APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Introducción

Para resolver los problemas de dinámica utilizamos las leyes de Newton que requieren conocer, dibujar y calcular las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.
En la mayoría de los problemas intervienen las fuerzas de rozamiento y para calcularlas necesitaremos conocer también la fuerza normal (N) que actúa por lo que deberemos calcularlas también.
Muchas de las fuerzas que intervienen en los problemas tienen su fórmula propia (peso, fuerza de rozamiento, etc.) pero otras fuerzas se obtienen aplicando la ley fundamental de la dinámica ($\Sigma F = m\cdot a$) en una determinada dirección y se despejan de la suma de fuerzas (normal, tensión de un cable o cuerda, etc.)
Una vez conocidas todas las fuerzas se vuelve a aplicar $\Sigma F = m\cdot a$ en la dirección del movimiento y calcularemos la aceleración del cuerpo.

Fuerza de rozamiento (F_R)

La fuerza de rozamiento se opone siempre al movimiento, es paralela a la superficie y se debe al contacto entre el cuerpo y la superficie donde se apoya. Depende de la naturaleza de las superficies pero no del área de contacto.
La expresión matemática para calcularla es: $F_R = \mu\cdot N$ siendo N la fuerza normal
El coeficiente de rozamiento se representa por la letra griega "μ" que tiene en cuenta la naturaleza de las superficies que rozan. Existe un μ estático (μ_e) para cuando el cuerpo no se mueve y un μ dinámico o cinético (μ_c) que se utiliza cuando el cuerpo está en movimiento. El μ_e siempre es mayor que el μ_c.

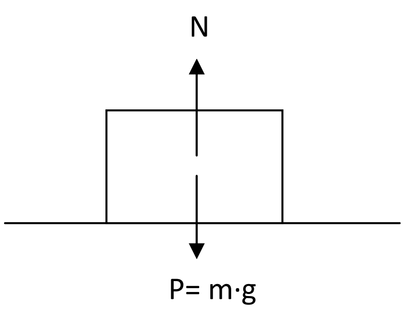
Fuerza Normal (N) y cálculo de F_R y la aceleración en distintas situaciones

La fuerza normal interviene siempre que el cuerpo esté apoyado en una superficie y es la fuerza que ejerce la superficie para sostener al cuerpo. Se dibuja perpendicular (de ahí su nombre) a la superficie y saliendo del cuerpo.

Pueden darse varios casos:

1.- Superficies horizontales:

a) Si no hay fuerzas externas aplicadas sólo actuará el peso y la normal en la dirección normal o perpendicular:



Si aplicamos la 2ª ley en la dirección normal y teniendo:
en cuenta que no hay movimiento en esa dirección (a= 0):

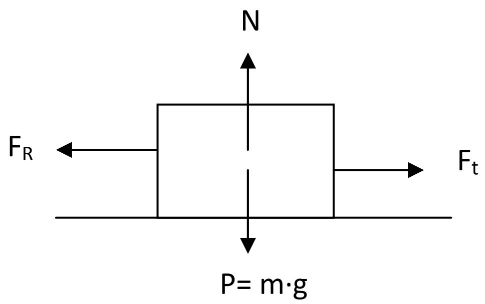
$\Sigma F_n = m\cdot a$ $N - P = 0$ $\boxed{N = P = m\cdot g}$

Si hay fuerzas aplicadas intentando mover el cuerpo pero no se mueve debido al rozamiento, la F_R máxima se calcula:

$\boxed{F_R = \mu_e\cdot N = \mu_e\cdot m\cdot g}$

www.yoquieroaprobar.es

b) Si hay fuerzas que actúan en la dirección del movimiento (dirección tangencial) y son paralelas al plano horizontal ocurre igual que en el caso anterior por la misma explicación:



$\Sigma F_n = m·a \quad N\text{-}P= 0 \quad \boxed{N=P= m·g}$

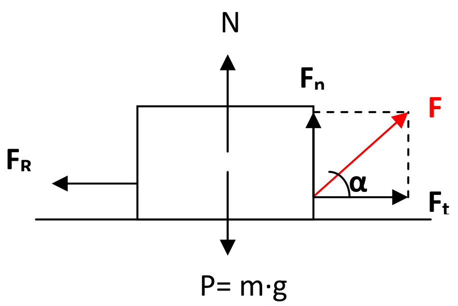
En este caso la fuerza de rozamiento seria:

