INECUACIONES

Una **inecuación** es una **desigualdad** algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

$<$	**menor que**	$2x - 1 < 7$
$\leq$	**menor o igual que**	$2x - 1 \leq 7$
$>$	**mayor que**	$2x - 1 > 7$
$\geq$	**mayor o igual que**	$2x - 1 \geq 7$

La **solución** de una inecuación es el **conjunto de valores de las variables que verifican la inecuación**.

Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas.

Ejemplos de inecuaciones:

INECUACIÓN	TIPO
$2x-3 > x-5$	1^er^ grado; 1 incóg.
$x-3 \geq y$	1^er^ grado; 2 incóg
$x^2-5x \leq 4$	2º grado; 1 incóg.
$xy-3 > 0$	2º grado; 2 incóg.

1. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES. CRITERIOS DE EQUIVALENCIA.

1. **Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número**, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

   $3x + 4 < 5 \qquad 3x + 4 - 4 < 5 - 4 \qquad 3x < 1$

2. **Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo**, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

   $2x < 6 \qquad 2x : 2 < 6 : 2 \qquad x < 3$

3. **Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo**, la inecuación resultante ***cambia de sentido*** y es equivalente a la dada. (Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, resulta otra desigualdad de sentido contrario.)

   $-x < 5 \qquad (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \qquad x > -5$

Por tanto, la resolución de las inecuaciones es *muy parecida a la resolución de las ecuaciones*.

$$2x - 1 < 7 \rightarrow 2x < 8 \rightarrow x < 4$$

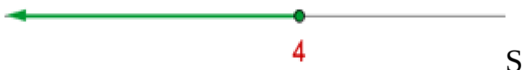
Las dos diferencias fundamentales con una ecuación son:

1. Además de con una desigualdad (x<4), debemos *<u>expresar la solución</u>* de la inecuación mediante:

   - **Una representación gráfica.**
   - **Un intervalo.** S:]-∞**, 4[**

Si cambiamos la desigualdad por cualquiera de la otras tres, la solución se vería modificada de la siguiente forma:

- $2x - 1 \leq 7 \rightarrow 2x \leq 8 \rightarrow x \leq 4$



S:]-∞**, 4]**

- $2x - 1 > 7 \rightarrow 2x > 8 \rightarrow x > 4$

S:]**4, +**∞**[**

- $2x - 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 8 \rightarrow x \geq 4$

S:**[4, +**∞**[**

2. Es muy importante tener en cuenta que **si multiplicamos o dividimos por un número negativo** una inecuación tenemos que **invertir el signo de la desigualdad**.

$$-2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \;\leftrightarrow\; 2x^2 + 3x - 4 \leq 0 \qquad \text{(multiplicamos por } -1)$$

$$-9x < 7 \;\rightarrow\; x > -7/9 \qquad \text{(dividimos entre } -9)$$

2. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Las inecuaciones de 1er grado con una incógnita son las que responden a las siguientes formas básicas:

$$ax + b < 0 \qquad ax + b > 0 \qquad ax + b \leq 0 \qquad ax + b \geq 0 \; (*)$$

Se resuelven despejando la incógnita x, y expresando la solución en forma gráfica y de intervalo.

Al igual que en las ecuaciones, también pueden presentársenos inecuaciones con paréntesis y denominadores. Para resolverlas obtendremos inecuaciones equivalentes a la dada pero con expresiones cada vez más sencillas, hasta llegar a una de las formas conocidas (*).

<u>Ejemplo:</u> Consideremos la inecuación $2 - \left[-2(x+1) - \frac{x-3}{2}\right] \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Para quitar denominadores multiplicamos por el mcm:12:

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)\leq 8x-(5x-3)+36x$$

$$24+24x+24+6x-18\leq 8x-5x+3+36x$$

$$24x+6x-8x+5x-36x\leq 3-24-24+18$$

$$-9x\leq -27$$

Dividimos entre −9, por lo que cambiará el sentido de la desigualdad: $\boxed{x\geq 3}$

Tenemos la solución expresada como una desigualdad, pero también debemos expresarla de forma gráfica:

y como un intervalo: **S=[3, +∞[**

Ejercicios:

1º) Resuelve las siguientes inecuaciones de 1^er^ grado:

a) 6x –3 > 5x – 7, [x>-4]

b) (x - 9) ≤–2 (x–3) + 5, [$x\leq 20/3$]

c) –2 (x–2) + 5 ≤ 4 (2x – 7) – 3. [$x\geq 4$]

d) 6 (2x – 1) – 7 ≤ –2 (5x – 2) + 5x, [$x\leq 1$]

e) $\frac{x+2}{4}-\frac{x-1}{6}<\frac{x+2}{3}-1$, [x>4]

f) $\frac{3}{8}-\frac{x-1}{3}<\frac{x-3}{12}-\frac{2x-5}{8}$,[x>2]

g) $\frac{-x-3}{6}-\frac{x+4}{9}\leq -1-\frac{x+4}{12}$, [$x\geq 2$]

2º) Si un número x verifica las desigualdades $3>2-\frac{x}{3}>-2$, halla el intervalo al que pertenece. ( ]-3,12[ )

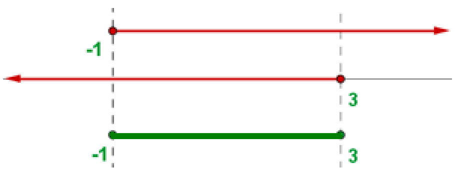
3º) Barriopinto tiene 10.000 habitantes menos que mi barrio, pero los dos juntos no alcanzan la décima parte de la población censada en Alicante: 320.293 habitantes. ¿Cuál es el máximo número de habitantes que puede tener Barriopinto? [Menos de 11.015]

3. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Se resuelve cada inecuación por separado, siendo el conjunto solución del sistema los intervalos comunes (la intersección) de las soluciones de todas las inecuaciones.

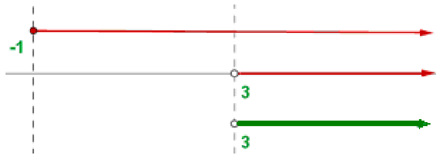
Ejemplos:

1) $\left.\begin{array}{r}2x+3\geq 1\\ -x+2\geq -1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x\geq -2\\ -x\geq -3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x\geq -1\\ x\leq 3\end{array}\right\}$



S=[−1, 3]

2) $\left.\begin{array}{r} 2x+3\geq 1 \\ -x+2<-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x\geq -2 \\ -x<-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq -1 \\ x>3 \end{array}\right\}$



S=]3,+∞[

3) $\left.\begin{array}{r} 2x+3<1 \\ -x+6<3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x<-2 \\ -x<-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x<-1 \\ x>3 \end{array}\right\}$ No tiene solución, S=Ø

Ejercicios:
4º) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{x-1}{2}+3>0 \\ 2x+6\leq 3-x \end{array}\right\}]-5,-1]$

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{1+x}{3}\geq x+1 \\ 2(x-1)\geq 1+\frac{x}{2} \end{array}\right\} Ø$

4. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las inecuaciones de 2º grado con una incógnita son las que se presentan según alguna de las siguientes formas básicas:

$Ax^2+Bx+C<0$ $Ax^2+Bx+C>0$ $Ax^2+Bx+C\leq 0$ $Ax^2+Bx+C\geq 0$

Ejemplo1: Dos raíces reales. Consideremos la inecuación $x^2-6x+8>0$

1º Igualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado.

$x^2-6x+8=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 8}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases} \nearrow x_1=\frac{8}{2}=4 \\ \searrow x_2=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

2º Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo:

$x=0\rightarrow 0^2-6\cdot 0+8>0$
$x=3\rightarrow 3^2-6\cdot 3+8=17-18<0$
$x=5\rightarrow 5^2-6\cdot 5+8=33-30>0$

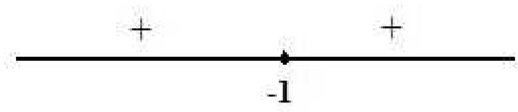
3º La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que exige la desigualdad (en este caso los intervalos con signo positivo):

