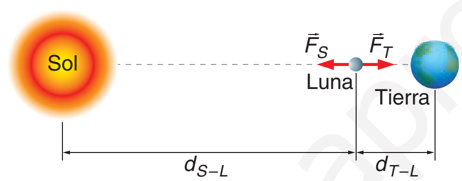
1. Sabiendo que las masas del Sol y de la Tierra son 1,99 · 10^{30} kg y 5,98 ·10^{24} kg, respectivamente, y que la distancia entre la Tierra y el Sol es de 150 millones de km, calcula la fuerza gravitatoria entre la Tierra y el Sol.

Aplicando la ley de la gravitación universal se obtiene:

$$F_R = G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(1{,}5 \cdot 10^{11})^2} = 3{,}5 \cdot 10^{22}\ \text{N}$$

2. Con los datos de la actividad anterior, y sabiendo que la distancia Tierra-Luna es de 3,84 · 10^8 m, calcula la resultante de las fuerzas que actúan sobre la Luna, de 7,35 · 10^{22} kg de masa, durante un eclipse de Sol.

En un eclipse de Sol, la Luna se encuentra entre la Tierra y el Sol:



donde:

$$d_{T\text{-}L} = 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}$$

$$d_{S\text{-}L} = 1{,}5 \cdot 10^{11} - 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

La fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna vale:

$$F_S = G \cdot \frac{M_S \cdot M_L}{d^2_{S\text{-}L}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 4{,}36 \cdot 10^{20}\ \text{N}$$

La fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna vale:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d^2_{T\text{-}L}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(3{,}84 \cdot 10^8)^2} = 1{,}99 \cdot 10^{20}\ \text{N}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza que ejerce la Tierra está dirigida hacia la Tierra, y que la que ejerce el Sol está dirigida hacia el Sol:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_S + \vec{F}_T = -4{,}36 \cdot 10^{20} \cdot \vec{u}_x + 1{,}99 \cdot 10^{20} \cdot \vec{u}_x = -2{,}37 \cdot 10^{20} \cdot \vec{u}_x\ \text{N}$$

La fuerza resultante está dirigida hacia el Sol.

3. Calcula la altura que alcanzará un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba en la Luna, si al lanzarlo en la Tierra con la misma velocidad alcanza una altura de 11,5 m.

Teniendo en cuenta los datos del radio y la masa de la Luna, dados en la actividad 2 de la página 95 del libro del alumno, la gravedad de la Luna vale:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}738 \cdot 10^6)^2} = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Por otro lado, la velocidad del lanzamiento en la Tierra es:

$$v^2 = 2 \cdot g_T \cdot h_T \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g_T \cdot h_T} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 11{,}5} = 15{,}01 \text{ m/s}$$

Por tanto, la altura que alcanzará en la Luna será:

$$v^2 = 2 \cdot g_L \cdot h_L \rightarrow h_L = \frac{v^2}{2 \cdot g_L} = \frac{2 \cdot g_T \cdot h_T}{2 \cdot g_L} = \frac{g_T \cdot h_T}{g_L} = \frac{9{,}8 \cdot 11{,}5}{1{,}6} = 70{,}43 \text{ m}$$

También podíamos haberla calculado utilizando la velocidad de lanzamiento:

$$h_L = \frac{v^2}{2 \cdot g_L} = \frac{15{,}01^2}{2 \cdot 1{,}6} = 70{,}43 \text{ m}$$

4. Calcula la fuerza gravitatoria entre dos personas de 50 kg y 80 kg de masa, respectivamente, separados 20 cm. Compárala con sus pesos.

La fuerza gravitatoria entre ellos es:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{50 \cdot 80}{0{,}2^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Esta fuerza resulta insignificante frente al peso de cada cuerpo, que vale:

$$P_1 = m_1 \cdot g = 50 \cdot 9{,}8 = 490 \text{ N} \quad ; \quad P_2 = m_2 \cdot g = 80 \cdot 9{,}8 = 784 \text{ N}$$

5. Sobre un cuerpo de 15 kg, que descansa sobre el suelo, se aplica una fuerza vertical constante de forma que se eleva verticalmente y a 4 m del suelo su velocidad es de 2 m/s. Calcula: a) La aceleración del cuerpo. b) El valor de la fuerza.

a) El cuerpo sube con un m.r.u.a., sin velocidad inicial; luego, la aceleración con que sube el cuerpo es:

$$\left.\begin{array}{l} v = a \cdot t \\ \\ h = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot h \rightarrow 2^2 = 2 \cdot a \cdot 4 \rightarrow a = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

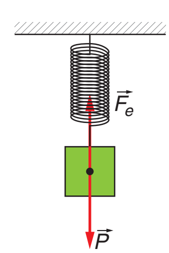
b) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están dirigidas verticalmente; luego:

$$F - P = m \cdot a \rightarrow F = m \cdot g + m \cdot a = 15 \cdot 9{,}8 + 15 \cdot 0{,}5 = 154{,}5 \text{ N}$$

6. Un muelle de 10 cm de longitud pende del techo. Si colgamos de él un cuerpo de 4 kg de masa, su longitud es de 12 cm. Calcula: a) La constante recuperadora del muelle. b) La longitud del muelle si colgamos un cuerpo de 6 kg.

a) El alargamiento del muelle al colgar la masa de 4 kg es:

$$x = l - l_0 = 12 - 10 = 2 \text{ cm} = 0{,}02 \text{ m}$$



Si el cuerpo está en equilibrio:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e = 0 \rightarrow F_e - P = 0 \rightarrow k \cdot x - m \cdot g = 0$$

Luego:

$$k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{4 \cdot 9{,}8}{0{,}02} = 1960 \text{ N/m}$$

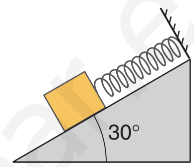
b) Si colgamos un cuerpo de 6 kg, el muelle se alargará una distancia distinta, pero como estará en equilibrio, la fuerza elástica contrarrestará el peso; luego:

$$k \cdot x = m \cdot g \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{6 \cdot 9{,}8}{1960} = 0{,}03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Por tanto, el alargamiento del muelle será de 3 cm, y su longitud:

$$x = l - l_0 \rightarrow l = x + l_0 = 3 + 10 = 13 \text{ cm} = 0{,}13 \text{ m}$$

7. Un bloque de 15 kg descansa sobre el plano inclinado de la figura sujeto por un muelle. En la posición de equilibrio, el muelle está alargado 3 cm. Despreciando el rozamiento: a) Halla la constante del muelle. b) Si se tira del bloque haciendo que se deslice 2 cm hacia abajo, respecto a la posición de equilibrio y a lo largo del plano inclinado, y luego se suelta, ¿cuál será su aceleración inicial?



Si no tenemos en cuenta el rozamiento, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza elástica:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_e$$

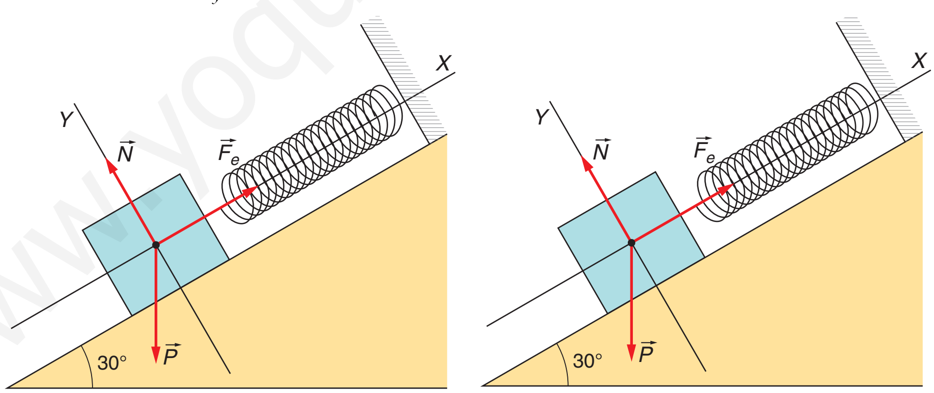
a) Si el cuerpo está en equilibrio, la fuerza resultante es nula; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_e = 0$$

Tomando el eje X paralelo al plano inclinado y con el sentido positivo hacia arriba, tenemos, al descomponer la expresión anterior en los ejes X e Y:

$$F_e - P_x = 0 \rightarrow k \cdot x - m \cdot g \cdot sen\,\alpha = 0 \rightarrow k \cdot x = m \cdot g \cdot sen\,\alpha$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N - m \cdot g \cdot cos\,\alpha = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\,\alpha$$



Luego:

$$k = \frac{m \cdot g \cdot sen\,\alpha}{x} = \frac{15 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}03} = 2450 \text{ N/m}$$

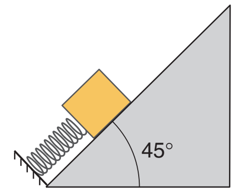
b) Cuando $x = x_0 + 2$ cm $= 3$ cm $+ 2$ cm $= 5$ cm $= 0{,}05$ m, el cuerpo no está en equilibrio, pues $F_e > P_x$; luego:

$$F_e - P_x = m \cdot a \rightarrow k \cdot x - m \cdot g \cdot sen\,\alpha = m \cdot a \rightarrow 2450 \cdot 0{,}05 - 15 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 15 \cdot a$$

Por tanto, la aceleración inicial del cuerpo es:

$$a = 3{,}27 \text{ m/s}^2$$

8. Considerando despreciable el rozamiento, calcula cuánto ha de estar comprimido el muelle de la figura, de k = 8 000 N/m, para que el cuerpo, de masa m = 35 kg, esté en equilibrio. Si empujamos el cuerpo hacia abajo y comprimimos el muelle 1 cm más y soltamos, ¿cuánto vale la aceleración inicial?