$\boxed{F_R= \mu_c·N= \mu_c·m·g}$

Para calcular la aceleración del movimiento aplicamos la 2ª ley en la dirección tangencial:

$\Sigma F_t = m·a \quad F_t\text{-} F_R= m·a \quad F_t\text{-} \mu_c·m·g = m·a \quad \boxed{a= \dfrac{F_t\text{-} \mu_c·m·g}{m}}$

c) Si alguna de las fuerzas (F) no actúa en la dirección del movimiento ya no se cumple que N=P



Si aplicamos la 2ª ley en la dirección normal y teniendo en cuenta que no hay movimiento en esa dirección (a= 0):

$\Sigma F_n = m·a \quad N+ F_n\text{-}P= 0 \quad N=P\text{-}F_n$

$\text{sen}\alpha= \dfrac{F_n}{F} \quad F_n= F·\text{sen}\alpha \quad$ luego: $\boxed{N=P\text{-}F·\text{sen}\ \alpha= m·g\text{-} F·\text{sen}\alpha}$

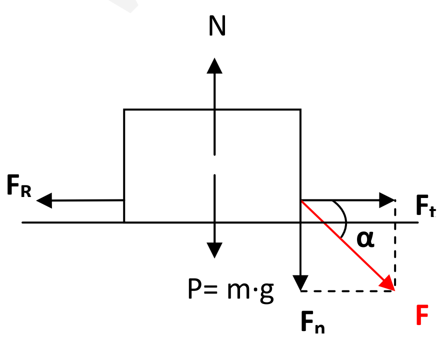
En este caso la fuerza de rozamiento seria: $\boxed{F_R= \mu_c·N= \mu_c·(m·g\text{-} F·\text{sen}\alpha)}$

Para calcular la aceleración del movimiento aplicamos la 2ª ley en la dirección tangencial:

$\Sigma F_t = m·a \quad F_t\text{-} F_R= m·a \quad F·\cos\alpha - \mu_c·(m·g\text{-} F·\text{sen}\alpha)= m·a \quad \boxed{a= \dfrac{F·\cos\alpha - \mu_c·(m·g\text{-} F·\text{sen}\alpha)}{m}}$

$\cos\alpha= \dfrac{F_t}{F} \quad F_n= F·\cos\alpha$

Si la fuerza F actúa con el mismo ángulo pero por debajo de la horizontal:



En este caso:

$\Sigma F_n = m·a \quad N\text{-} F_n\text{-}P= 0 \quad N=P+F_n \quad \boxed{N=P+F·\text{sen}\alpha= m·g+ F·\text{sen}\alpha}$

En este caso la fuerza de rozamiento seria:

$\boxed{F_R= \mu_c·N= \mu = \mu_c·(m·g+ F·\text{sen}\alpha)}$

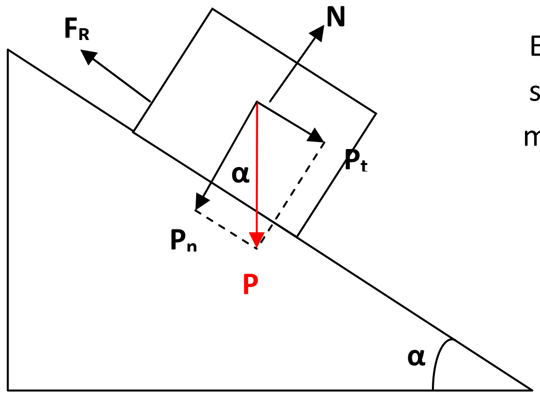
Para calcular la aceleración del movimiento aplicamos la 2ª ley en la dirección tangencial:

$\Sigma F_t = m·a \quad F_t\text{-} F_R= m·a \quad F·\cos\alpha - \mu_c·(m·g+ F·\text{sen}\alpha)= m·a \quad \boxed{a= \dfrac{F·\cos\alpha - \mu_c·(m·g+ F·\text{sen}\alpha)}{m}}$

www.yoquieroaprobar.es

2.- Superficies inclinadas:

a) Si no hay fuerzas externas aplicadas sólo actuará el peso y la normal en la dirección perpendicular, solo que en este caso debemos descomponer el peso en su componente tangencial (P_t) y en su componente normal (P_n):



El ángulo (α) que aparece en la descomposición del peso se debe a la inclinación del plano por ese motivo es el mismo, así pues:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{P_t}{P}$ $\quad P_t = P \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \frac{P_n}{P}$ $\quad P_n = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Si aplicamos la 2ª ley en la dirección normal y teniendo en cuenta que no hay movimiento en esa direcció (a= 0):

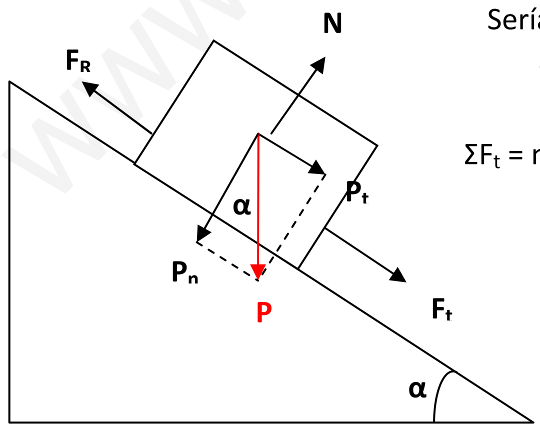
$\Sigma F_n = m \cdot a \quad N - P_n = 0 \quad N = P_n$ $\quad \boxed{N = P_n = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha}$

En este caso la fuerza de rozamiento seria: $\boxed{F_R = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha)}$

Para calcular la aceleración del movimiento aplicamos la 2ª ley en la dirección tangencial:

$\Sigma F_t = m \cdot a \quad P_t - F_R = m \cdot a \quad m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha) = m \cdot a$ $\quad \boxed{a = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha)}{m}}$

b) Si además de las fuerzas anteriores hay fuerzas (F_t) que mueven al cuerpo paralelas al plano:



Sería todo igual que en caso anterior pero en el cálculo de la aceleración debemos incluir la fuerza F_t:

$\Sigma F_t = m \cdot a \quad P_t + F_t - F_R = m \cdot a \quad m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha + F_t - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha) = m \cdot a$

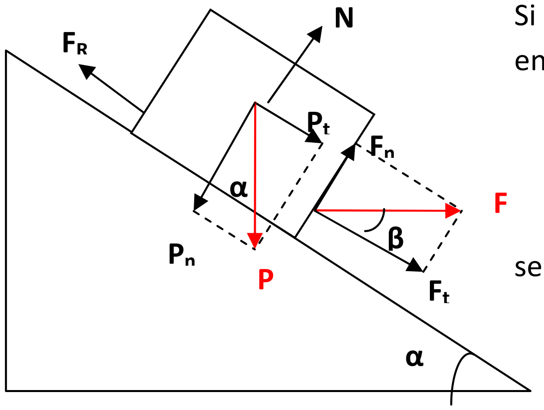
$$\boxed{a = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha + F_t - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha)}{m}}$$

Si el cuerpo ascendiera por la acción de la fuerza F_t entonces la situación de F_R y F_t se ntercambiarían y tendríamos la situación:

$\Sigma F_t = m \cdot a \quad F_t - P_t - F_R = m \cdot a \quad F_t - m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha) = m \cdot a$ $\quad \boxed{a = \frac{F_t - m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha)}{m}}$

www.yoquieroaprobar.es

c) Si la fuerza que mueve al cuerpo forma un ángulo β con la horizontal, entonces debemos descomponerla también y afectará al cálculo de la fuerza normal y del rozamiento como vimos en el caso 1 c)



Si aplicamos la 2ª ley en la dirección normal y teniendo en cuenta que no hay movimiento en esa dirección (a= 0):

