1. El observador *A* está pescando en la orilla de un río y el observador *B* está sobre una balsa que es arrastrada por la corriente del río. Indica para cuál de estos observadores es cierta cada una de las afirmaciones siguientes:

a) Los árboles de la orilla están en movimiento.

b) La balsa está en reposo.

c) Los árboles de la orilla y la balsa están en reposo.

a) Es cierta para el observador *B,* pues para él cambian de posición. En cambio, para el observador *A* permanecen en reposo.

b) Es cierta para el observador *B,* pues para él la balsa no modifica su posición; es falsa para el observador *A,* porque para él, al ser arrastrada por la corriente, la balsa cambia de posición.

c) Está afirmación es falsa para ambos: para *A,* los árboles están en reposo y la balsa en movimiento, mientras que para *B,* los árboles están en movimiento y la balsa está en reposo.

2. Indica si el movimiento de los siguientes objetos es de traslación, de rotación o es una combinación de ambos tipos de movimiento:

a) Una caja de zapatos que baja deslizándose por una mesa inclinada.

b) Las manecillas de un reloj.

c) Una pelota que baja rodando por un plano inclinado.

d) El movimiento de las ruedas de la bicicleta estática de un gimnasio.

a) Cuando la caja de zapatos baja deslizándose por la mesa inclinada, su movimiento es de traslación, pues todos sus puntos llevan la misma velocidad en cada instante. Observa que las trayectorias de sus distintos puntos son líneas rectas paralelas al plano de la mesa y que todos ellos recorren el mismo espacio en el mismo tiempo.

b) Las manecillas de un reloj realizan un movimiento de rotación. Todos sus puntos describen trayectorias circulares alrededor del eje de giro, que pasa por uno de los extremos de la manecilla. Cada punto de la manecilla recorre un espacio distinto, según sea su distancia al eje de giro. Todos los puntos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo, pero no realizan el mismo desplazamiento.

c) Cuando la pelota baja rodando por un plano inclinado realiza un movimiento de traslación y otro de rotación, pues los puntos giran alrededor de un eje que pasa por el centro de la pelota, pero este se traslada, a la vez, en línea recta, siguiendo una trayectoria paralela al plano inclinado.

d) Si la bicicleta está anclada en un soporte, las ruedas únicamente realizan un movimiento de rotación.

3. La trayectoria de una pelota que hemos lanzado al aire está dada por las siguientes ecuaciones, en unidades del S.I.: $x = 4 \cdot t$; $y = 1 + 4 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Posición (m)
0	(0, 1)
0,2	
0,4	
0,6	
0,8	
1	

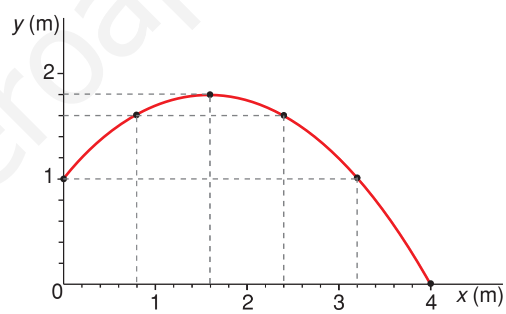
Dibuja la trayectoria de la pelota. ¿Podemos asegurar que la pelota pasa por el punto (–0,8, 0)?

Las ecuaciones de la trayectoria son:

$$x = 4 \cdot t \quad ; \quad y = 1 + 4 \cdot t - 5 \cdot t^2.$$

Sustituyendo los valores de t, completamos la tabla, y a partir de ella dibujamos la gráfica de la trayectoria de la pelota que se muestra a la derecha:

Tiempo (s)	Posición (m)
0	(0, 1)
0,2	(0,8, 1,6)
0,4	(1,6, 1,8)
0,6	(2,4, 1,6)
0,8	(3,2, 1,0)
1	(4,0, 0)



Si la pelota pasase por el punto (–0,8, 0), entonces:

$$-0{,}8 = x = 4 \cdot t \rightarrow t = -0{,}2 \text{ s}$$

Pero un tiempo negativo no tiene sentido físico; luego, no podemos asegurar si el cuerpo pasa por esa posición.

4. Las ecuaciones de la trayectoria de un móvil son: $x = 3 \cdot t + 2$, $y = 4 \cdot t - 5$, en unidades del S.I.:

a) Calcula la posición del móvil para t = 1, 2, 3 y 4 s y dibuja su trayectoria.

b) ¿Qué tipo de trayectoria describe el cuerpo?

c) Calcula en qué instante está el móvil en el punto (17, 15).

d) ¿Pasa el móvil por el punto (20, 25)? ¿Y por el punto (–1, –9)? ¿Por qué?

a) Las posiciones del móvil para esos tiempos son:

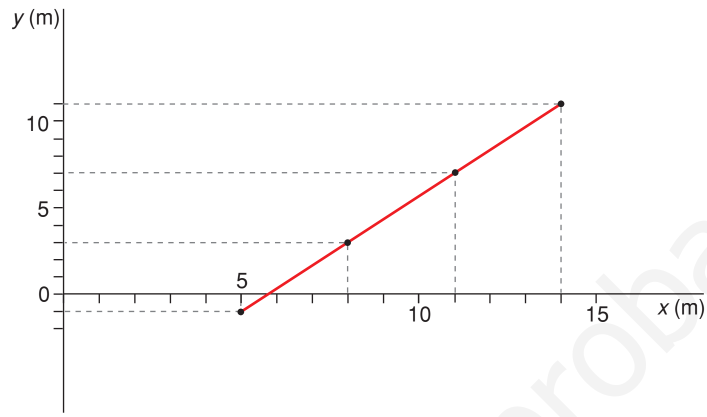
Para $t = 1$ s $\rightarrow$ $x = 3 \cdot 1 + 2 = 5$; $y = 4 \cdot 1 - 5 = -1 \rightarrow P_1 = (5, -1)$ m

Para $t = 2$ s $\rightarrow$ $x = 3 \cdot 2 + 2 = 8$; $y = 4 \cdot 2 - 5 = 3 \rightarrow P_2 = (8, 3)$ m

Para $t = 3$ s $\rightarrow$ $x = 3 \cdot 3 + 2 = 11$; $y = 4 \cdot 3 - 5 = 7 \rightarrow P_3 = (11, 7)$ m

Para $t = 4$ s $\rightarrow$ $x = 3 \cdot 4 + 2 = 14$; $y = 4 \cdot 4 - 5 = 11 \rightarrow P_4 = (14, 11)$ m