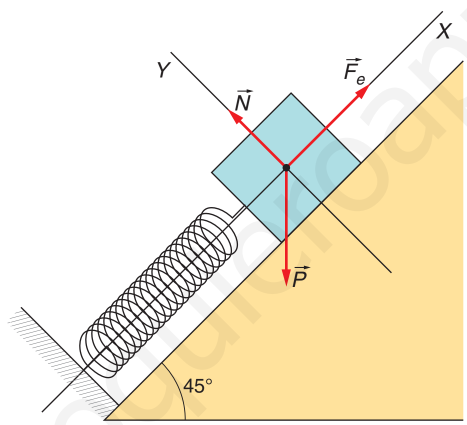
El muelle, al estar comprimido, empuja el cuerpo hacia arriba. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza elástica del muelle, y como está en equilibrio, tenemos:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e = 0$$

Tomando el eje X paralelo al plano inclinado y con el sentido positivo hacia arriba, tenemos, para los ejes X e Y:

$$F_e - P_x = 0 \rightarrow k \cdot x - m \cdot g \cdot sen\ \alpha = 0 \rightarrow k \cdot x = m \cdot g \cdot sen\ \alpha$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N - m \cdot g \cdot cos\ \alpha = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$



Luego:

$$x = \frac{m \cdot g \cdot sen\ \alpha}{k} = \frac{35 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71}{8000} = 0{,}03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Si lo comprimimos 1 cm más, x = 4 cm = 0,04 m, el cuerpo ya no estará en equilibrio:

$$F_e - P_x = m \cdot a \rightarrow k \cdot x - m \cdot g \cdot sen\ \alpha = m \cdot a \rightarrow 8000 \cdot 0{,}04 - 35 \cdot 9{,}8 \cdot sen\ 45° = 35 \cdot a$$

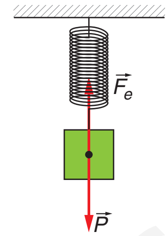
Luego, la aceleración inicial del cuerpo es:

$$a = 2{,}21 \text{ m/s}^2$$

9. Un cuerpo de 0,5 kg está colgado del techo de un ascensor mediante un muelle de constante recuperadora k = 196 N/m. Calcula el alargamiento del muelle cuando el ascensor: a) Sube con velocidad constante. b) Baja con velocidad constante. c) Sube acelerando con a = 2 m/s². d) Sube frenando con a = 2 m/s². Ten en cuenta que el cuerpo lleva en todo instante la misma velocidad y aceleración que el ascensor.

Sobre el cuerpo actúan el peso y la fuerza elástica; luego, $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e$, y su movimiento es el mismo que realiza el ascensor.

a) Si el ascensor sube con velocidad constante, el cuerpo se mueve con velocidad constante; luego, $a = 0$. Por tanto: $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e = 0$. Tomando el semieje X positivo en la dirección y el sentido del movimiento, tenemos:



$$F_e - P = 0 \rightarrow k \cdot x - m \cdot g = 0 \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8}{196} = 0{,}025 \text{ m}$$

El muelle se ha alargado 2,5 cm.

b) Cuando el ascensor baja con velocidad constante, la aceleración del cuerpo es de nuevo nula, y obtenemos el mismo resultado anterior: el alargamiento del muelle vale 2,5 cm, ya que:

$$P - F_e = 0 \rightarrow m \cdot g - k \cdot x = 0 \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8}{196} = 0{,}025 \text{ m}$$

c) Cuando el ascensor sube con aceleración, el cuerpo tiene la misma aceleración que el ascensor para un observador situado fuera; luego:

$$F_e - P = m \cdot a \rightarrow k \cdot x - m \cdot g = m \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{m \cdot g + m \cdot a}{k} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8 + 0{,}5 \cdot 2}{196} = 0{,}03 \text{ m}$$

El muelle se ha alargado 3 cm.

d) Si el ascensor sube frenando, su aceleración y la del cuerpo valen $a = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^2$; por tanto:

$$F_e - P = m \cdot a \rightarrow k \cdot x - m \cdot g = m \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{m \cdot g + m \cdot a}{k} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8 + 0{,}5 \cdot (-2)}{196} = 0{,}02 \text{ m}$$

El muelle está estirado 2 cm.

10. Una caja que se desliza por un plano horizontal recorre 5 m hasta detenerse después de ser lanzada con una velocidad de 7 m/s. Calcula el coeficiente de rozamiento entre la caja y el plano.

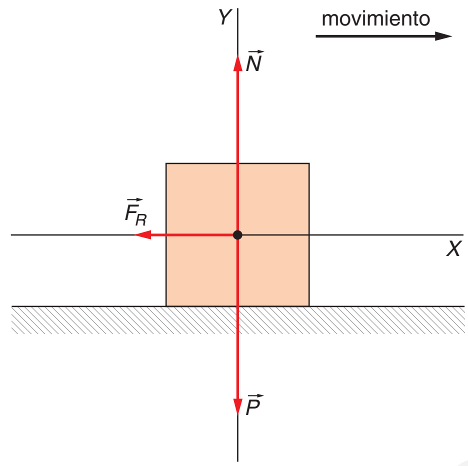
El cuerpo realiza un m.r.u.a. cuyas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \end{array}\right\} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x \rightarrow 0^2 - 7^2 = 2 \cdot a \cdot 5 \rightarrow a = -4{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento.

Por tanto:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$



Tomando el eje X en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes X e Y:

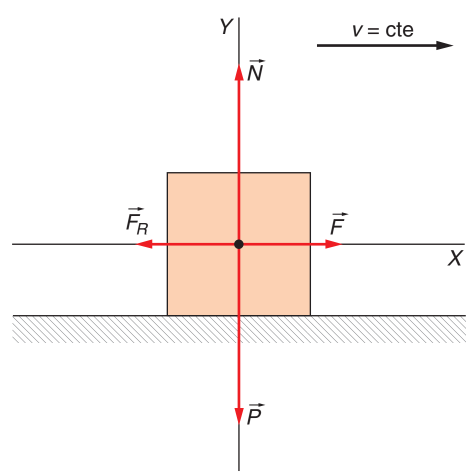
$$\left.\begin{array}{l} -F_R = m \cdot a \rightarrow -\mu \cdot N = m \cdot a \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow -\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = -\frac{-4,9}{9,8} = 0,5$$

El coeficiente de rozamiento vale 0,5.

11. Calcula la fuerza horizontal que actúa sobre un cuerpo de 25 kg que se desplaza con velocidad constante sobre un plano horizontal si el coeficiente de rozamiento vale 0,4.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza horizontal aplicada, y como se mueve con velocidad constante, entonces:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F} = 0$$



Tomando el eje X en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes X e Y:

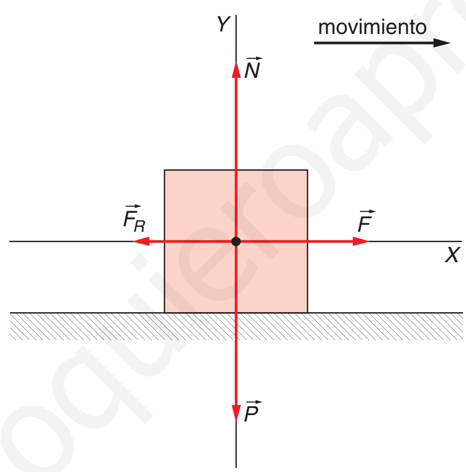
$$\left.\begin{array}{l} F - F_R = 0 \rightarrow F - \mu \cdot N = 0 \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow F = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}4 \cdot 25 \cdot 9{,}8 = 98 \text{ N}$$

Luego, hemos de tirar del cuerpo con una fuerza de 98 N.

12. Sobre un cuerpo de 2 kg de masa en reposo en una superficie horizontal aplicamos durante 4 s una fuerza de 13 N, paralela a la superficie. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,5, calcula: a) La aceleración del cuerpo a los 3 s y a los 5 s. b) Su velocidad a los 4 s. c) El tiempo que tarda en pararse. d) El espacio total recorrido.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza horizontal aplicada; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Tomando el semieje X positivo en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} F - F_R = m \cdot a \rightarrow F - \mu \cdot N = m \cdot a \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow 13 - 0{,}5 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2 \cdot a$$

Luego, $a = 1{,}6$ m/s^2 es la aceleración del cuerpo en cualquier instante mientras actúa la fuerza F, y es positiva (hacia la derecha).

Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

Descomponiendo la expresión anterior en los ejes X e Y, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} -F_R = m \cdot a' \rightarrow -\mu \cdot N = m \cdot a' \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow -\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a' \rightarrow -0{,}5 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2 \cdot a'$$

Al operar, resulta: $a' = -4{,}9$ m/s^2; esta es la aceleración de frenado del cuerpo desde que deja de actuar la fuerza F hasta que este se detiene.

b) La velocidad del cuerpo a los 4 s, en el instante en que deja de actuar $\vec{F}$, vale:

$$v = a \cdot t = 1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4 \text{ m/s}$$

c) Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, el cuerpo disminuye su velocidad y se para en un tiempo:

$$v = v_0 + a' \cdot t \rightarrow 0 = 6{,}4 - 4{,}9 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = 1{,}3 \text{ s}$$

Luego, el cuerpo tarda en pararse:

$$t_{detención} = 4 + 1{,}3 = 5{,}3 \text{ s}$$

d) El espacio recorrido por el cuerpo cuando actúa la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot 4^2 = 12{,}8 \text{ m}$$

El espacio recorrido cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a' \cdot t^2 = 6{,}4 \cdot 1{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \cdot 1{,}3^2 = 4{,}16 \text{ m}$$

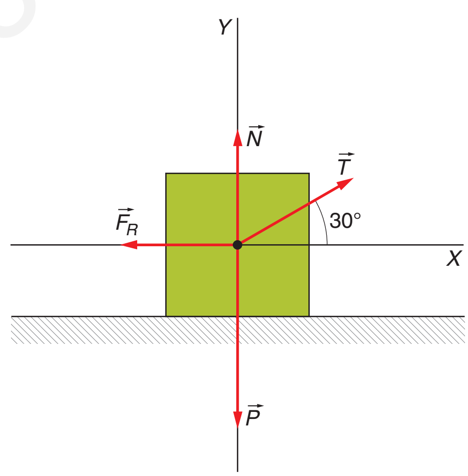
Luego, el espacio total recorrido vale:

$$x = 12{,}8 + 4{,}16 = 16{,}96 \text{ m}$$

13. Atamos una cuerda a una caja de 40 kg que está apoyada sobre una superficie horizontal y tiramos de la cuerda hacia arriba formando 30° con la horizontal. La tensión de la cuerda justo antes de empezar a moverse la caja vale 116 N. Determina: a) La reacción normal de la superficie horizontal. b) La fuerza de rozamiento. c) El coeficiente de rozamiento.

Las fuerzas que actúan sobre la caja son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la tensión de la cuerda; además, como la caja está a punto de moverse, la fuerza de rozamiento alcanza su máximo valor: $F_R = \mu \cdot N$, pero el cuerpo no se mueve; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{T} = 0$$



Situando el semieje X positivo horizontal y hacia la derecha, las componentes de las fuerzas son:

$$\vec{P} = (0, -m \cdot g) \quad ; \quad \vec{N} = (0, N) \quad ; \quad \vec{F}_R = (-\mu \cdot N, 0) \quad ; \quad \vec{T} = (T \cdot cos\,\alpha, T \cdot sen\,\alpha)$$

Por tanto, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} T_x - F_R = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N = 0 \\ N + T_y - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g - T \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \rightarrow T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot (m \cdot g - T \cdot \operatorname{sen}\alpha) = 0$$

Luego:

a) La reacción normal vale:

$$N = m \cdot g - T \cdot \operatorname{sen}\alpha = 40 \cdot 9{,}8 - 116 \cdot 0{,}5 = 334 \text{ N}$$

b) La fuerza de rozamiento vale:

$$F_R = T \cdot \cos\alpha = 116 \cdot 0{,}866 = 100{,}46 \text{ N}$$

c) El coeficiente de rozamiento vale:

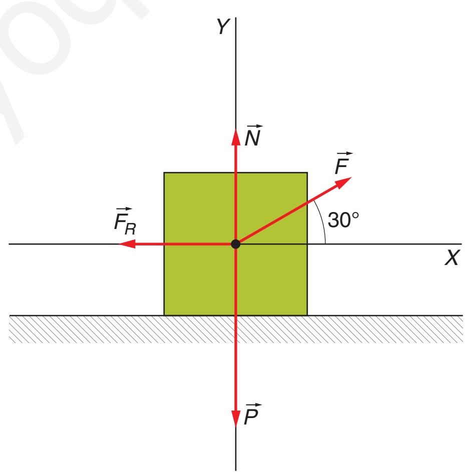
$$\mu = \frac{F_R}{N} = \frac{100{,}46}{334} = 0{,}3$$

14. Un obrero debe elegir entre empujar o tirar de un bloque de 80 kg para desplazarlo sobre una pista horizontal con velocidad constante. En ambos casos, la fuerza aplicada forma un ángulo de 30° con el suelo, en sentido descendente al empujar y ascendente al tirar. ¿En qué caso la fuerza aplicada es menor? Datos: $\mu_d = 0{,}4$; $g = 9{,}8$ m/s².

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza que realiza el obrero. Teniendo en cuenta que el bloque se mueve con velocidad constante:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F}$$

Cuando el obrero tira del bloque, el diagrama de fuerzas es el de la figura adjunta.



Tomando el semieje X positivo en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} F_x - F_R = 0 \rightarrow F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N = 0 \\ N + F_y - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g - F \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \rightarrow F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \operatorname{sen}\alpha) = 0$$

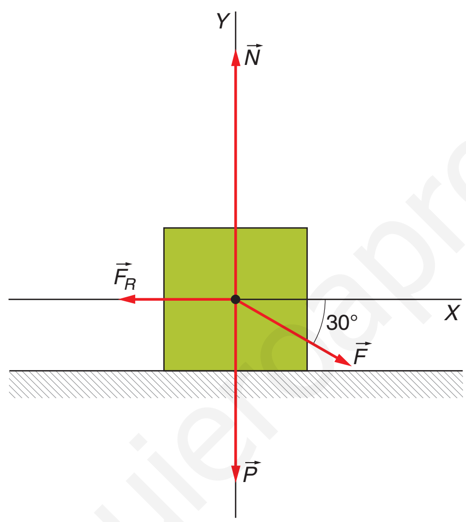
Operando se obtiene:

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot m \cdot g + \mu \cdot F \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow F \cdot (\cos \alpha + \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha) = \mu \cdot m \cdot g$$

$$F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos \alpha + \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{0,4 \cdot 80 \cdot 9,8}{0,87 + 0,4 \cdot 0,5} = 293,1 \text{ N}$$

El obrero debe tirar con una fuerza de 293,1 N. En este caso, el sentido de la fuerza hace disminuir el valor de la normal y, por tanto, el de la fuerza de rozamiento.

Cuando el obrero empuja el bloque, el diagrama de fuerzas es el de la figura siguiente.



Tomando el semieje X positivo en el sentido del movimiento y recordando que el bloque se desplaza con velocidad constante, tenemos, para cada eje:

$$\left.\begin{array}{l} F_x - F_R = 0 \rightarrow F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N = 0 \\ N - F_y - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g + F \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\} \rightarrow F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot (m \cdot g + F \cdot \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot m \cdot g - \mu \cdot F \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow F \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha) = \mu \cdot m \cdot g$$

$$F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos \alpha - \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{0,4 \cdot 80 \cdot 9,8}{0,87 - 0,4 \cdot 0,5} = 468,06 \text{ N}$$

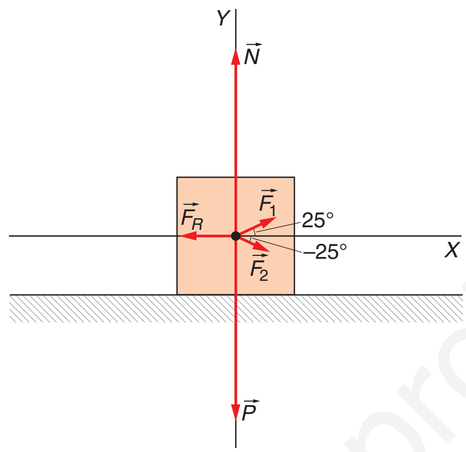
El obrero debe empujar con una fuerza de 468,06 N. El sentido de la fuerza hace aumentar el valor de la normal, y, por tanto, la fuerza de rozamiento que hay que contrarrestar es mayor.

La fuerza es menor cuando tira que cuando empuja.