$\Sigma F_n = m\cdot a \quad N + F_n - P_n = 0 \quad N = P_n - F_n$

$\text{sen}\beta = \frac{F_n}{F} \quad F_n = F\cdot\text{sen}\beta$ luego $\boxed{N = P_n - F\cdot\text{sen}\,\beta = m\cdot g\cdot\cos\alpha - F\cdot\text{sen}\beta}$

$\cos\alpha = \frac{P_n}{P} \quad P_n = P\cdot\cos\alpha = m\cdot g\cdot\cos\alpha$

En este caso la fuerza de rozamiento seria: $\boxed{F_R = \mu_c\cdot N = \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha - F\cdot\text{sen}\beta)}$

Para calcular la aceleración del movimiento aplicamos la 2ª ley en la dirección tangencial:

$\Sigma F_t = m\cdot a \quad F_t + P_t - F_R = m\cdot a \quad F\cdot\cos\beta + m\cdot g\cdot\text{sen}\alpha - \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha) = m\cdot a$

$\cos\beta = \frac{F_t}{F} \quad F_t = F\cdot\cos\beta$

$$\boxed{a = \frac{F\cdot\cos\beta + m\cdot g\cdot\text{sen}\alpha - \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha)}{m}}$$

Si el cuerpo ascendiera por la acción de la fuerza F_t entonces la situación de F_R y F_t se intercambiarían y tendríamos la situación:

$\Sigma F_t = m\cdot a \quad F_t - P_t - F_R = m\cdot a \quad F\cdot\cos\beta - m\cdot g\cdot\text{sen}\alpha - \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha) = m\cdot a$

$$\boxed{a = \frac{F\cdot\cos\beta - m\cdot g\cdot\text{sen}\alpha - \mu_c\cdot(m\cdot g\cdot\cos\alpha)}{m}}$$

3.- Cuerpos enlazados por cuerdas o cables

En estos problemas tenemos dos cuerpos unidos por una cuerda o cable y aparece una nueva fuerza llamada **Tensión** que se dibuja sobre la cuerda y saliendo de los cuerpos. **Si la masa de la cuerda es despreciable la tensión que actúa es la misma en los dos cuerpos.**

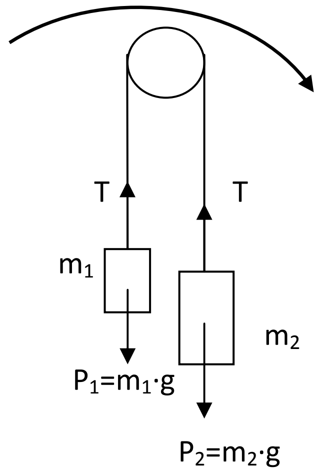
A cada cuerpo se le aplica la segunda ley de la dinámica teniendo en cuenta que **al estar enlazados la aceleración es la misma para los dos**. Una vez calculada La aceleración pasamos a calcular la tensión de la cuerda.

El sentido del movimiento, cuando lo hay, depende de las masas de los cuerpos y las inclinaciones de los planos. En caso de error tomando el sentido del movimiento la aceleración saldrá negativa. En este caso tomamos como sentido del movimiento el contrario al primero.

www.yoquieroaprobar.es

Máquina de Atwood:

Son dos unidos cuerpos que cuelgan de una polea, es el caso más sencillo:



Sentido del movimiento ya que $m_2>m_1$

Aplicando a cada cuerpo la 2ª ley de Newton:

Cuerpo 1: $T-P_1= m_1\cdot a$ $\quad \cancel{T} - m_1\cdot g = m_1\cdot a$ (*)

Cuerpo 2: $P_2-T= m_2\cdot a$ $\quad \underline{m_2\cdot g - \cancel{T} = m_2\cdot a}$ (**)

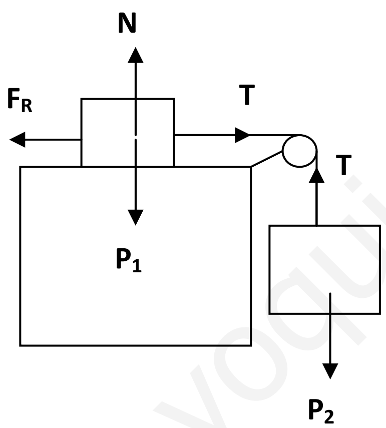
Al sumar las ecuaciones se eliminan las T $\quad m_2\cdot g- m_1\cdot g = m_1\cdot a+ m_2\cdot a$

$$m_2\cdot g- m_1\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a \qquad \boxed{a= \frac{m_2\cdot g- m_1\cdot g}{(m_1 + m_2)}}$$

Una vez calculada la aceleración la sustituimos en (*) o en (**) y calculamos la tensión.