La figura muestra la trayectoria que describe el móvil:



b) Para obtener el tipo de trayectoria, despejamos t de las ecuaciones dadas:

$$x = 3 \cdot t + 2 \rightarrow t = \frac{x - 2}{3}$$

$$y = 4 \cdot t - 5 \rightarrow t = \frac{y + 5}{4}$$

Igualando ambas expresiones, tenemos la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 5}{4} \rightarrow y = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{23}{3}$$

c) Para que el móvil pase por un punto, se ha de cumplir que para un instante t los valores de x e y coincidan con las coordenadas de dicho punto:

$$x = 17 = 3 \cdot t + 2 \rightarrow 3 \cdot t = 17 - 2 = 15 \rightarrow t = 5 \text{ s}$$

$$y = 15 = 4 \cdot t - 5 \rightarrow 4 \cdot t = 15 + 5 = 20 \rightarrow t = 5 \text{ s}$$

Luego, el móvil pasa por el punto (17, 15) a los 5 s.

d) Para el punto (20, 25):

$$x = 20 = 3 \cdot t + 2 \rightarrow 3 \cdot t = 20 - 2 = 18 \rightarrow t = 6 \text{ s}$$

$$y = 25 = 4 \cdot t - 5 \rightarrow 4 \cdot t = 25 + 5 = 30 \rightarrow t = 7{,}5 \text{ s}$$

No puede pasar por este punto, pues alcanza el valor de cada coordenada en un tiempo distinto.

Para el punto (–1, –9):

$$x = -1 = 3 \cdot t + 2 \rightarrow 3 \cdot t = -1 - 2 = -3 \rightarrow t = -1 \text{ s}$$

$$y = -9 = 4 \cdot t - 5 \rightarrow 4 \cdot t = -9 + 5 = -4 \rightarrow t = -1 \text{ s}$$

El tiempo es igual para ambas coordenadas, pero como es negativo carece de sentido físico; por tanto, el móvil tampoco pasa por este punto.

5. La ecuación del movimiento de un cuerpo es $\vec{r} = 3 \cdot t \cdot \vec{u}_x + (-2 + 2 \cdot t + t^2) \cdot \vec{u}_y$, en unidades del S.I.:

a) Calcula el vector posición para t = 0, 1, 2, 3 y 4 s.

b) Dibuja aproximadamente la trayectoria del cuerpo y escribe la ecuación de la trayectoria.

c) Explica razonadamente por qué este móvil no puede pasar por los puntos (15, 32) y (–3, –3).

a) Para $t = 0 \rightarrow \quad \vec{r}_0 = -2 \cdot \vec{u}_y$ m

Para $t = 1$ s $\rightarrow \vec{r}_1 = (3 \cdot \vec{u}_x + 1 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 2$ s $\rightarrow \vec{r}_2 = (6 \cdot \vec{u}_x + 6 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 3$ s $\rightarrow \vec{r}_3 = (9 \cdot \vec{u}_x + 13 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 4$ s $\rightarrow \vec{r}_4 = (12 \cdot \vec{u}_x + 22 \cdot \vec{u}_y)$ m

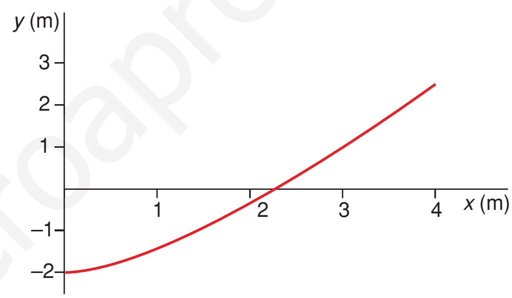
b) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = 3 \cdot t \quad ; \quad y = -2 + 2 \cdot t + t^2$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda, se tiene:

$$t = \frac{x}{3} \rightarrow y = -2 + \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{9} \cdot x^2$$

La trayectoria aproximada del cuerpo es la que se muestra en la gráfica.



c) Para (15, 32):

$$15 = x = 3 \cdot t \rightarrow t = 5$$

Calculamos y para ese instante:

$$y = -2 + 2 \cdot 5 + 5^2 = 37 \neq 32$$

Como no coinciden, el móvil no pasa por ese punto. Para (–3, –3):

$$-3 = x = 3 \cdot t \rightarrow t = -1$$

Calculamos y para ese instante:

$$y = -2 + 2 \cdot (-1) + (-1)^2 = -2 - 2 + 1 = -3$$

Como vemos, las coordenadas del cuerpo son las señaladas en un instante dado, $t = -1$ s, pero como este tiempo es negativo no lo podemos asegurar, porque un tiempo negativo carece de sentido físico.

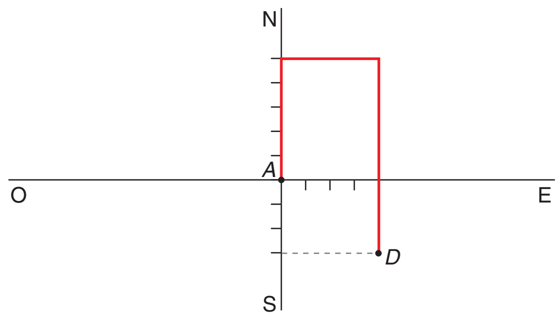
6. Una persona recorre 50 m en dirección norte; después, 40 m en dirección este, y, por último, 80 m en dirección sur. ¿Cuánto vale el módulo del vector desplazamiento entre los instantes inicial y final? ¿Y el espacio recorrido?

El vector desplazamiento va desde A hasta D (figura de la página siguiente), y su módulo coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos valen 40 m y 30 m, respectivamente; luego:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ m}$$

El espacio total recorrido es la suma del espacio recorrido en cada etapa; esto es:

$$\Delta s = 50 + 40 + 80 = 170 \text{ m}$$



7. Las ecuaciones de la trayectoria de un móvil son: $x = 2 \cdot t^2$; $y = 10 + t^2$, expresadas en unidades del S.I.:

a) Calcula el vector posición para t = 1 s, t = 2 s, t = 3 s y t = 4 s.

b) Dibuja la trayectoria del móvil y escribe su ecuación.

c) Calcula el vector desplazamiento entre t = 1 s y t = 4 s, y entre t = 2 s y t = 3 s.

d) ¿Coincide el módulo del vector desplazamiento con el espacio recorrido en un intervalo cualquiera?

a) Para $t = 1$ s $\rightarrow x = 2 \cdot 1^2 = 2$; $y = 10 + 1^2 = 11 \rightarrow \vec{r}_1 = (2 \cdot \vec{u}_x + 11 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 2$ s $\rightarrow x = 2 \cdot 2^2 = 8$; $y = 10 + 2^2 = 14 \rightarrow \vec{r}_2 = (8 \cdot \vec{u}_x + 14 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 3$ s $\rightarrow x = 2 \cdot 3^2 = 18$; $y = 10 + 3^2 = 19 \rightarrow \vec{r}_3 = (18 \cdot \vec{u}_x + 19 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 4$ s $\rightarrow x = 2 \cdot 4^2 = 32$; $y = 10 + 4^2 = 26 \rightarrow \vec{r}_4 = (32 \cdot \vec{u}_x + 26 \cdot \vec{u}_y)$ m