S=]−∞,2[∪]4,+∞[

Otras desigualdades	Solución
$\mathbf{x^2 - 6x + 8 \geq 0}$	$]-\infty,2]\cup[4,+\infty[$
$\mathbf{x^2 - 6x + 8 > 0}$	$]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$
$\mathbf{x^2 - 6x + 8 \leq 0}$	$[2,4]$
$\mathbf{x^2 - 6x + 8 < 0}$	$]2,4[$

<u>*Ejemplo2:*   Una raíz real</u>. $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$



Toda la recta real es positiva o nula en este caso porque $(x + 1)^2 \geq 0$, luego la solución es **R**

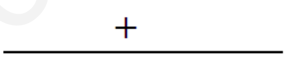
Otras situaciones similares		Solución
$\mathbf{x^2 + 2x + 1 \geq 0}$	$\mathbf{(x + 1)^2 \geq 0}$	$\mathbb{R}$
$\mathbf{x^2 + 2x + 1 > 0}$	$\mathbf{(x + 1)^2 > 0}$	$\mathbb{R} - \{-1\}$
$\mathbf{x^2 + 2x + 1 \leq 0}$	$\mathbf{(x + 1)^2 \leq 0}$	$\mathbf{x = -1}$
$\mathbf{x^2 + 2x + 1 < 0}$	$\mathbf{(x + 1)^2 < 0}$	$\varnothing$

<u>*Ejemplo3:* No tiene raíces reales</u>. $x^2 + x + 1 > 0 \;\rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Cuando no tiene raíces reales significa que el polinomio tiene *el mismo signo en toda la recta real*. Para averiguar cuál es ese signo le damos a x cualquier valor:

- Si el signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es **R** .
- Si el signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución.



S= **R**

Otras desigualdades	Solución
$\mathbf{x^2 + x + 1 \geq 0}$	$\mathbb{R}$
$\mathbf{x^2 + x + 1 > 0}$	$\mathbb{R}$
$\mathbf{x^2 + x + 1 \leq 0}$	$\varnothing$
$\mathbf{x^2 + x + 1 < 0}$	$\varnothing$

<u>**NOTA:**</u> El procedimiento descrito se puede utilizar también en inecuaciones polinómicas de cualquier grado.

<u>*Ejercicios:*</u>

5º) Resuelve las siguientes inecuaciones:

1) $x^2 - 5x + 6 < 0$, $]2,3[$
2) $2x^2 - x + 3 \geq 0$, R
3) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$, $x=-1/2$
4) $x^2 + 7x < 0$, $]-7,0[$
5) $2x^2 + 3x - 5 < 0$, $]-5/2,1[$
6) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, R
7) $-x^2 - 8x + 9 > 0$, $]-9,1[$
8) $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$, $]-\infty,2/3[\cup]1,+\infty[$
9) $-x^2 + 6x - 9 > 0$, $\varnothing$

5. INECUACIONES RACIONALES

Las inecuaciones racionales siempre deben tener en el segundo miembro un cero, y se resuelven estudiando el signo tanto del numerador como del denominador de la fracción. Su resolución es similar a las de segundo grado, pero hay que tener presente que el denominador no puede ser cero.

<u>*Ejemplo:*</u> $\dfrac{2x-4}{x-4} \geq 0$

1º Hallamos las raíces del numerador y del denominador.

$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

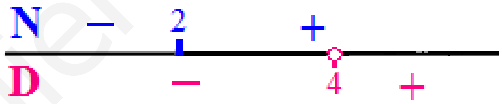
$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

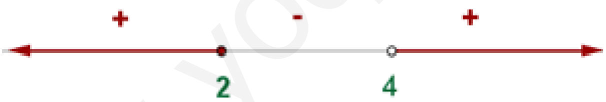
2º Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas. En cuanto a las del numerador, dependerá de que la fracción pueda o no ser cero. En este caso como la desigualdad es ≥ 0, la fracción y, por tanto, el numerador sí pueden ser cero, y la raíz del numerador x=2 sí pertenece a la solución.