15. Dos obreros deslizan un bloque de 250 kg sobre una superficie horizontal. Para ello, uno empuja con una fuerza de 600 N descendente formando 25° con la horizontal, y el otro tira del bloque con una fuerza que forma 25° con la horizontal en sentido ascendente y de valor 500 N. El coeficiente de rozamiento vale 0,3. Calcula: a) El valor de la normal. b) El valor de la fuerza de rozamiento. c) La aceleración del cuerpo.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento, la fuerza que tira del cuerpo, $\vec{F}_1$, y la fuerza que empuja, $\vec{F}_2$; luego, la resultante vale:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}$$



Tomando el semieje X positivo en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes X e Y:

$$F_{1,x} + F_{2,x} - F_R = m \cdot a \rightarrow F_1 \cdot cos\ \alpha + F_2 \cdot cos\ \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a \qquad [1]$$

$$N + F_{1,y} - F_{2,y} - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g + F_2 \cdot sen\ \alpha - F_1 \cdot sen\ \alpha \qquad [2]$$

a) Sustituyendo datos en la expresión [2] obtenemos el valor de la normal:

$$N = m \cdot g + F_2 \cdot sen\ \alpha - F_1 \cdot sen\ \alpha = 250 \cdot 9{,}8 + 600 \cdot 0{,}42 - 500 \cdot 0{,}42 = 2\,492 \text{ N}$$

b) La fuerza de rozamiento vale:

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}3 \cdot 2\,492 = 747{,}6 \text{ N}$$

c) El valor de la aceleración lo obtenemos a partir de las expresiones [1] y [2]:

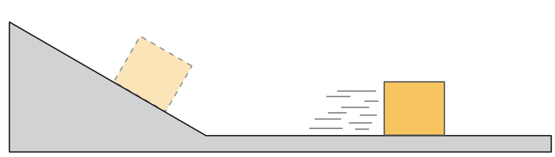
$$F_1 \cdot cos\ \alpha + F_2 \cdot cos\ \alpha - \mu \cdot (m \cdot g + F_2 \cdot sen\ \alpha - F_1 \cdot sen\ \alpha) = m \cdot a$$

$$500 \cdot 0{,}9 + 600 \cdot 0{,}9 - 0{,}3 \cdot (250 \cdot 9{,}8 + 600 \cdot 0{,}42 - 500 \cdot 0{,}42) = 250 \cdot a$$

Operando, se obtiene que la aceleración del cuerpo vale $a = 0{,}97$ m/s^2.

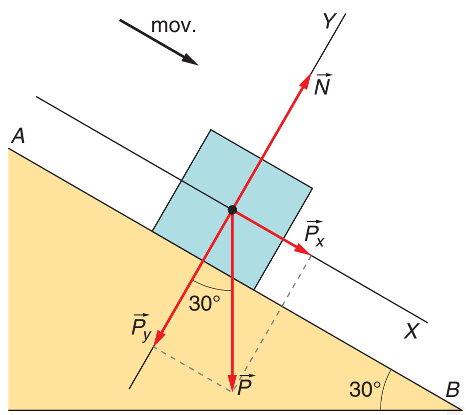
16. Desde una altura de 3 m se suelta un cuerpo de 2,5 kg que baja deslizándose por un plano inclinado 30° sin rozamiento, y continúa en un plano horizontal donde el coeficiente de rozamiento vale 0,5. Calcula: a) La velocidad del cuerpo al final del plano inclinado. b) El espacio que recorre en el plano horizontal hasta detenerse.

Denominamos A al punto de partida; B, al punto más bajo del plano inclinado, y C, al punto del plano horizontal donde se detiene.



a) La fuerzas que actúan entre A y B son el peso y la normal; luego: $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$.

El diagrama de fuerzas se muestra en la figura siguiente. Tomamos el eje X paralelo al plano inclinado y con el sentido positivo hacia abajo.

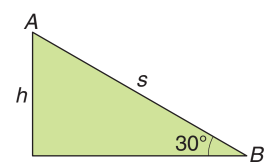


Por tanto, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} P_x = m \cdot a \rightarrow m \cdot g \cdot sen\ \alpha = m \cdot a \\ N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow a = g \cdot sen\ \alpha = 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 4{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El cuerpo baja con una aceleración de 4,9 m/s².

A partir del triángulo de la figura adjunta deducimos la siguiente relación:

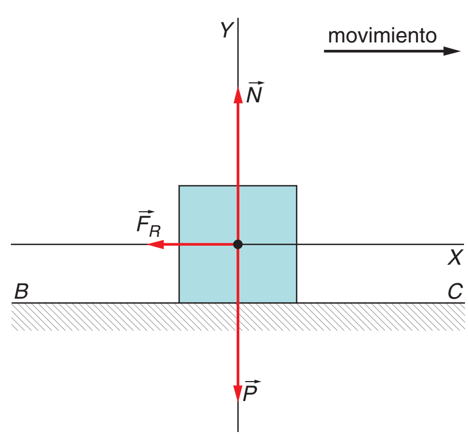


$$sen\ \alpha = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{sen\ \alpha} = \frac{3}{0{,}5} = 6 \text{ m}$$

Luego, el espacio que recorre el cuerpo en el plano inclinado es de 6 m, y su velocidad en el punto B vale:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 4{,}9 \cdot 6} = 7{,}67 \text{ m/s}$$

b) Cuando el cuerpo se mueve en el plano horizontal, las fuerzas que actúan sobre él son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento, como se muestra en la figura:



Por tanto:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R$$

Tomando el semieje X positivo en el sentido del movimiento, tenemos las siguientes expresiones para los ejes X e Y:

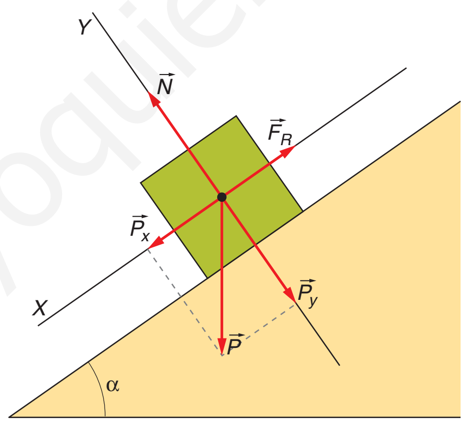
$$\left.\begin{array}{l} -F_R = m \cdot a \rightarrow -\mu \cdot N = m \cdot a \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow a = -\mu \cdot g = -0{,}5 \cdot 9{,}8 = -4{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El espacio que recorre el cuerpo en el plano horizontal hasta detenerse vale:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow s = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{0 - 7{,}67^2}{2 \cdot (-4{,}9)} = 6 \text{ m}$$

17. El ángulo máximo para que una caja de 20 kg de masa esté en reposo en un plano inclinado es de 35°: a) Calcula el valor del coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano, y el valor de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. b) ¿Qué ocurre si el ángulo de inclinación es de 30°? ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento en este caso? c) ¿Qué ocurre si el ángulo de inclinación es de 45°? Considera $\mu_d = \mu_e$.

El hecho de que el ángulo máximo para que el cuerpo permanezca en reposo sea de 35° significa que para ese ángulo la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo, $\mu \cdot N$. Para ángulos menores, la fuerza de rozamiento coincide con la que tira del cuerpo hacia abajo, pues el cuerpo no se mueve. Para ángulos mayores, el cuerpo desciende con aceleración.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier caso son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R$$

a) Cuando α = 35°, el cuerpo permanece en reposo, pero $F_R = \mu \cdot N$; luego tenemos, para los ejes X e Y:

$$P_x - F_R = 0 \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = 0$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\,\alpha$$

Al operar con las expresiones anteriores, obtenemos:

$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\,\alpha = 0 \rightarrow sen\,\alpha = \mu \cdot cos\,\alpha \rightarrow \mu = tg\,\alpha = 0{,}7$$

El coeficiente de rozamiento estático vale 0,7, y las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

$$P = m \cdot g = 20 \cdot 9{,}8 = 196 \text{ N}$$

$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}82 = 160{,}72 \text{ N}$$

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}7 \cdot 160{,}72 = 112{,}50 \text{ N}$$

b) Cuando $\alpha = 30°$, el cuerpo permanece en reposo. La fuerza de rozamiento coincide con la fuerza que tira del cuerpo, pero no alcanza su valor máximo, $\mu \cdot N$. Entonces, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} P_x - F_R = 0 \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - F_R = 0 \\ N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \rightarrow F_R = m \cdot g \cdot sen\,\alpha = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 98 \text{ N}$$

c) Cuando $\alpha = 45°$, el cuerpo ya no permanece en reposo y desciende con aceleración. En este caso:

$$P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Operando con las expresiones anteriores obtenemos la aceleración con que desciende el cuerpo:

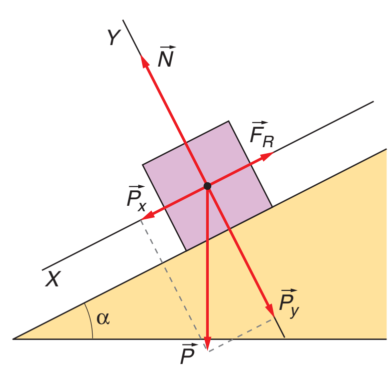
$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

$$a = g \cdot (sen\,\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = 9{,}8 \cdot (0{,}7 - 0{,}7 \cdot 0{,}7) = 2{,}06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

18. Si un cuerpo de 2 kg de masa baja deslizándose por un plano inclinado 27° con velocidad constante, ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento? ¿Cuánto vale la fuerza mínima necesaria para subirlo con velocidad constante?