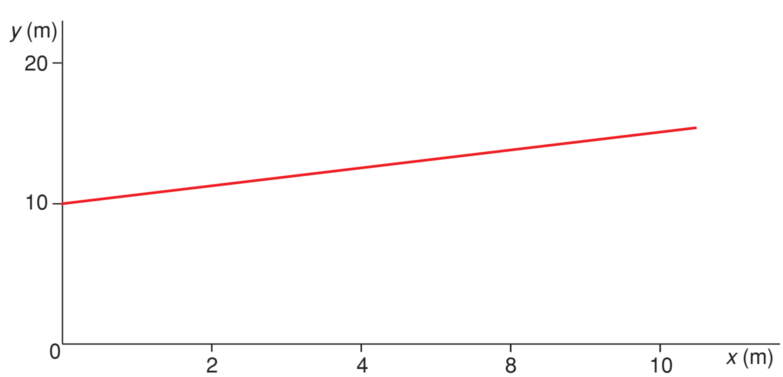
b) Despejando t en la componente x y sustituyendo en la coordenada y, tenemos:

$$x = 2 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{x}{2} \rightarrow y = 10 + t^2 = 10 + \frac{x}{2}$$

luego:

$$y = \frac{x}{2} + 10$$

La ecuación de la trayectoria corresponde a una línea recta, cuya gráfica es la de la figura:



c) El vector desplazamiento entre t = 1 s y t = 4 s es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = (32 \cdot \vec{u}_x + 26 \cdot \vec{u}_y) - (2 \cdot \vec{u}_x + 11 \cdot \vec{u}_y) = (30 \cdot \vec{u}_x + 15 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

y entre t = 2 s y t = 3 s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (18 \cdot \vec{u}_x + 19 \cdot \vec{u}_y) - (8 \cdot \vec{u}_x + 14 \cdot \vec{u}_y) = (10 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

d) Sí, porque la trayectoria es rectilínea y no hay cambio de sentido.

8. Lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota, que llega a una altura de 4 m y nos vuelve a caer en la mano. Calcula el vector desplazamiento, su módulo y el espacio recorrido:

a) En el tramo de subida.

b) En el tramo de bajada.

c) Entre la posición inicial y la final.

Situando el origen de coordenadas en la mano y el semieje Y positivo hacia arriba, tenemos, para cada caso:

a) $\Delta\vec{r} = 4 \cdot \vec{u}_y \rightarrow |\Delta\vec{r}| = 4$ m ; $\Delta s = 4$ m

b) $\Delta\vec{r} = -4 \cdot \vec{u}_y \rightarrow |\Delta\vec{r}| = 4$ m ; $\Delta s = 4$ m

c) $\Delta\vec{r} = 0 \cdot \vec{u}_y \rightarrow |\Delta\vec{r}| = 0$; $\Delta s = 8$ m

9. Determina cuál de los siguientes cuerpos se mueve más deprisa: a) Una pelota a 30 m/s. b) Una motocicleta a 90 km/h. c) Un barco a 40 nudos.

Para determinar cuál de los tres cuerpos se mueve más deprisa, expresamos, en primer lugar, las velocidades en las unidades correspondientes del S.I.:

a) $v_1 = 30$ m/s

b) $v_2 = 90 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = \dfrac{90\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25$ m/s

c) $v_3 = 40 \text{ nudos} = 40 \cdot \dfrac{1{,}852 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 40 \cdot \dfrac{1\,852 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 20{,}58$ m/s

Observa que:

$$v_1 > v_2 > v_3$$

Por tanto, se mueve más deprisa la pelota.

10. Al observar el movimiento de un automóvil que circula por la carretera N-IV hemos obtenido los siguientes datos:

Tiempo (h:m)	Localidad	Punto kilométrico
8:40	Aranjuez	50
10:10	Manzanares	175
10:30	Valdepeñas	205
11:30	Bailén	300

Calcula su celeridad media en m/s y en km/h: a) Entre Manzanares y Bailén. b) Entre Aranjuez y Valdepeñas.

a) Entre Manzanares y Bailén:

$$t_1 = 10 \text{ h } 10 \text{ min} = 36\,600 \text{ s} \ \ ; \ \ t_2 = 11 \text{ h } 30 \text{ min} = 41\,400 \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4\,800 \text{ s} = 1{,}333 \text{ h}$$

$$s_1 = 175 \text{ km} = 175\,000 \text{ m} \ \ ; \ \ s_2 = 300 \text{ km} = 300\,000 \text{ m}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 125 \text{ km} = 125\,000 \text{ m}$$

Luego, la celeridad media es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125\,000 \text{ m}}{4\,800 \text{ s}} = 26{,}04 \text{ m/s} \ \ ; \ \ c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125 \text{ km}}{1{,}333 \text{ h}} = 93{,}75 \text{ km/h}$$

b) Entre Aranjuez y Valdepeñas:

$$t_1 = 8 \text{ h } 40 \text{ min} = 31\,200 \text{ s} \ \ ; \ \ t_2 = 10 \text{ h } 30 \text{ min} = 37\,800 \text{ s}$$

$$\Delta t = 6\,600 \text{ s} = 1{,}833 \text{ h}$$

$$s_1 = 50 \text{ km} = 50\,000 \text{ m} \ \ ; \ \ s_2 = 205 \text{ km} = 205\,000 \text{ m}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 155 \text{ km} = 155\,000 \text{ m}$$

Luego, la celeridad media es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{155\,000 \text{ m}}{6\,600 \text{ s}} = 23{,}48 \text{ m/s} \ \ ; \ \ c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{155 \text{ km}}{1{,}833 \text{ h}} = 84{,}54 \text{ km/h}$$

11. El segundero de un reloj de pulsera mide 2 cm. Tomando como posición inicial la que posee cuando señala hacia las 12, calcula, para el punto extremo del segundero: a) La velocidad media durante 30 s y 60 s. b) La celeridad media en ambos intervalos de tiempo. El origen de coordenadas coincide con el centro del reloj y el semieje *X* positivo apunta hacia las tres.

a) Si inicialmente estaba en las doce, a los 30 s marcará las seis; luego:

Para $t_1 = 0 \rightarrow \vec{r}_1 = 2 \cdot \vec{u}_y$ cm.

Para $t_2 = 30 \text{ s} \rightarrow \vec{r}_2 = -2 \cdot \vec{u}_y$ cm.