Cuando uno o los dos cuerpos están apoyados en una superficie:

Caso a:



Aplicando a cada cuerpo la 2ª ley de Newton:

Cuerpo 1: $T-F_R= m_1\cdot a$ $\quad \cancel{T} - \mu_c\cdot m_1\cdot g = m_1\cdot a$ (*)

Cuerpo 2: $P_2-T= m_2\cdot a$ $\quad \underline{m_2\cdot g - \cancel{T} = m_2\cdot a}$ (**)

Al sumar las ecuaciones se eliminan las T $\quad m_2\cdot g- \mu_c\cdot m_1\cdot g = m_1\cdot a+ m_2\cdot a$

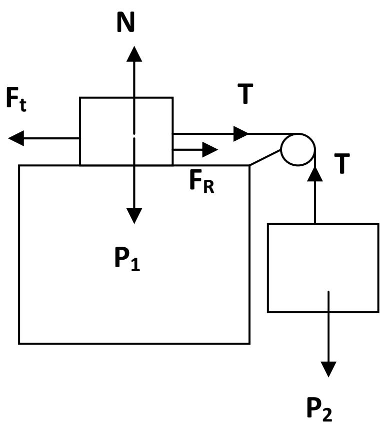
$$\boxed{a= \frac{m_2\cdot g- \mu_c\cdot m_1\cdot g}{(m_1 + m_2)}}$$

$\Sigma F_n = m_1\cdot a \quad N-P= 0 \quad \boxed{N=P= m_1\cdot g}$

En este caso la fuerza de rozamiento seria: $\boxed{F_R= \mu_c\cdot N= \mu_c\cdot m_1\cdot g}$

Una vez calculada la aceleración la sustituimos en (*) o en (**) y calculamos la tensión.

Si el sistema se moviera hacia la izquierda bajo la acción de una fuerza F_t, la fuerza de rozamiento actuaría en sentido contrario:



Ahora tendríamos:

Cuerpo 1: $F_t - T-F_R= m_1\cdot a$ $\quad F_t - \cancel{T} - \mu_c\cdot m_1\cdot g = m_1\cdot a$ (*)

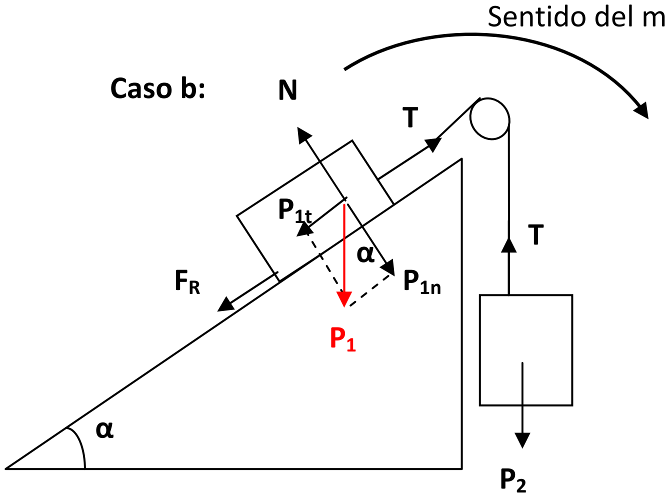
Cuerpo 2: $T-P_2= m_2\cdot a$ $\quad \underline{\cancel{T} - m_2\cdot g = m_2\cdot a}$ (**)

$$F_t - \mu_c\cdot m_1\cdot g - m_2\cdot g = m_1\cdot a+ m_2\cdot a$$

De aquí despejaremos la aceleración o la F_t según nos pida el problema.

www.yoquieroaprobar.es

Caso b:



$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{P_{1t}}{P_1}$ $\quad P_{1t} = P_1 \cdot \text{sen}\alpha = m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{P_{1n}}{P_1}$ $\quad P_{1n} = P_1 \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\Sigma F_n = m \cdot a \qquad N - P_{1n} = 0 \qquad N = P_{1n} \qquad N = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$\boxed{F_R = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha)}$$

Aplicando a cada cuerpo la 2ª ley de Newton:

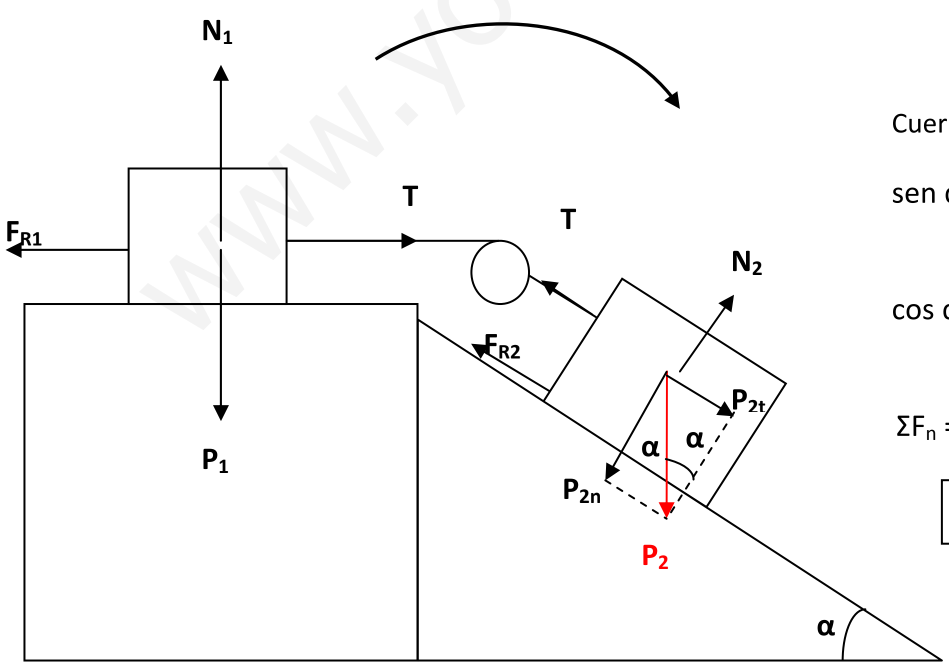
Cuerpo 1: $T - P_{1t} - F_R = m_1 \cdot a \qquad \cancel{T} - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha) = m_1 \cdot a \quad (*)$

Cuerpo 2: $P_2 - T = m_2 \cdot a \qquad m_2 \cdot g - \cancel{T} = m_2 \cdot a \quad (**)$

Al sumar las ecuaciones se eliminan las T $\qquad m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$

$$\boxed{a = \frac{m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_c \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha)}{(m_1 + m_2)}}$$

Caso c:



Cuerpo 2:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{P_{2t}}{P_2}$ $\quad P_{2t} = P_2 \cdot \text{sen}\alpha = m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{P_{2n}}{P_2}$ $\quad P_{2n} = P_2 \cdot \cos\alpha = m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\Sigma F_n = m \cdot a \qquad N_2 - P_{2n} = 0 \qquad N_2 = P_{2n}$

$$\boxed{F_{R2} = \mu_{c2} \cdot N_2 = \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha)}$$

Cuerpo 1: $\Sigma F_n = m_1 \cdot a \quad N_1 - P_1 = 0$ $\quad \boxed{N_1 = P_1 = m_1 \cdot g}$ $\quad \boxed{F_{R1} = \mu_{c1} \cdot N_1 = \mu_{c1} \cdot m_1 \cdot g}$

www.yoquieroaprobar.es

Aplicando a cada cuerpo la 2ª ley de Newton:

Cuerpo 1: $T - F_{R1} = m_1 \cdot a$ $\quad \cancel{T} - \mu_{c1} \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \quad (*)$