Si el cuerpo baja con velocidad constante, su aceleración es nula; por tanto, la fuerza resultante es nula:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = 0$$



Tomando el semieje X positivo hacia abajo, tenemos, para los ejes X e Y:

$$P_x - F_R = 0 \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = 0$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Operando, obtenemos el valor del coeficiente de rozamiento:

$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow sen\,\alpha = \mu \cdot \cos\alpha \rightarrow \mu = tg\,\alpha = 0{,}5$$

Para subir el cuerpo con velocidad constante, hemos de ejercer una fuerza paralela al plano inclinado, $\vec{F}$, que contrarreste la componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento. Tomando el semieje X positivo hacia arriba, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} F - P_x - F_R = 0 \rightarrow F - m \cdot g \cdot sen\, \alpha - \mu \cdot N = 0 \\ N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\, \alpha \end{array}\right\} \rightarrow F = m \cdot g \cdot sen\, \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\, \alpha$$

Y sustituyendo valores:

$$F = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}45 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}89 = 17{,}54 \text{ N}$$

19. Un cuerpo de 3 kg se lanza desde el punto más bajo de un plano inclinado 30° con una velocidad de 6 m/s, sube deslizándose hasta detenerse y luego comienza a bajar. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,35, calcula: a) La aceleración de subida. b) La distancia que recorre por el plano hasta que se detiene. c) La aceleración de bajada. d) El tiempo que tarda en volver al punto de partida.

Hay que tener en cuenta que, tanto en la subida como en la bajada, la fuerza de rozamiento se opone al movimiento del cuerpo; las demás fuerzas que actúan sobre él, el peso y la normal, no cambian de sentido.

a) En la subida, tomando el semieje X positivo hacia arriba, tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} -P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow -m \cdot g \cdot sen\, \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a \\ N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\, \alpha \end{array}\right\} \rightarrow -g \cdot sen\, \alpha - \mu \cdot g \cdot cos\, \alpha = a$$

Luego, la aceleración de subida es:

$$a = -g \cdot (sen\, \alpha + \mu \cdot cos\, \alpha) = -9{,}8 \cdot (0{,}5 + 0{,}35 \cdot 0{,}866) = -7{,}87 \text{ m/s}^2$$

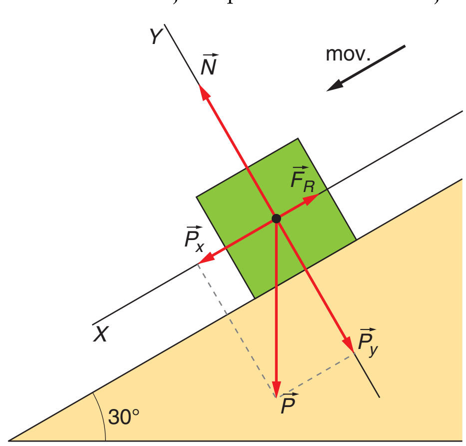
b) Como el cuerpo sube con m.r.u.a. con aceleración negativa, cuando se detiene se cumple:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow 0 - 6^2 = 2 \cdot (-7{,}87) \cdot s \rightarrow s = 2{,}3 \text{ m}$$

El cuerpo recorre 2,3 m hasta detenerse; es decir, alcanza una altura:

$$h = s \cdot sen\, \alpha \rightarrow h = 2{,}3 \cdot 0{,}5 = 1{,}15 \text{ m}$$

c) En la bajada, tomamos el semieje X positivo hacia abajo:



Ahora tenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} P_x - F_R = m \cdot a' \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a' \\ N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\,\alpha \end{array}\right\} \rightarrow g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot g \cdot cos\,\alpha = a'$$

Luego, la aceleración de bajada vale:

$$a' = g \cdot (sen\,\alpha - \mu \cdot cos\,\alpha) = 9{,}8 \cdot (0{,}5 - 0{,}35 \cdot 0{,}866) = 1{,}93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

d) Calculamos el tiempo empleado en cada trayecto. En la subida, el cuerpo emplea un tiempo:

$$v - v_0 = a \cdot t \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-6}{-7{,}87} = 0{,}76 \text{ s}$$

Y en la bajada:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2 \rightarrow 2{,}3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}93 \cdot t'^2 \rightarrow t' = 1{,}54 \text{ s}$$

Por tanto, el tiempo que tarda en volver al punto de partida es:

$$t_{total} = t + t' = 0{,}76 + 1{,}54 = 2{,}30 \text{ s}$$

20. Un cuerpo cae por un plano inclinado que ofrece resistencia al deslizamiento. Al cabo de 4 s, ha alcanzado una velocidad de 2 m/s y ha descendido una altura de 1 m partiendo del reposo. Calcula: a) La inclinación del plano respecto a la horizontal. b) El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano.

a) La relación entre la altura, h, que desciende el cuerpo y el espacio recorrido, s, es:

$$h = s \cdot sen\,\alpha \rightarrow s = \frac{h}{sen\,\alpha} = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

Como el cuerpo realiza un m.r.u.a., se cumple que:

$$v = a \cdot t \rightarrow 2 = a \cdot 4 \rightarrow a = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow 4 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{sen\,\alpha} \rightarrow sen\,\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \alpha = 14{,}5°$$

b) Sobre el cuerpo actúan el peso, la normal y la fuerza de rozamiento; el coeficiente de rozamiento se puede calcular a partir de las siguientes expresiones, para los ejes X e Y:

$$P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\,\alpha$$

Al operar, obtenemos:

$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\,\alpha = m \cdot a \rightarrow \mu = \frac{g \cdot sen\,\alpha - a}{g \cdot cos\,\alpha} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}25 - 0{,}5}{9{,}8 \cdot 0{,}97} = 0{,}2$$

21. Sobre un cuerpo de 4 kg, situado en un plano inclinado 30° respecto a la horizontal, actúa una fuerza horizontal y hacia el interior del plano. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,4, calcula el valor de la fuerza:

a) Para que el cuerpo suba con velocidad constante.

b) Para que el cuerpo baje deslizándose con velocidad constante.

c) Para que suba deslizándose de forma que recorra 4 m en 2 s habiendo partido del reposo.

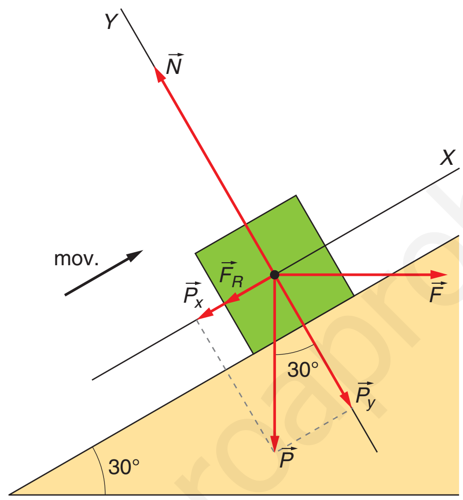
La resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R$$

Cuando el cuerpo sube tomamos el semieje X positivo hacia arriba; luego, las componentes de las fuerzas son:

$$\vec{F} = (F \cdot cos\ \alpha,\ -F \cdot sen\ \alpha) \quad ; \quad \vec{P} = (-m \cdot g \cdot sen\ \alpha, -m \cdot g \cdot cos\ \alpha)$$

$$\vec{N} = (0,\ N) \quad ; \quad \vec{F}_R = (-\mu \cdot N,\ 0)$$



Luego tenemos, para los ejes X e Y:

$$F \cdot cos\ \alpha - m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$N - F \cdot sen\ \alpha - m \cdot g \cdot cos\ \alpha = 0 \rightarrow N = F \cdot sen\ \alpha + m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Operando con ellas, resulta:

$$F \cdot cos\ \alpha - m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot (F \cdot sen\ \alpha + m \cdot g \cdot cos\ \alpha) = m \cdot a$$

a) Si el cuerpo sube deslizándose con velocidad constante, su aceleración es nula; luego:

$$F \cdot cos\ \alpha - m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot (F \cdot sen\ \alpha + m \cdot g \cdot cos\ \alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F \cdot cos\ \alpha - \mu \cdot F \cdot sen\ \alpha = m \cdot g \cdot sen\ \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow F = \frac{m \cdot g \cdot (sen\ \alpha + \mu \cdot cos\ \alpha)}{cos\ \alpha - \mu \cdot sen\ \alpha}$$

$$F = \frac{4 \cdot 9{,}8 \cdot (sen\ 30° + 0{,}4 \cdot cos\ 30°)}{cos\ 30° - 0{,}4 \cdot sen\ 30°} = 49{,}8\ \text{N}$$

b) Cuando el cuerpo baja, tomamos el semieje X positivo hacia abajo, y las componentes de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