Entonces:

$$\Delta t = 30 \text{ s} \ \ ; \ \ \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-2 \cdot \vec{u}_y) - (2 \cdot \vec{u}_y) = -4 \cdot \vec{u}_y \text{ cm}$$

Luego:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = -\frac{4}{30} \cdot \vec{u}_y = -0{,}13 \cdot \vec{u}_y \text{ cm/s}$$

Al cabo de 60 s vuelve a pasar por las doce; luego:

Para $t_1 = 0 \rightarrow \vec{r}_1 = 2 \cdot \vec{u}_y$ cm.

Para $t_2 = 60 \text{ s} \rightarrow \vec{r}_2 = 2 \cdot \vec{u}_y$ cm.

Entonces:

$$\Delta t = 60 \text{ s} \ \ ; \ \ \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2 \cdot \vec{u}_y) - (2 \cdot \vec{u}_y) = 0$$

Luego:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 0$$

La velocidad media es nula en ese intervalo de tiempo.

b) En 30 segundos, el espacio recorrido por el extremo del segundero es la longitud de media circunferencia de radio 2 cm:

$$\Delta s = \pi \cdot R = \pi \cdot 2 = 6{,}28 \text{ cm}$$

Luego:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6{,}28 \text{ cm}}{30 \text{ s}} = 0{,}21 \text{ cm/s}$$

En 60 segundos, el segundero ha dado una vuelta completa, y su extremo ha recorrido una circunferencia completa:

$$\Delta s = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}57 \text{ cm}$$

Luego:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12{,}56 \text{ cm}}{60 \text{ s}} = 0{,}21 \text{ cm/s}$$

Observamos que la velocidad media no permanece constante; sin embargo, la celeridad media en ambos intervalos es la misma y, si escogiésemos cualquier otro intervalo, saldría el mismo valor; luego, la celeridad permanece constante.

12. Si la velocidad media de un cuerpo tiene siempre el mismo valor para cualquier intervalo de tiempo, razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La celeridad del cuerpo es constante.

b) El cuerpo realiza un movimiento circular.

c) La velocidad media coincide con la velocidad instantánea.

d) La trayectoria del cuerpo es una línea recta.

a) Es cierta. Si la velocidad media, $\vec{v}_m$, es constante, significa que siempre tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido; luego, el cuerpo realiza un movimiento rectilíneo con celeridad constante.

b) No es cierto; si fuese circular, el vector $\vec{v}_m$ no valdría lo mismo para dos intervalos cualesquiera, como comprobamos en la actividad anterior.

c) Es cierto. Si para cualquier intervalo de tiempo $\vec{v}_m$ = cte, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, entonces:

$$\vec{v}_m = \vec{v}$$

d) Es cierta. Si la trayectoria fuese curva, $\vec{v}_m$ cambiaría de dirección de unos intervalos a otros.

13. Un cuerpo tarda 5 segundos en ir del punto P_1 (10, 5) al punto P_2 (x, y). Las coordenadas se miden en metros. La velocidad media entre ambas posiciones, en m/s, es:

$$\vec{v}_m = 8 \cdot \vec{u}_x - 11 \cdot \vec{u}_y$$

Calcula: a) x e y. b) La distancia de P_2 al origen de coordenadas.

Para $t = 0$ s $\rightarrow \vec{r}_1 = 10 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y$, y para $t = 5$ s $\rightarrow \vec{r}_2 = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y$.

El vector desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = (x - 10) \cdot \vec{u}_x + (y - 5) \cdot \vec{u}_y$$

a) A partir de la velocidad media calculamos x e y:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 8 \cdot \vec{u}_x - 11 \cdot \vec{u}_y = \frac{(x - 10) \cdot \vec{u}_x + (y - 5) \cdot \vec{u}_y}{5}$$

$$(x - 10) \cdot \vec{u}_x + (y - 5) \cdot \vec{u}_y = 5 \cdot (8 \cdot \vec{u}_x - 11 \cdot \vec{u}_y)$$

$$x - 10 = 5 \cdot 8 \rightarrow x = 50 \text{ m} \quad ; \quad y - 5 = -5 \cdot 11 \rightarrow y = -50 \text{ m}$$

Por tanto, el punto P_2 tiene las coordenadas (50, –50) m.

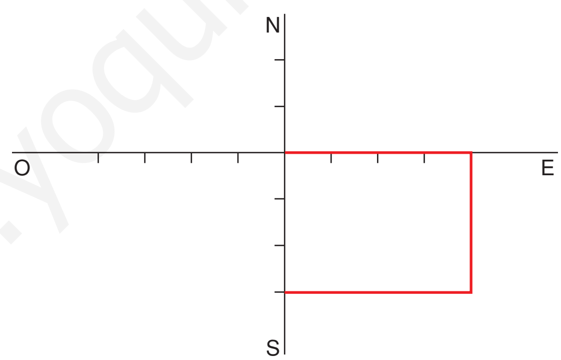
b) La distancia del punto P_2 al origen de coordenadas vale:

$$d = \sqrt{50^2 + (-50)^2} = \sqrt{5000} = 70{,}71 \text{ m/s}$$

14. Una persona recorre 4 km en dirección este en 30 minutos, descansa 30 minutos y después emplea 1 h en recorrer 3 km en dirección sur y 4 km en dirección oeste. Calcula su velocidad media en las siguientes etapas: a) La primera media hora. b) La segunda media hora. c) La primera hora. d) Las dos horas de su recorrido.

¿En cuál de esas etapas coincide la celeridad media con el módulo de la velocidad media?

Tomamos la dirección de los ejes según se indica en la figura:



a) El vector desplazamiento en la primera media hora es $\Delta r = 4 \cdot \vec{u}_x$ km, y el intervalo de tiempo, $\Delta t = 0{,}5$ h; luego, la velocidad media es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{4}{0{,}5} \cdot \vec{u}_x = 8 \cdot \vec{u}_x \text{ km/h}$$

b) Durante la segunda media hora, el cuerpo permanece en reposo; por tanto, la velocidad media es nula.

c) En la primera hora, el vector desplazamiento es $\Delta\vec{r} = 4 \cdot \vec{u}_x$; luego, la velocidad media en ese intervalo de tiempo vale:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{4}{1} \cdot \vec{u}_x = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ km/h}$$

d) En las dos horas que dura el movimiento, el desplazamiento es $\Delta r = -3 \cdot \vec{u}_y$ km; luego:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-3}{2} \cdot \vec{u}_y = -1{,}5 \cdot \vec{u}_y \text{ km/h}$$

La celeridad media en la primera media hora vale:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4}{0{,}5} = 8 \text{ km/h}$$

y coincide con el módulo de la velocidad media en esa etapa.

En la segunda media hora, como el cuerpo está en reposo, no hay espacio recorrido, por lo que su celeridad es nula y coincide con el módulo de la velocidad.

En la primera hora, el espacio recorrido es de 4 km; por tanto:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4}{1} = 4 \text{ km/h}$$

y coincide con el módulo del vector velocidad media en ese intervalo.