Cuerpo 2: $P_{2t} - T - F_{R2} = m_2 \cdot a$ $\quad \underline{m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \cancel{T} - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha) -= m_2 \cdot a} \quad (**)$

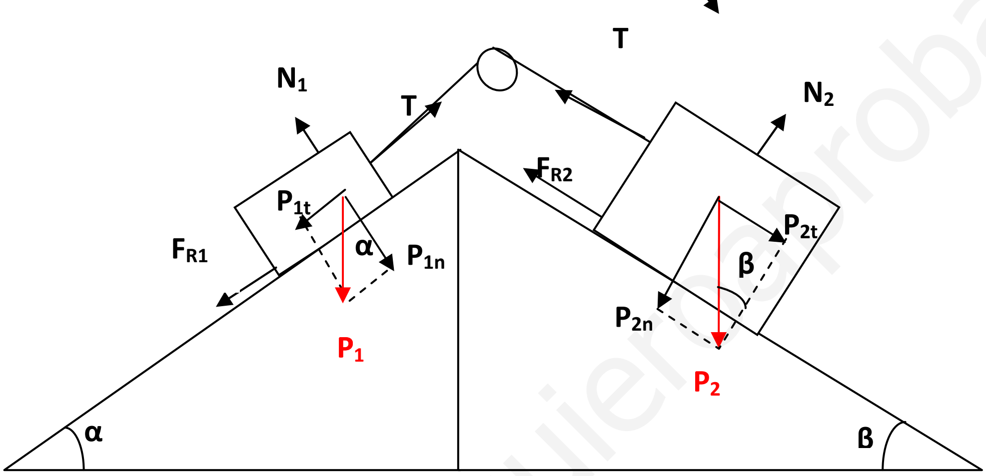
Al sumar las ecuaciones se eliminan las T $\quad m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_{c1} \cdot m_1 \cdot g - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$

$$\boxed{a = \frac{m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_{c1} \cdot m_1 \cdot g - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha)}{(m_1 + m_2)}}$$

Una vez calculada la aceleración la sustituimos en (*) o en (**) y calculamos la tensión.

Caso d:

Sentido del movimiento, ya que las inclinaciones son similares pero $m_2 > m_1$



www.yoquieroaprobar.es

Cuerpo 1:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{P_{1t}}{P_1} \quad P_{1t} = P_1 \cdot \text{sen}\alpha = m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \frac{P_{1n}}{P_1} \quad P_{1n} = P_1 \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\Sigma F_n = m \cdot a \quad N_1 - P_{1n} = 0 \quad N_1 = P_{1n} \quad N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\boxed{F_{R1} = \mu_{c1} \cdot N_1 = \mu_{c1} \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha)}$

Cuerpo 2:

$\text{sen}\,\beta = \frac{P_{2t}}{P_2} \quad P_{2t} = P_2 \cdot \text{sen}\beta = m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\beta$

$\cos\beta = \frac{P_{2n}}{P_2} \quad P_{2n} = P_2 \cdot \cos\beta = m_2 \cdot g \cdot \cos\beta$

$\Sigma F_n = m \cdot a \quad N_2 - P_{2n} = 0 \quad N_2 = P_{2n} = m_2 \cdot g \cdot \cos\beta$

$\boxed{F_{R2} = \mu_{c2} \cdot N_2 = \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\beta)}$

Aplicando a cada cuerpo la 2ª ley de Newton:

Cuerpo 1: $T - F_{R1} - P_{1t} = m_1 \cdot a$ $\quad \cancel{T} - \mu_{c1} \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha) - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha = m_1 \cdot a \quad (*)$

Cuerpo 2: $P_{2t} - T - F_{R2} = m_2 \cdot a$ $\quad \underline{m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\beta - \cancel{T} - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\beta) = m_2 \cdot a} \quad (**)$

Al sumar las ecuaciones se eliminan las T $\quad m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\beta - \mu_{c1} \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha) - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\beta) = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$

$$\boxed{a = \frac{m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\beta - \mu_{c1} \cdot (m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha) - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu_{c2} \cdot (m_2 \cdot g \cdot \cos\beta)}{(m_1 + m_2)}}$$