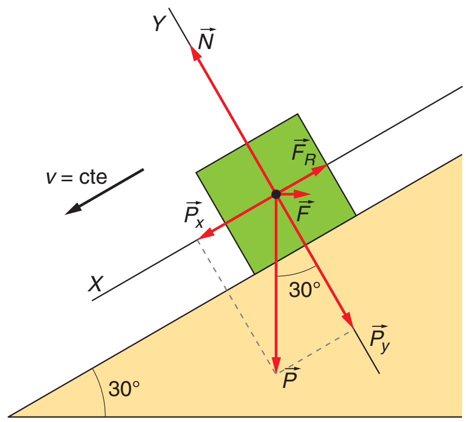
$$\vec{F} = (-F \cdot cos\ \alpha, -F \cdot sen\ \alpha) \quad ; \quad \vec{P} = (m \cdot g \cdot sen\ \alpha, -m \cdot g \cdot cos\ \alpha)$$

$$\vec{N} = (0,\ N) \quad ; \quad \vec{F}_R = (-\mu \cdot N,\ 0)$$

Y para que el cuerpo baje con velocidad constante, se ha de cumplir:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = 0$$

Luego, de acuerdo con la figura, tenemos, para los ejes X e Y:



$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - F \cdot cos\,\alpha - \mu \cdot N = 0$$

$$N - F \cdot sen\,\alpha - m \cdot g \cdot cos\,\alpha = 0 \rightarrow N = F \cdot sen\,\alpha + m \cdot g \cdot cos\,\alpha$$

Operando se obtiene:

$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - F \cdot cos\,\alpha - \mu \cdot (F \cdot sen\,\alpha + m \cdot g \cdot cos\,\alpha) = 0$$

$$F = \frac{m \cdot g \cdot (sen\,\alpha - \mu \cdot cos\,\alpha)}{cos\,\alpha + \mu \cdot sen\,\alpha} = \frac{4 \cdot 9{,}8\ (0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}866)}{0{,}866 + 0{,}4 \cdot 0{,}5} = 5{,}65\ \text{N}$$

c) Para que el cuerpo suba 4 m en 2 s habiendo partido del reposo, su aceleración ha de valer:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 \rightarrow a = 2\ \text{m/s}^2$$

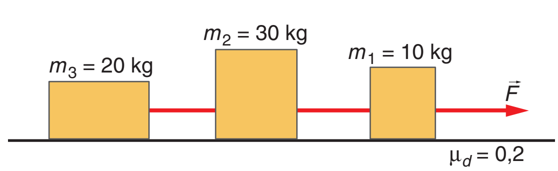
Luego:

$$F \cdot cos\,\alpha - m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\,\alpha - \mu \cdot F \cdot sen\,\alpha = m \cdot a$$

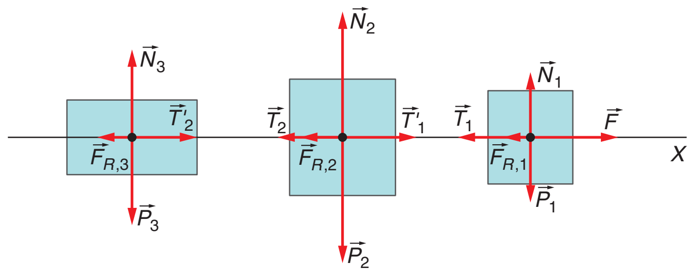
$$F = \frac{m \cdot a + m \cdot g \cdot sen\,\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\,\alpha}{cos\,\alpha - \mu \cdot sen\,\alpha}$$

$$F = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866}{0{,}866 - 0{,}4 \cdot 0{,}5} = 61{,}8\ \text{N}$$

22. Calcula el valor de la fuerza $\vec{F}$ y la tensión de cada cuerda para que los cuerpos de la figura se desplacen con una aceleración de 2 m/s².



Si tenemos en cuenta el rozamiento, el diagrama de fuerzas de cada cuerpo es el siguiente:



– Cuerpo 1; ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} F - T_1 - F_{R,1} = m_1 \cdot a \rightarrow F - T_1 - \mu \cdot N_1 = m_1 \cdot a \\ N_1 - m_1 \cdot g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow F - T_1 - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

– Cuerpo 2; ejes X e Y: como $T_1 = T_1'$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - T_2 - F_{R,2} = m_2 \cdot a \rightarrow T_1 - T_2 - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a \\ N_2 - m_2 \cdot g = 0 \rightarrow N_2 = m_2 \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow T_1 - T_2 - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

– Cuerpo 3; ejes X e Y: como $T_2 = T_2'$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} T_2 - F_{R,3} = m_3 \cdot a \rightarrow T_2 - \mu \cdot N_3 = m_3 \cdot a \\ N_3 - m_3 \cdot g = 0 \rightarrow N_3 = m_3 \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow T_2 - \mu \cdot m_3 \cdot g = m_3 \cdot a$$

Sumando las ecuaciones de los tres cuerpos, obtenemos:

$$F - \mu \cdot g \cdot (m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

Luego:

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a + \mu \cdot g \cdot (m_1 + m_2 + m_3) =$$
$$= 60 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 60 = 237{,}6 \text{ N}$$

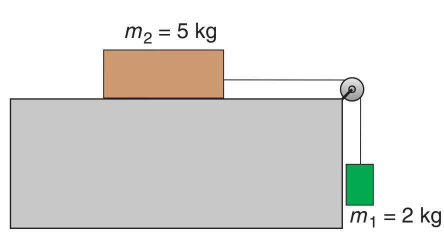
De la ecuación del cuerpo 1, tenemos:

$$T_1 = F - \mu \cdot m_1 \cdot g - m_1 \cdot a = 237{,}6 - 0{,}2 \cdot 10 \cdot 9{,}8 - 10 \cdot 2 = 198 \text{ N}$$

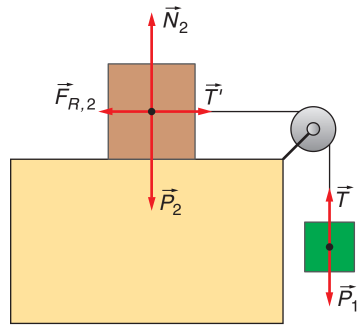
Y de la del 3, tenemos:

$$T_2 = m_3 \cdot a + \mu \cdot m_3 \cdot g = 30 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 30 \cdot 9{,}8 = 118{,}8 \text{ N}$$

23. Considerando despreciables las masas de la polea y de la cuerda, calcula la aceleración de los cuerpos de la figura y la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento vale 0,3. Calcula la velocidad de m_2 cuando m_1 ha descendido 1,4 m. ¿Qué ocurre si a los 2 s de iniciado el movimiento se corta la cuerda?



Como los cuerpos están enlazados, tienen la misma aceleración tangencial, $a_1 = a_2 = a$, y las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo son:



– Cuerpo 1: su peso y la tensión de la cuerda. Tomando el semieje X positivo hacia abajo, tenemos:

$$\Sigma\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a}_1 \rightarrow m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \qquad [1]$$

– Cuerpo 2: su peso, la normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{F}_{R,2} = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Analizando los componentes de la expresión anterior, y teniendo en cuenta que $T' = T$:

$$\left.\begin{array}{l} T - F_{R,2} = m_2 \cdot a \rightarrow T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a \\ N_2 - m_2 \cdot g = 0 \rightarrow N_2 = m_2 \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos la expresión que permite calcular la aceleración; a partir de ella, obtenemos el valor de la tension:

$$m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{2 - 0{,}3 \cdot 5}{7} \cdot 9{,}8 = 0{,}7 \text{ m/s}^2$$

$$T = m_2 \cdot a + \mu \cdot m_2 \cdot g = 5 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 5 \cdot 9{,}8 = 18{,}2 \text{ N}$$

Como los cuerpos realizan un m.r.u.a., entonces:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s = 2 \cdot a \cdot h \rightarrow v^2 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \rightarrow v = 1{,}4 \text{ m/s}$$

A los 2 s, los cuerpos se mueven con una velocidad:

$$v = a \cdot t = 0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4 \text{ m/s}$$

Si se corta la cuerda en ese instante, desaparece la tensión, y, por tanto:

– Cuerpo 1: como sobre él solo actúa el peso, cae con una aceleración igual a la de la gravedad, 9,8 m/s², y con una velocidad inicial de 1,4 m/s; luego, realiza **un movimiento vertical hacia abajo,** siendo sus ecuaciones:

$$v_1 = v_0 + g \cdot t = 1{,}4 + 9{,}8 \cdot t \quad ; \quad x_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 1{,}4 \cdot t + 4{,}9 \cdot t^2$$