En las dos horas de recorrido, el espacio recorrido vale $\Delta s = 4 + 3 + 4 = 11$ km; luego, la celeridad media es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{11}{2} = 5{,}5 \text{ km/h}$$

y no coincide con el modulo de la velocidad media, pues la trayectoria, aunque se compone de tramos rectos, no es rectilínea.

15. El vector posición de un móvil, en unidades del S.I., es:

$$\vec{r} = (40 - 8 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + (t^2 - 25) \cdot \vec{u}_y$$

Calcula: a) Su vector posición para el instante inicial y para $t = 5$ s. b) La velocidad media entre ambas posiciones. c) La velocidad media entre t y $t + \Delta t$ y su velocidad en un instante t. d) La velocidad inicial y en el instante $t = 5$ s.

a) Para $t = 0$: $\vec{r}\,(0) = \vec{r}_0 = (40 - 8 \cdot 0) \cdot \vec{u}_x + (0^2 - 25) \cdot \vec{u}_y = (40 \cdot \vec{u}_x - 25 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 5$ s: $\vec{r}\,(5) = \vec{r}_5 = (40 - 8 \cdot 5) \cdot \vec{u}_x + (5^2 - 25) \cdot \vec{u}_y = 0 \cdot \vec{u}_x + 0 \cdot \vec{u}_y = 0$

b) El vector desplazamiento entre ambas posiciones es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_5 - \vec{r}_0 = 0 - (40 \cdot \vec{u}_x - 25 \cdot \vec{u}_y) = (-40 \cdot \vec{u}_x + 25 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

Luego, la velocidad media entre ellas vale:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_0}{5 - 0} = \frac{-40 \cdot \vec{u}_x + 25 \cdot \vec{u}_y}{5} = (-8 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

c) Para calcular la velocidad media entre t y $t + \Delta t$:

$$\vec{r}(t) = (40 - 8 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + (t^2 - 25) \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \left(40 - 8 \cdot (t + \Delta t)\right) \cdot \vec{u}_x + \left((t + \Delta t)^2 - 25\right) \cdot \vec{u}_y =$$

$$= (40 - 8 \cdot t - 8 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - 25\right) \cdot \vec{u}_y$$

Luego:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (-8 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + \left(2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_y$$

Y la velocidad media es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{(-8\cdot\Delta t)\cdot\vec{u}_x + \left(2\cdot t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2\right)\cdot\vec{u}_y}{\Delta t} =$$

$$= \left(-8\cdot\vec{u}_x + (2\cdot t + \Delta t)\cdot\vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

Como la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$, entonces:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\left(-8\cdot\vec{u}_x + (2\cdot t+\Delta t)\cdot\vec{u}_y\right) = (-8\cdot\vec{u}_x + 2\cdot t\cdot\vec{u}_y) \text{ m/s}$$

d) Su velocidad inicial es:

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = -8\cdot\vec{u}_x \text{ m/s}$$

y su velocidad para $t = 5$ s:

$$\vec{v}(5) = \vec{v}_5 = -8\cdot\vec{u}_x + 2\cdot 5\cdot\vec{u}_y = (-8\cdot\vec{u}_x + 10\cdot\vec{u}_y) \text{ m/s}$$

16. Un móvil se mueve según la siguiente ley horaria: $s = 2 + 10\cdot t + t^2$, expresada en unidades del S.I. Calcula:

a) Su celeridad media entre $t = 1$ s y $t = 4$ s.

b) Su celeridad media entre t y $t + \Delta t$.

c) La celeridad del móvil en cualquier instante.

d) Con los datos del ejercicio, ¿podemos conocer el vector velocidad?

a) Para $t = 1$ s: $s_1 = s(1) = 2 + 10\cdot 1 + 1^2 = 13$ m

Para $t = 4$ s: $s_4 = s(4) = 2 + 10\cdot 4 + 4^2 = 58$ m

La celeridad media entre ambos instantes es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_4 - s_1}{\Delta t} = \frac{58 - 13}{4 - 1} = 15 \text{ m/s}$$

b) En el instante t:

$$s(t) = 2 + 10\cdot t + t^2$$

En el instante $t + \Delta t$:

$$s(t+\Delta t) = 2 + 10\cdot(t+\Delta t) + (t+\Delta t)^2 = 2 + 10\cdot t + 10\cdot\Delta t + t^2 + 2\cdot t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2$$

El espacio recorrido vale $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = 10\cdot\Delta t + 2\cdot t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2$; por tanto, la celeridad media es:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\cdot\Delta t + 2\cdot t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = (10 + 2\cdot t + \Delta t) \text{ m/s}$$

c) La celeridad instantánea es:

$$c = \lim_{\Delta t\to 0} c_m = \lim_{\Delta t\to 0}(10 + 2\cdot t + \Delta t) = (10 + 2\cdot t) \text{ m/s}$$

d) Como la trayectoria del móvil es desconocida, no conocemos la dirección del vector velocidad ni, por tanto, el vector velocidad; tampoco conocemos nada sobre la aceleración normal del móvil, aunque sí sabemos que existe aceleración tangencial, pues el módulo de la velocidad cambia con el tiempo.

17. Las ecuaciones de la trayectoria de un cuerpo son: $x = 6 \cdot t + t^2$, $y = 10 + 5 \cdot t$, donde x e y se expresan en m y t en s. Determina:

a) La velocidad media durante el primer segundo y durante el tercer segundo.

b) Su velocidad en cualquier instante.

c) El módulo de la velocidad al cabo de un segundo y al cabo de tres segundos.

a) El primer segundo es el que transcurre entre $t = 0$ y $t = 1$ s:

Para $t = 0$: $P_0 = (0, 10) \rightarrow \vec{r}_0 = 10 \cdot \vec{u}_y$ m

Para $t = 1$ s: $P_1 = (7, 15) \rightarrow \vec{r}_1 = (7 \cdot \vec{u}_x + 15 \cdot \vec{u}_y)$ m

$$\Delta r = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (7 \cdot \vec{u}_x + 15 \cdot \vec{u}_x) - (10 \cdot \vec{u}_y) = (7 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

Como $\Delta t = 1$ s, entonces, la velocidad media durante el primer segundo es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{7 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y}{1} = (7 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

La velocidad media durante el tercer segundo es la velocidad media entre $t = 2$ s y $t = 3$ s:

Para $t = 2$ s: $P_2 = (16, 20) \rightarrow \vec{r}_2 = (16 \cdot \vec{u}_x + 20 \cdot \vec{u}_y)$ m

Para $t = 3$ s: $P_3 = (27, 25) \rightarrow \vec{r}_3 = (27 \cdot \vec{u}_x + 25 \cdot \vec{u}_y)$ m

$$\Delta r = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (27 \cdot \vec{u}_x + 25 \cdot \vec{u}_y) - (16 \cdot \vec{u}_x + 20 \cdot \vec{u}_y) = (11 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m}$$