3º Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo del numerador, del denominador y de toda la fracción:

$$N \begin{cases} x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 4 = -4 \\ x = 3 \rightarrow 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} x = 0 \rightarrow 0 - 4 = -4 \\ x = 5 \rightarrow 5 - 4 = 1 \end{cases}$$





4º La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) en los que la fracción polinómica tenga el signo que exija la desigualdad de la inecuación.

$S = (-\infty, 2] \cup (4, +\infty)$

<u>*Ejercicio:*</u>

6º) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{2x-5}{6+2x} < 0$,]-3,5/2]

b) $\dfrac{-5}{3x+4} \leq 0$,]-4/3,+∞[

c) $\dfrac{x+2}{x^2-4x} > 0$,]-2,0[∪]4,+∞[

d) $\dfrac{10+x-2x^2}{5x-5} \leq 0$, [-2,1[∪[5/2,+∞[

e) $\dfrac{x^2-x-2}{-x^2-3x} \geq 0$,]-3,-1]∪]0,2]

f) $\dfrac{3x^2-4x+7}{3-x} > 0$,]-∞,3[

6. INECUACIOES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Recuerda que una ecuación con dos incógnitas de la forma **ax+by+c = 0** tiene infinitas soluciones, que son todos los pares de valores (x,y) que la cumplen. Gráficamente si representamos en el plano de coordenadas esos infinitos puntos, resulta una recta.

Las inecuaciones de 1^er^ grado con dos incógnitas son las de alguna de las siguientes formas básicas:

$\boldsymbol{ax + by + c < 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{ax + by + c \leq 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$

Para resolverlas se hace la gráfica de la recta $ax + by + c = 0$, y se busca cuál es la zona del plano donde $ax+by + c$ tiene el signo que se pide en cada caso.

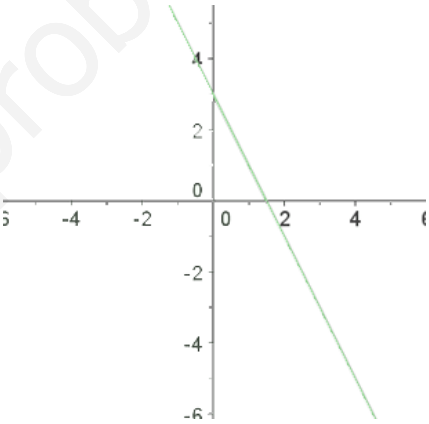
Su solución es uno de los semiplanos que resulta la recta de ecuación $ax + by + c = 0$

Ejemplo1: $2x + y \leq 3$

Transformamos la desigualdad en igualdad: $2x + y = 3$.

Para representar esta recta basta con obtener dos puntos:

x	y
0	3
1	1

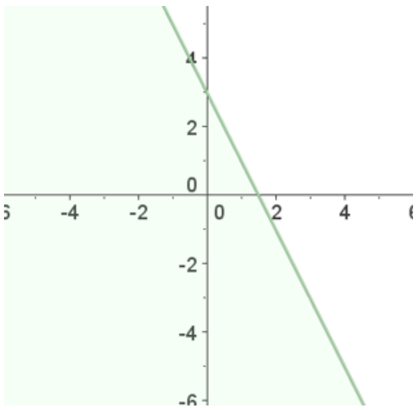


Tomamos un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo el (0, 0) y lo sustituimos en la desigualdad. Si la cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la cumple la solución será el otro semiplano.

(0,0) en $2x + y \leq 3 \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3$, Sí**;**

luego el semiplano que contiene al (0,0) es la solución de la inecuación.

Daremos la solución sólo de forma gráfica, pintando el semiplano correspondiente. Si la propia recta es solución (como en este caso), se pintará con trazo continuo.