– Cuerpo 2: al desaparecer la tensión, la fuerza resultante coincide con la fuerza de rozamiento, y, por tanto, realiza un movimiento uniformemente decelerado con una velocidad inicial de 1,4 m/s y cuya aceleración vale:

$$-F_{R,2} = m_2 \cdot a'_2 \rightarrow a'_2 = -\mu \cdot g = -0{,}3 \cdot 9{,}8 = -2{,}94 \text{ m/s}^2$$

El cuerpo 2 se detiene cuando $v_2 = 0$; luego:

$$v_2 = v_0 + a_2 \cdot t \rightarrow 0 = 1{,}4 - 2{,}94 \cdot t \rightarrow t = 0{,}48 \text{ s}$$

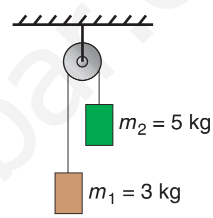
y recorre hasta detenerse:

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 1{,}4 \cdot 0{,}48 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}94 \cdot 0{,}48^2 = 0{,}33 \text{ m}$$

En ese tiempo, el cuerpo 1 ha descendido:

$$x_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 1{,}4 \cdot 0{,}47 + 4{,}9 \cdot 0{,}47^2 = 1{,}74 \text{ m}$$

24. La máquina de Atwood, representada en la figura adjunta, consiste en una polea por la que pasa una cuerda, en cuyos extremos hemos suspendido sendos cuerpos de masas m_1 y m_2. Considerando la cuerda inextensible y su masa y la de la polea despreciables, calcula: a) La aceleración de los cuerpos. b) La tensión de la cuerda. c) La distancia entre los cuerpos a los 2 s si inicialmente están en reposo y al mismo nivel.



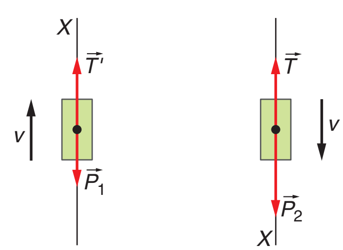
Puesto que la masa del cuerpo 2 es mayor que la del 1, suponemos que el 2 desciende y que, evidentemente, el 1 sube. El módulo de la aceleración es igual para ambos cuerpos, pues la cuerda es inextensible, y el módulo de la tensión de la cuerda es igual en todos sus puntos, aunque la dirección varíe, por ser despreciables las masas de la cuerda y de la polea.

Como el cuerpo 2 baja, para él tomaremos el semieje X positivo hacia abajo; luego:

$$\vec{P}_2 + \vec{T} = m_2 \cdot \vec{a}_2 \rightarrow m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

Como el cuerpo 1 sube, para él tomamos el semieje X positivo hacia arriba; luego:

$$\vec{P}_1 + \vec{T}' = m_1 \cdot \vec{a}_1 \rightarrow T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad [1]$$



Sumando miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$m_2 \cdot g - m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

a) La aceleración de ambos cuerpos vale:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{2}{8} \cdot 9{,}8 = 2{,}45 \text{ m/s}^2$$

b) La tensión de la cuerda es:

$$T = m_1 \cdot g + m_1 \cdot a = 3 \cdot 9{,}8 + 3 \cdot 2{,}45 = 36{,}75 \text{ N}$$

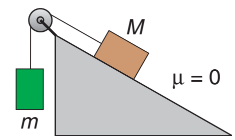
c) Cada cuerpo realiza un m.r.u.a. y, como parten del reposo, al cabo de 2 s cada uno se ha desplazado:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}45 \cdot 2^2 = 4{,}9 \text{ m}$$

Como el cuerpo 2 baja esa distancia y, a la vez, el cuerpo 1 sube esa misma distancia, la distancia entre ellos es:

$$d = 2 \cdot x = 9{,}8 \text{ m}$$

25. Para subir el bloque *M* de 200 kg por un plano inclinado 30° colgamos del otro extremo de la cuerda un cuerpo de masa *m*. Calcula el valor de *m* y la tensión de la cuerda para que *M* suba: a) Con velocidad constante. b) Con una aceleración de 1,5 m/s².



Como no existe rozamiento, las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo y sus ecuaciones correspondientes son:

– Cuerpo m: Tomando el eje X vertical y con el sentido positivo hacia abajo, tenemos:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P}' + \vec{T}' = m \cdot \vec{a} \rightarrow m \cdot g - T = m \cdot a$$

– Cuerpo M: Las fuerzas que actúan sobre él son:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = M \cdot \vec{a}$$

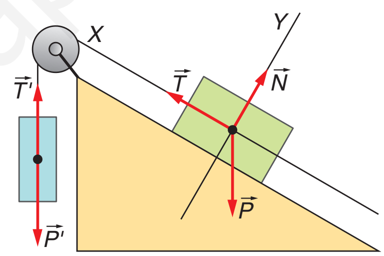
Tomando el eje X paralelo al plano inclinado y con el sentido positivo hacia arriba, obtenemos, para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} T - P_x = M \cdot a \\ N - P_y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow T - M \cdot g \cdot sen\ \alpha = M \cdot a$$

Sumando las ecuaciones que hemos obtenido para ambos cuerpos, llegamos a la siguiente expresión:

$$m \cdot g - M \cdot g \cdot sen\ \alpha = (M + m) \cdot a$$

Por tanto, de acuerdo con ella, la resolución de los apartados a) y b) es la siguiente:



a) Si el cuerpo M sube con velocidad constante, entonces $a = 0$; luego:

$$m \cdot g - M \cdot g \cdot sen\ \alpha = 0 \rightarrow m = M \cdot sen\ \alpha = 200 \cdot 0{,}5 = 100 \text{ kg}$$

La tensión de la cuerda vale:

$$T = M \cdot g \cdot sen\ \alpha = 200 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 980 \text{ N}$$

b) Si queremos que M suba con $a = 1{,}5$ m/s², entonces:

$$m \cdot g - m \cdot a = M \cdot g \cdot sen\ \alpha + M \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{M \cdot (g \cdot sen\ \alpha + a)}{g - a} = \frac{200 \cdot (9{,}8 \cdot 0{,}5 + 1{,}5)}{9{,}8 - 1{,}5} = 154{,}2 \text{ kg}$$

Y la tensión de la cuerda en este caso vale:

$$T = M \cdot g \cdot sen\ \alpha + M \cdot a = 200 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 + 200 \cdot 1{,}5 = 1280 \text{ N}$$

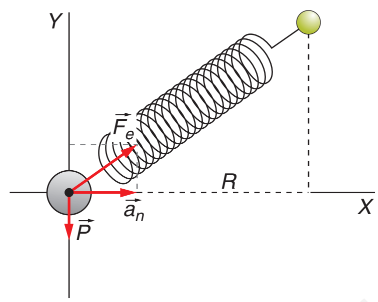
26. Un cuerpo de 200 g de masa está unido a un muelle cuya constante elástica vale *k* = 400 N/m, y describe una trayectoria circular de 25 cm de radio en un plano horizontal con rapidez constante de 5 m/s. Calcula el alargamiento del muelle.

Sobre el cuerpo actúan el peso y la fuerza elástica:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e = m \cdot \vec{a}$$

Como el cuerpo describe un movimiento circular uniforme, su aceleración solo tiene componente normal.

Como la trayectoria se sitúa en un plano horizontal, la aceleración estará contenida en ese mismo plano. Sin embargo, el peso es siempre vertical, perpendicular a dicho plano. Por tanto, la fuerza elástica tendrá una componente vertical, que compense el peso, y otra horizontal, responsable de la aceleración normal que posee el cuerpo:



Por tanto, tenemos, para los ejes X e Y:

$$F_{e,x} = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow F_{e,x} = 0{,}2 \cdot \frac{5^2}{0{,}25} = 20 \text{ N}$$

$$F_{e,y} - P = 0 \rightarrow F_{e,y} = m \cdot g \rightarrow F_{e,x} = 0{,}2 \cdot 9{,}8 = 1{,}96 \text{ N}$$

El módulo de la fuerza elástica vale:

$$F_e = \sqrt{F_{e,x}^2 + F_{e,y}^2} = \sqrt{20^2 + 1{,}96^2} = 20{,}1 \text{ N}$$

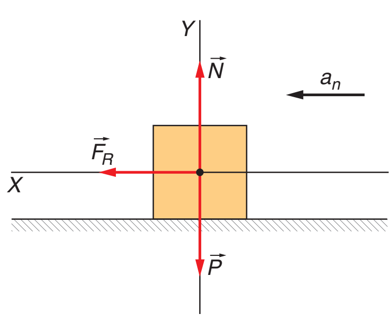
Teniendo en cuenta la ley de Hooke, el alargamiento es:

$$F_e = k \cdot x \rightarrow x = \frac{F_e}{k} = \frac{20{,}1}{400} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

27. Un automóvil de 1 600 kg toma una curva plana de 200 m de radio. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,4, calcula: a) La máxima velocidad, en km/h, con que se puede circular por la curva. b) La fuerza de rozamiento lateral del vehículo cuando circula a 90 km/h. ¿Qué ocurre si toma la curva a 108 km/h?