Como $\Delta t = 1$ s, entonces, la velocidad media durante el tercer segundo es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{11 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y}{1} = (11 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

b) Calculamos la velocidad media entre t y $t + \Delta t$, y, luego, el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{r}(t) = \left((6 \cdot t + t^2) \cdot \vec{u}_x + (10 + 5 \cdot t) \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m}$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \left[\left(6 \cdot (t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + \left(10 + 5 \cdot (t + \Delta t)\right) \cdot \vec{u}_y\right] \text{ m}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \left[\left(6 \cdot \Delta t + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + (5 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y\right] \text{ m}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(6 \cdot \Delta t + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + (5 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} =$$

$$= \left((6 + 2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{m/s}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left((6 + 2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) = \left((6 + 2 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

O bien, utilizando derivadas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((6 \cdot t + t^2) \cdot \vec{u}_x + (10 + 5 \cdot t) \cdot \vec{u}_y\right) = \left((6 + 2 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{m/s}$$

La velocidad instantánea resulta:

$$\vec{v} = \left((6 + 2 \cdot t) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

c) La velocidad al cabo de un segundo es:

$$\vec{v}(1) = (6 + 2 \cdot 1) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y = \left(8 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

y su módulo vale:

$$\left|\vec{v}(1)\right| = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}43 \text{ m/s}$$

La velocidad al cabo de 3 s es:

$$\vec{v}(3) = (6 + 2 \cdot 3) \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y = \left(12 \cdot \vec{u}_x + 5 \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

y su módulo vale:

$$\left|\vec{v}(3)\right| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ m/s}$$

18. Calcula el valor absoluto de la aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta: a) Si su velocidad aumenta 30 m/s cada minuto. b) Si reduce su velocidad en 18 m/s cada 3 s.

Tomamos como eje *X* la recta sobre la que se mueve el cuerpo, haciendo coincidir el sentido positivo con el del movimiento; de ese modo, la velocidad en cualquier instante es $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_x$ y, como solo puede variar su módulo: $\Delta\vec{v} = \Delta v \cdot \vec{u}_x$.

a) La variación de velocidad y el intervalo de tiempo considerado son:

$$\Delta\vec{v} = 30 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s} \quad ; \quad \Delta t = 60 \text{ s}$$

Por tanto, el vector aceleración y su valor absoluto (módulo) son:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{30 \cdot \vec{u}_x}{60} = 0{,}5 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2 \ \rightarrow \ a = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) Cuando reduce su velocidad 18 m/s cada 3 s, tenemos:

$$\Delta\vec{v} = -18 \cdot \vec{u}_x \quad ; \quad \Delta t = 3 \text{ s}$$

Luego, el vector aceleración y su módulo, en este caso, son:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{-18 \cdot \vec{u}_x}{3} = -6 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2 \ \rightarrow \ a = -6 \text{ m/s}^2$$

19. La ficha técnica de un automóvil nuevo presenta las siguientes características: aceleración de 0 a 100 km/h en 12 s; adelantamiento de 80 km/h a 120 km/h en 15 s y tiempo de detención de 4 s cuando circula a 120 km/h. Las medidas se realizaron en tramos rectos. Expresa estas aceleraciones en m/s² y ordénalas en función de sus valores absolutos.

– Aceleración de 0 a 100 km/h en 12 s:

$$v_0 = 0 \text{ m/s} \quad ; \quad v = 100 \text{ km/h} = \frac{100\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 27{,}78 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{27{,}78 - 0}{12} = 2{,}31 \text{ m/s}^2$$

– Adelantamiento en 15 s:

$$v_0 = 80 \text{ km/h} = \frac{80\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 22{,}22 \text{ m/s} \quad ; \quad v = 120 \text{ km/h} = \frac{120\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 33{,}33 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{33{,}33 - 22{,}22}{15} = 0{,}74 \text{ m/s}^2$$

– Frenada en 4 s:

$$v_0 = 120 \text{ km/h} = \frac{120\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 33{,}33 \text{ m/s} \quad ; \quad v = 0 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 33{,}33}{4} = -8{,}33 \text{ m/s}^2$$

Por tanto:

$$|a_{frenada}| = 8{,}33 \text{ m/s}^2 > a_{arranque} = 2{,}31 \text{ m/s}^2 > a_{adelantamiento} = 0{,}74 \text{ m/s}^2$$

20. Un cuerpo se mueve con la siguiente velocidad:

$$\vec{v} = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot t + 5) \cdot \vec{u}_y$$

en unidades del S.I. Calcula:

a) Su aceleración media entre t = 2 s y t = 5 s.

b) Su aceleración media durante los dos primeros segundos de su movimiento.

c) Su aceleración media entre t y $t + \Delta t$.

d) Su aceleración instantánea.

a) Aceleración media entre t = 2 s y t = 5 s:

$$\vec{v}(2) = 4 \cdot 2 \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot 2 + 5) \cdot \vec{u}_y = (8 \cdot \vec{u}_x + 9 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(5) = 4 \cdot 5 \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot 5 + 5) \cdot \vec{u}_y = (20 \cdot \vec{u}_x + 15 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(5) - \vec{v}(2) = (20 \cdot \vec{u}_x + 15 \cdot \vec{u}_y) - (8 \cdot \vec{u}_x + 9 \cdot \vec{u}_y) = (12 \cdot \vec{u}_x + 6 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 5 - 2 = 3 \text{ s}$$

Luego:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{12 \cdot \vec{u}_x + 6 \cdot \vec{u}_y}{3} = (4 \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

b) Aceleración media en los dos primeros segundos:

$$\vec{v}(0) = 4 \cdot 0 \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot 0 + 5) \cdot \vec{u}_y = 5 \cdot \vec{u}_y \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(2) = 4 \cdot 2 \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot 2 + 5) \cdot \vec{u}_y = (8 \cdot \vec{u}_x + 9 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(2) - \vec{v}(0) = (8 \cdot \vec{u}_x + 9 \cdot \vec{u}_y) - (5 \cdot \vec{u}_y) = (8 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 2 - 0 = 2 \text{ s}$$

Luego:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{8 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y}{2} = (4 \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

c) Aceleración media entre t y $t + \Delta t$:

$$\vec{v}(t) = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot t + 5) \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + \left(2 \cdot (t + \Delta t) + 5\right) \cdot \vec{u}_y =$$

$$= (4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 5) \cdot \vec{u}_y$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = \left[(4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 5) \cdot \vec{u}_y\right] -$$
$$- \left[(4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + (2 \cdot t + 5) \cdot \vec{u}_y\right] = (4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

$$\Delta t = (t + \Delta t) - t = \Delta t$$

Luego:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} = (4 \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

d) Como la aceleración media vale lo mismo para cualquier intervalo de tiempo, es, por tanto, constante y coincide con la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = (4 \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