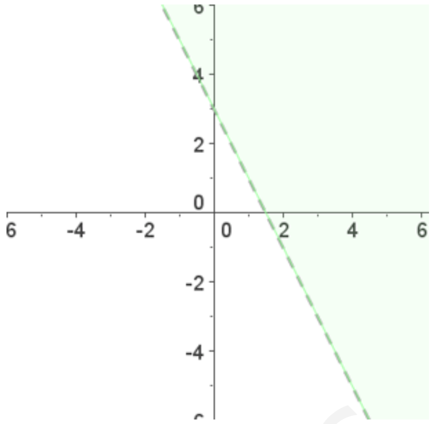


Ejemplo2: $2x + y > 3 \rightarrow 2x + y = 3$

La recta es la misma que en el ejemplo anterior, pero ahora, al sustituir el punto (0,0)

$2 \cdot 0 + 0 > 3 \rightarrow 0 > 3$ No.

En este caso la solución es el semiplano que no contiene al punto (0,0) y, además, como la desigualdad es estricta, la recta no formará parte de la solución, y lo indicaremos con trazo discontinuo.



7. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

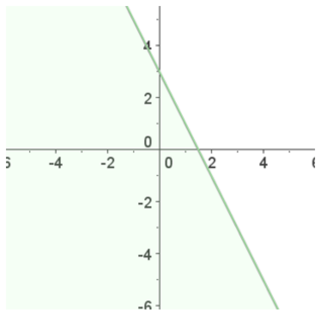
Resolver un sistema de dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas consiste en hacer las correspondientes gráficas en un mismos sistema de referencia, así observaremos más fácilmente la *región común a todas las inecuaciones*, que será la *solución del sistema*.

La solución a este sistema es la intersección de las regiones que corresponden a la solución de cada inecuación.

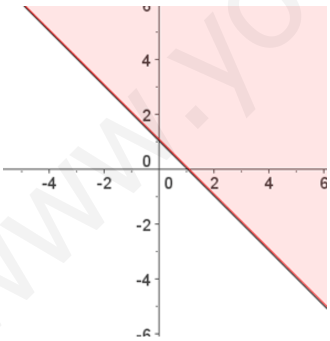
Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

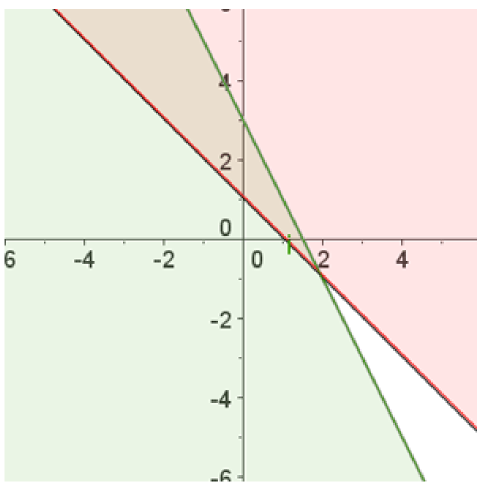
Representamos la recta $2x + y = 3$ **y** pintamos la región solución de la primera inecuación.



Representamos la recta $x + y = 1$ y pintamos la **r**egión solución de la segunda inecuación.



La solución es la intersección de las regiones soluciones.
La solución del sistema será el conjunto de puntos que son al mismo tiempo solución de ambas inecuaciones (en el gráfico corresponde a la zona doblemente pintada).



Ejercicios:

7º) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

1. $\left.\begin{array}{l} 2x+y>5 \\ 3x-y\geq 0 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} x\geq 2 \\ y\geq 4 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} x-2y-3>0 \\ 2x-y+6\leq 0 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} -x+4y<3 \\ 2x-3y\leq -1 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 3x-2y\leq 13 \\ x-5y\geq 0 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 1 \\ \frac{x+1}{2}<\frac{3}{2}+y \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 3x-y<0 \\ x+y<6 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} x<5 \\ x+y-2\geq 0 \\ 3x-\frac{5(y+1)}{2}<0 \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} 4x+12y\leq 120 \\ 4x\leq 3y \\ x>7 \end{array}\right\}\varnothing$

10. $\left\{\begin{array}{l} (x+1)\cdot 10+x\leq 6(2x+1) \\ 4(x-10)<-6(2-x)-6x \end{array}\right.$ $[4,7[$

11. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{4}-3>\frac{x}{2}+1 \\ \frac{3x+1}{2}-2(x+1)<1 \end{array}\right\}[\varnothing]$

12. $\left\{\begin{array}{l} x^2-3x>0 \\ x-3x^2<0 \end{array}\right.,$ $]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

13. $\left\{\begin{array}{l} -x^2+5x-4\leq 0 \\ x^2-3x-4>0 \end{array}\right.$

8º) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(x-2)(x+3)\leq x(x-1)-8$

b) $10x-9(2x+1)-3x>5(x-5)$

c) $\frac{2x+1}{3}<\frac{-x+2}{4}-2$

d) $\frac{x-7}{6}>\frac{x}{4}-\frac{x+2}{3}-1$

e) $\frac{x-3}{2}+4<\frac{x+9}{3}$

f) $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1\leq x$

g) $x^2-x-6>0$

h) $2x^2+x+3<0$

i) $x^2+2x+1\geq 0.$

j) $-x^2+4x-7<0$

k) $\frac{3x^2}{4}+8x<5x^2$

l) $\frac{x}{5}\left(x+\frac{1}{6}\right)\geq x-1$

m) $(5x-3)^2-11(4x+1)>1,$ $]-\infty,-1/25[\cup]3,+\infty[$

n) $(x-1)^2-(x+2)^2+3x^2<-7x+1$

o) $\frac{(x-1)(x+1)}{2}-\frac{x-5}{6}<\frac{2}{3}(x+1)$

p) $\frac{3}{4}(x^2-1)>3x^2+\frac{5}{2}[\varnothing]$

q) $\frac{(3+2x)(x-1)}{3}>\frac{(x-1)^2-1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1+x}{2}$

r) $\frac{1}{3}(2x+3)(x-1)+\frac{1+x}{2}\geq\frac{(x-1)^2}{4}+3$

s) $x^3-x^2-9x+9>0,$ $]-3,1[\cup]3,+\infty[$

t) $x^3-5x^2+8x-4\leq 0$

u) $x^4+12x^3-64x^2>0$

v) $\frac{x^2+2x}{x^2-4x+3}\geq 0,$ $]-\infty,-2[\cup[0,1[\cup]3,+\infty[$

w) $\frac{x^2-1}{-x^2+2x-1}<0$

9º) Un vendedor de ropa recibe una cantidad fija al mes de 480 €, además de un 3% de las ventas que realice. ¿Qué cantidad debe vender para tener un sueldo mensual superior a 1.350 €?[Más de 29000]

10º) Un vendedor recibe una cantidad fija al mes de 600 €, además de un 5% de las ventas que realice. ¿Qué cantidad debe vender para tener un sueldo mensual comprendido entre 1200 y 1500 euros?

11º) Un fabricante quiere mezclar un producto A, que cuesta 40 €/kg, con otro producto B, que cuesta 20 €/kg. La mezcla debe pesar más de 50 kg y el coste no puede superar los 2.000 €. Averigua las cantidades que puede comprar de cada producto.

12º) En una fábrica de televisores se hacen dos modelos A y B. Para atender a sus clientes, deben fabricar entre 200 y 1000 unidades del tipo A y no más de 500 del tipo B, de manera que entre los dos no sobrepasen las 1200 unidades. Representa todas las producciones posibles.

13º) Un laboratorio fabrica los complejos vitamínicos VITAMINOL y ENERGETIC. Cada uno de ellos está compuesto por vitamina A y vitamina B, aunque en diferentes cantidades, como se expresa a continuación:

	A	B
Vitaminol	4 gr	6 gr
Energetic	7 gr	3 gr

Si disponemos de 38 gramos de vitamina A y 42 gramos de vitamina B, dibuja el recinto de las posibles soluciones si fabricamos x cajas de Vitaminol e y cajas de Energetic.

14º) Repartimos varias bolas entre dos cajas. En la caja de la izquierda debe haber menos bolas que en la caja de la derecha, pero en esta no debe haber más del doble que en aquella. No podemos repartir más de 20 bolas. Suponiendo que debe haber alguna bola en cada caja, ¿cuántas bolas podemos tener en cada caja?