Las fuerzas que actúan sobre el automóvil son el peso y la normal, en el plano vertical, y la fuerza de rozamiento, perpendicular al avance del coche. Como el móvil realiza un m.c.u., su aceleración es únicamente normal; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$



a) Tomando el semieje X positivo hacia el centro de la curva, como se aprecia en la figura anterior, tenemos la siguientes expresiones para los ejes X e Y:

$$\left.\begin{array}{l} F_R = m \cdot a_n \rightarrow \mu \cdot N = m \cdot \dfrac{v^2}{R} \\ N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \end{array}\right\} \rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\mu \cdot m \cdot g}$$

$$v = \sqrt{0{,}4 \cdot 9{,}8 \cdot 200} = 28 \text{ m/s}$$

La máxima velocidad con que se puede circular por la curva es, por tanto, 28 m/s, esto es, 100,8 km/h y es entonces cuando la fuerza de rozamiento alcanza su máximo valor:

$$F_R = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}4 \cdot 1600 \cdot 9{,}8 = 6\,272 \text{ N}$$

b) Si el automóvil circula a 90 km/h, 25 m/s, entonces la fuerza de rozamiento no alcanza su máximo valor, $\mu \cdot N$, sino que es la suficiente para que el cuerpo tenga una aceleración normal de valor:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{200} = 3{,}125 \text{ m/s}^2$$

Luego:

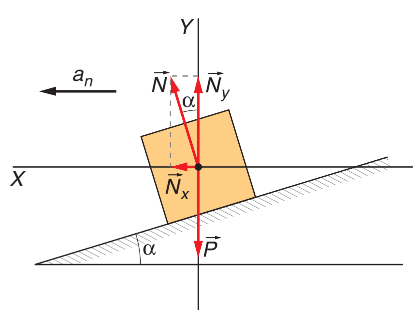
$$F_R = m \cdot a_n = 1\,600 \cdot 3{,}125 = 5\,000 \text{ N}$$

Si la velocidad es 108 km/h, 30 m/s, el automóvil circula a una velocidad superior a la máxima que admite la curva, de 28 m/s, y la fuerza de rozamiento no es suficiente para cambiar la dirección de la velocidad, por lo que el coche «derrapa», se sale de la curva.

28. Calcula la máxima velocidad con que un automóvil puede tomar una curva peraltada 17° de 250 m de radio: a) Si consideramos despreciable el rozamiento. b) Si el coeficiente de rozamiento vale 0,4.

a) Si consideramos despreciable el rozamiento, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están representadas en el diagrama de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Tomando el eje X horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva, tenemos, para los ejes X e Y:

$$N_x = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot sen\,\alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_y - P = 0 \rightarrow N \cdot cos\,\alpha = m \cdot g$$

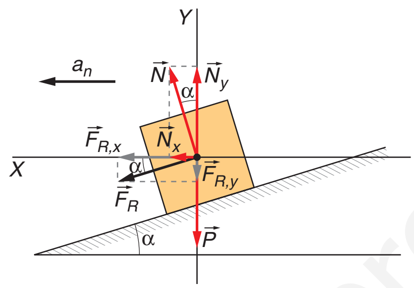
Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, tenemos:

$$tg\ \alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v^2 = g \cdot R \cdot tg\ \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{máx} = \sqrt{g \cdot R \cdot tg\ \alpha} = \sqrt{9{,}8 \cdot 250 \cdot tg\ 17°} = 27{,}37 \text{ m/s}$$

b) Si existe rozamiento, el diagrama de fuerzas es el de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Tomando el eje X horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva tenemos, en cada eje:

$$N_x + F_{R,\,x} = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot sen\ \alpha + \mu \cdot N \cdot cos\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_y - F_{R,\,y} - P = 0 \rightarrow N \cdot cos\ \alpha - \mu \cdot N \cdot sen\ \alpha = m \cdot g$$

Despejando en la segunda ecuación:

$$N = \frac{m \cdot g}{cos\ \alpha - \mu \cdot sen\ \alpha}$$

Y sustituyendo en la primera:

$$(sen\ \alpha + \mu \cdot cos\ \alpha) \cdot \frac{m \cdot g}{cos\ \alpha - \mu \cdot sen\ \alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

De donde se obtiene:

$$v^2 = g \cdot r \cdot \frac{sen\ \alpha + \mu \cdot cos\ \alpha}{cos\ \alpha - \mu \cdot sen\ \alpha} = 9{,}8 \cdot 250 \cdot \frac{sen\ 17° + 0{,}4 \cdot cos\ 17°}{cos\ 17° - 0{,}4 \cdot sen\ 17°} = 1\,969{,}9$$

$$v = 44{,}38 \text{ m/s} = 159{,}8 \text{ km/h}$$

29. Una pequeña bola de 250 g, colgada de un alambre recto de masa despreciable y de 40 cm de longitud, describe circunferencias en un plano horizontal. El alambre forma un ángulo constante de 30° con la vertical. Calcula:

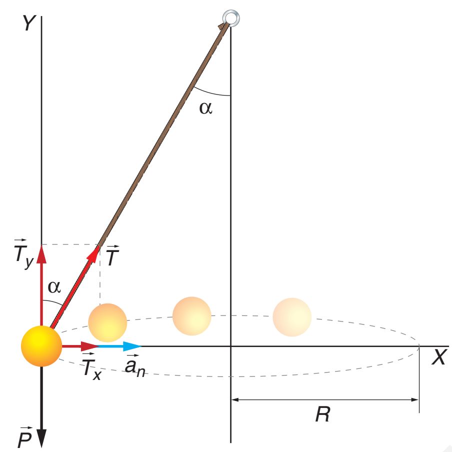
a) La tensión del alambre.

b) El radio de las circunferencias descritas por la bola.

c) La velocidad de la bola.

Las fuerzas que actúan sobre la bola son el peso y la tensión del alambre, y como describe un m.c.u. en un plano horizontal, tenemos, de acuerdo con la figura de la página siguiente:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Al descomponer las fuerzas en los ejes *X* e *Y*, tenemos:

$$T_x = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot sen\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad [1]$$

$$T_y - P = 0 \rightarrow T \cdot cos\ \alpha = m \cdot g \qquad [2]$$

a) La tensión del alambre vale:

$$T = \frac{m \cdot g}{cos\ \alpha} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}8}{0{,}866} = 2{,}83 \text{ N}$$

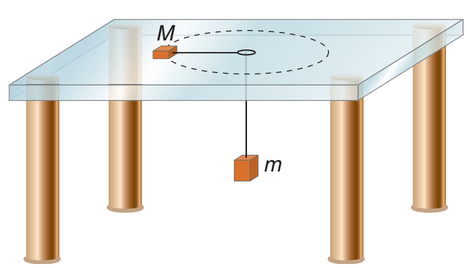
b) Si *L* es la longitud del alambre, el radio de la circunferencia descrita por la bola es:

$$R = L \cdot sen\ \alpha = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \text{ m}$$

c) Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$tg\ \alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v = \sqrt{g \cdot R \cdot tg\ \alpha} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}58} = 1{,}06 \text{ m/s}$$

30. Un cuerpo *M* de de 200 g masa describe una circunferencia de 50 cm de radio sobre una mesa horizontal, dando 2 vueltas por segundo. La masa está unida mediante una cuerda que pasa por un orificio de la mesa a otra masa, *m*, que pende verticalmente.



Calcula:

a) La aceleración del cuerpo *M*.

b) La tensión de la cuerda.

c) El valor de *m* para que se den las condiciones del enunciado.

Si el cuerpo da dos vueltas cada segundo, su frecuencia es de 2 Hz; luego, el período, como es el inverso de la frecuencia, vale 0,5 segundos. *M* describe un m.c.u cuya velocidad angular vale:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,5} = 12,57 \text{ rad/s}$$

Su velocidad lineal es, por tanto:

$$v = \omega \cdot R = 12,57 \cdot 0,5 = 6,29 \text{ m/s}$$

a) Su aceleración es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = 79 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza resultante de las que actúan sobre *M*, teniendo en cuenta que el cuerpo describe un m.c.u., es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$

Al descomponer las expresiones de la fuerza resultante en cada eje, obtenemos:

$$T = m \cdot a_n$$

$$N - P = 0$$

Luego:

$$T = m \cdot a_n = 0,2 \cdot 79 = 15,8 \text{ m/s}^2$$

c) Si la masa *m* se desplazase hacia arriba o hacia abajo, el movimiento de *M* no sería circular, puesto que variaría la longitud del tramo horizontal de la cuerda, es decir, el radio del m.c.u.; luego, para que se den las condiciones del enunciado, *m* ha de estar en equilibrio.

Para que *m* no se mueva:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P'} + \vec{T} = 0 \rightarrow T - m \cdot g = 0 \rightarrow m = \frac{T}{g} = \frac{15,8}{9,8} = 1,6 \text{ kg}$$