21. Razona sobre la veracidad o la falsedad de las siguientes proposiciones:

a) En un movimiento circular siempre existe aceleración.

b) En los movimientos rectilíneos no hay aceleración normal.

c) En un movimiento circular uniforme no hay aceleración.

d) En todo movimiento circular, la aceleración normal es constante.

a) Es cierta. En un movimiento circular, el vector velocidad cambia, al menos, continuamente de dirección; luego, siempre existe aceleración normal. Si, además, el módulo de la velocidad varía, también existirá aceleración tangencial.

b) Es cierta. En los movimientos rectilíneos, el vector velocidad no cambia de dirección; luego, no hay aceleración normal.

c) No es cierto. En un movimiento circular uniforme, el módulo de la velocidad permanece constante y no hay aceleración tangencial, pero su dirección cambia continuamente, por lo que tiene aceleración normal.

d) No es cierto. En los movimientos circulares, el radio de curvatura es constante y coincide con el radio de la circunferencia, *R*. La aceleración normal vale $a_n = v^2/R$ y solo será constante cuando lo sea *v*, es decir, en el movimiento circular uniforme, pero no en cualquier movimiento circular.

22. Determina en cuál de las situaciones siguientes tiene mayor aceleración un automóvil:

a) Pasa de 90 km/h a 115 km/h en 5 s, circulando en línea recta.

b) Toma una curva de 100 m de radio a una velocidad de 90 km/h.

a) Cuando pasa de 90 km/h (en unidades del S.I., 25 m/s) a 144 km/h (32 m/s) en 5 s, moviéndose en línea recta, su aceleración es tangencial y vale:

$$a = a_t = \frac{v - v_0}{t} = \frac{32 - 25}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \text{ m/s}^2$$

b) Cuando toma una curva de 100 m de radio a 90 km/h (25 m/s), su aceleración es normal y vale:

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{100} = \frac{625}{100} = 6{,}25 \text{ m/s}^2$$

Es mayor la aceleración del automóvil cuando toma la curva.

23. **Indica la certeza o la falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) Si los vectores velocidad y aceleración son paralelos, no hay aceleración normal.

b) Si los vectores velocidad y aceleración forman un ángulo de 60°, el módulo de la velocidad está aumentando.

c) Si el ángulo es de 180°, el cuerpo solo tiene aceleración normal.

d) Si el ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración es de 120°, la aceleración tangencial es positiva.

a) Es cierta. Si ambos vectores son paralelos, toda la aceleración se encuentra en el eje tangencial y, por tanto, no tiene componente perpendicular o normal a la velocidad; la aceleración normal es nula.

b) Es cierta. Si ambos vectores forman 60°, la componente tangencial, o paralela a la velocidad, de la aceleración es positiva; luego, su aceleración tangencial es positiva, lo que significa que el módulo de la velocidad aumenta con el tiempo.

c) Es falso. Si forman 180°, la aceleración tiene la misma dirección y el sentido opuesto a la velocidad, por lo que no tiene componente normal y la componente tangencial es negativa.

d) Es falso. Si forman 120°, la componente tangencial de la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad; luego, la aceleración tangencial es negativa, y el módulo de la velocidad disminuye con el tiempo.

24. **Un atleta que corre con ritmo constante, es decir, recorre la misma distancia cada segundo, marcha primero por una pista circular y después por una pista recta. Indica en qué pista: a) Su celeridad es constante. b) Su vector velocidad es constante. c) Tiene aceleración.**

a) La celeridad del atleta es constante en cualquiera de las pistas, pues en ambas recorre el mismo espacio cada segundo.

b) El vector velocidad es constante en la pista recta, pues en ella no cambia de dirección, y su módulo, la celeridad, es constante; sin embargo, en la pista circular, aunque el módulo de la velocidad sigue siendo constante, su dirección cambia continuamente.

c) Solo existe aceleración en la pista circular; en concreto, aceleración normal, pues la velocidad solo cambia de dirección. En la pista recta no existe aceleración, pues la velocidad no cambia ni de módulo ni de dirección.

25. **Cuando lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba, sube y baja por la misma línea: a) ¿Tiene aceleración normal? b) ¿Cómo es su aceleración tangencial en la subida? c) ¿Y en la bajada?**

a) El cuerpo no tiene aceleración normal, pues, aunque su velocidad en la bajada tiene sentido contrario al de la subida, no cambia de dirección.

b) Cuando el cuerpo sube, el módulo de su velocidad disminuye hasta anularse; luego, su aceleración tangencial es negativa.

c) En la bajada, el módulo de la velocidad aumenta, pues cada vez va más rápido; luego, su aceleración tangencial es positiva.

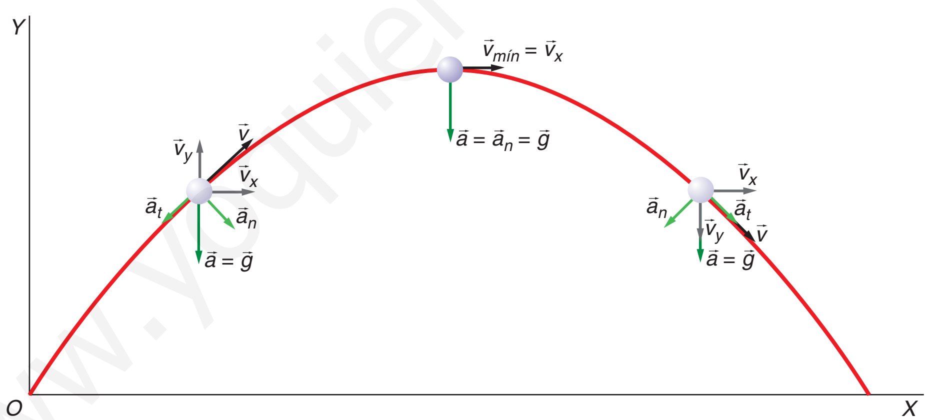
26. Contesta a las preguntas de la actividad anterior en el caso de que lancemos la pelota con cierta inclinación, de forma que realice un tiro oblicuo.

a) La trayectoria de un cuerpo que realiza un tiro oblicuo es una línea curva, en concreto, una parábola; por ello, también se denomina tiro parabólico. Luego, la velocidad, tangente a la trayectoria en cada punto, cambia de dirección continuamente y, por tanto, existe aceleración normal. Otra forma de comprobarlo es descomponer la aceleración del cuerpo, que coincide con la de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo, en sus componentes intrínsecas, tangente y normal, en cada punto de la trayectoria.

b) La componente horizontal de la velocidad del cuerpo, v_x, es constante, pero la componente vertical de su velocidad, v_y, disminuye en la subida hasta anularse cuando el cuerpo alcanza la altura máxima; por tanto, el módulo de la velocidad, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, disminuye en la subida y, entonces, la aceleración tangencial es negativa. Podemos comprobarlo si descomponemos la aceleración en un punto de subida; el vector $\vec{a}_t$ está dirigido en sentido contrario al vector velocidad; luego, a_t es negativa.

c) En la bajada, la componente vertical de la velocidad es negativa, pero aumenta en valor absoluto, luego el módulo de la velocidad aumenta y, por tanto, la aceleración tangencial es positiva. Se puede comprobar este resultado descomponiendo en un punto de la bajada la aceleración en sus componentes intrínsecas; el vector $\vec{a}_t$ tiene el mismo sentido que el vector velocidad, luego a_t es positiva.

