac{-3x^5}{-3x^3+2x} = \frac{-3x^5}{-(3x^3-2x)} = \frac{3x^5}{3x^3-2x}$$

Como consecuencia, $f(x) = f(-x)$, por lo que estamos ante una $\boxed{\text{función par}}$.

8) Estudiar si $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}; \quad -f(x) = -\frac{x^2+3}{x^2-4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow \text{ es } \boxed{\text{Par}}\text{, ya que } f(-x) = f(x) \quad \forall x.$$

9) Estudiar si $y = \text{sen } 4x$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \text{sen } 4x$; $\quad -f(x) = -\text{ sen } 4x$

$f(-x) = \text{sen } 4(-x) = \text{sen } (-4x) =$

Como $g(x) = \text{sen } x$ es una función *impar*, se tiene que: $\forall t$, $g(-t) = -g(t)$, es decir: $\text{sen } (-t) = -\text{ sen } t$. Por tanto, $\text{sen } (-4x) = -\text{sen } 4x$:

$= -\text{ sen } 4x = -f(x)$

Luego lo que tenemos es una *función impar*.

10) Estudiar si $y = \text{sen } (4x + 1)$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \text{sen } (4x + 1)$; $\quad -f(x) = -\text{ sen } (4x+ 1)$

$f(-x) = \text{sen } (4(-x) + 1) = \text{sen } (-4x + 1) = \text{sen } [-(4x - 1)] = -\text{ sen}(4x - 1)$

(el último paso es porque $\text{sen } x$ es *impar*, a semejanza de lo hecho en el ejercicio anterior. Como no coincide con ninguna de las anteriores $\Rightarrow$ *Ni par ni impar*.

11) Estudiar si $y = \text{sen } (4x^2 + 1)$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \text{sen } (4x^2 + 1)$; $\quad -f(x) = -\text{ sen } (4x^2+ 1)$

$f(-x) = \text{sen } (4(-x)^2 + 1) = \text{sen } (4x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow$ es par.

12) Estudiar si $y = \cos 4x$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \cos 4x$; $\quad -f(x) = -\cos 4x$

$f(-x) = \cos 4(-x) = \cos (-4x) =$

Como $g(x) = \cos x$ es una función *par*, se tiene que: $\forall t$, $g(-t) = g(t)$, es decir: $\cos (-t) = \cos t$. Por tanto, $\cos (-4x) = \cos 4x$:

$= \cos 4x = f(x)$

Luego lo que tenemos es una *función par*.

13) Estudiar si $y = \cos (4x + 1)$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \cos (4x + 1)$; $\quad -f(x) = -\cos (4x+ 1)$

$f(-x) = \cos(4(-x) + 1) = \cos(-4x + 1) = \cos[-(4x - 1)] = \cos(4x - 1)$

El último paso se hace usando que $\cos x$ es par, de forma similar a como se procedió en el ejercicio anterior. Como no coincide con ninguna de las anteriores $\Rightarrow$ *Ni par ni impar*.

14) Estudiar si $y = \cos(4x^2 + 1)$ es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$f(x) = \cos(4x^2 + 1)$; $-f(x) = -\cos(4x^2 + 1)$

$f(-x) = \cos(4(-x)^2 + 1) = \cos(4x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow$ es par.