Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

<u>Solución:</u>

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero. Dicho de otro modo, la función existe para todos los valores de x para los que el denominador es distinto de cero. En notación matemática:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x+2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -2$, en donde el símbolo "/" significa "tal que"

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

<u>Solución:</u>

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función existe para los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero. En notación matemática:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \geq 0$, en donde el símbolo "/" significa "tal que".

Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 4 \geq 0$.

- Resolvemos la ecuación correspondiente:

  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

- Llevamos las raíces sobre la recta de los números reales:

- Ahora estudiamos el comportamiento de $x^2 - 4 \geq 0$ en las tres zonas que determinan las dos raíces:

  Zona 1:

  Tomamos un x cualquiera de $\mathbb{R}$ comprendido entre $-\infty$ y -2, incluido éste, o lo que es lo mismo en notación matemática: elegimos un $x \in (-\infty, 2]$.

  Así, para x=-3 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual es cierto. Entonces en este intervalo tenemos una solución.

  Zona 2:

  Tomamos un $x \in (-2, 2)$, por ejemplo el cero. Así, para x=0 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 0^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$, lo cual no es cierto. Entonces en este intervalo no hay solución.

  Zona 3:

  Tomamos un $x \in [2, \infty)$, por ejemplo x=3. Así, $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual si es cierto. Ello quiere decir que el intervalo estudiado es una solución de la inecuación.

Conclusión final:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ y } x \geq 2$,
y gráficamente:

3. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

<u>Solución:</u>

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero o cuando el radicando es menor que cero.

Así:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0$

La solución de $x^2 + x - 2 \geq 0$ viene dada por $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

Entonces,
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x^2 + x + 18}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido en los siguientes casos:

a) El radicando que aparece en el numerador es negativo.
b) El denominador es cero.

Es decir:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \ \cup \ x^2 + x + 18 \neq 0$,

tal que:

- $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2]$
- $x^2 + x + 18 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -9 \end{cases}$

Conclusión:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -9) \ \cup (-9, -1) \ \cup (-1, 2)$