En la gráfica se muestra lo que se acaba de explicar:



27. El módulo de la velocidad de un cuerpo que recorre una circunferencia de 300 m de radio varía de acuerdo con la expresión:

$$\boldsymbol{v = 10 + 4 \cdot t}$$

en unidades del S.I. Calcula:

a) La aceleración tangencial del cuerpo en cualquier instante.

b) Su aceleración normal para t = 5 s.

c) El módulo de su aceleración para t = 5 s.

a) La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo; luego:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(10 + 4 \cdot t) = 4 \text{ m/s}^2$$

Para realizar el cálculo sin utilizar el concepto de derivada, calculamos la aceleración tangencial media entre t y $t + \Delta t$, y, luego, calculamos el límite cuando $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = 10 + 4 \cdot t \; ; \; v(t + \Delta t) = 10 + 4 \cdot (t + \Delta t) = 10 + 4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = 4 \cdot \Delta t$$

La aceleración tangencial media vale:

$$a_{tm} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 \cdot \Delta t}{\Delta t} = 4 \text{ m/s}^2$$

Como es constante para cualquier intervalo de tiempo, coincide con la aceleración instantánea; por tanto: $a_t = 4$ m/s^2.

b) Para $t = 5$ s, el módulo de la velocidad es 30 m/s; luego, su aceleración normal es:

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{30^2}{300} = \frac{900}{300} = 3 \text{ m/s}^2$$

c) El módulo de la aceleración total es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m/s}^2$$

28. La ecuación del movimiento de un cuerpo es:

$$\boldsymbol{\vec{r} = 2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y}$$

expresada en unidades del S.I. Calcula su aceleración instantánea.

Vamos a resolver el problema de dos formas distintas:

a) Utilizando derivadas:

El vector velocidad es la derivada del vector posición respecto al tiempo; luego:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y) = (4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

El vector aceleración es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo; por tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) = 4 \cdot \vec{u}_x + 0 \cdot \vec{u}_y = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

b) Utilizando límites:

El vector velocidad instantánea es el límite de la velocidad media entre t y $t + \Delta t$, cuando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{r}(t) = 2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2 \cdot (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_y =$$

$$= \left(2 \cdot t^2 + 4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + (4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \left[\left(4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y\right] \text{ m}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\left(4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} =$$

$$= \left((4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y\right) \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{lím}}\, \vec{v}_m = \underset{\Delta t \to 0}{\text{lím}} \left[(4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y\right] = (4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media entre t y $t + \Delta t$, cuando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v}\,(t) = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v}\,(t + \Delta t) = 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y = (4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}\,(t + \Delta t) - \vec{v}\,(t) = 4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x}{\Delta t} = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{lím}}\, \vec{a}_m = \underset{\Delta t \to 0}{\text{lím}}\, 4 \cdot \vec{u}_x = 4 \cdot \vec{u}_x \text{ m/s}^2$$

29. El vector posición de un cuerpo es:

$$\boldsymbol{\vec{r} = (10 + t^2) \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_y}$$

expresado en unidades del S.I. Calcula:

a) La ecuación de la trayectoria.

b) La velocidad, y su módulo, en cualquier instante.

c) Su aceleración en cualquier instante.

d) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

a) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = 10 + t^2 \;\; ; \;\; y = 2 \cdot t^2$$

Despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, tenemos:

$$t^2 = \frac{y}{2} \to x = 10 + \frac{y}{2} \to 2 \cdot x - y - 20 = 0$$

que es la ecuación implícita de la trayectoria. Si despejamos y, tenemos:

$$y = 2 \cdot x - 20$$

que es la ecuación explícita de la trayectoria y se corresponde con la de una línea recta.

b) Podemos obtener la velocidad utilizando derivadas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(10 + t^2) \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_y\right] = (2 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

O, también, calculando el límite de la velocidad media:

$$\vec{r}(t) = (10 + t^2) \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \left(10 + (t + \Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + 2 \cdot (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{u}_y =$$

$$= \left(10 + t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + \left(2 \cdot t^2 + 4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_x + \left(4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot (\Delta t)^2\right) \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} =$$

$$= (2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + (4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left[(2 \cdot t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + (4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y\right] = (2 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}$$

El módulo del vector velocidad es:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(2 \cdot t)^2 + (4 \cdot t)^2} = \sqrt{20 \cdot t^2} = \sqrt{20} \cdot t \text{ m/s}$$

c) Utilizando derivadas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y) = (2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

Calculando el límite de la aceleración media:

$$\vec{v}(t) = 2 \cdot t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot t \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = 2 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{u}_y =$$

$$= (2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_x + (4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_y$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_y}{\Delta t} = (2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left(2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y\right) = (2 \cdot \vec{u}_x + 4 \cdot \vec{u}_y) \text{ m/s}^2$$

El módulo del vector aceleración es:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ m/s}^2$$

d) La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{20} \cdot t\right)}{dt} = \sqrt{20} \text{ m/s}^2$$

También podemos calcularla mediante el límite de la aceleración tangencial media:

$$v(t) = \sqrt{20} \cdot t \quad ; \quad v(t + \Delta t) = \sqrt{20} \cdot (t + \Delta t) = \sqrt{20} \cdot t + \sqrt{20} \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = \sqrt{20} \cdot \Delta t$$

$$a_{tm} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sqrt{20} \cdot \Delta t}{\Delta t} = \sqrt{20} \text{ m/s}^2$$

Como la aceleración tangencial media es constante, coincide con el valor instantáneo; luego, la aceleración tangencial es $a_t = \sqrt{20}$ m/s².

La aceleración normal la calculamos a partir de la expresión:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Sustituyendo los valores conocidos, $a = \sqrt{20}$ m/s² y $a_t = \sqrt{20}$ m/s², tenemos:

$$20 = 20 + a_n^2 \quad \rightarrow \quad a_n = 0$$

La aceleración normal es nula en cualquier instante; luego, el movimiento es rectilíneo.