

Dada la función  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$ , se pide:

- a) Calcular las rectas tangente y normal en los puntos de abscisa  $x = 4$ ,  $x = 2$ .

Primero deberemos calcular el dominio de la función.

La función está definida para todos los números reales  $x$  que cumplan que  $\frac{x}{4-x} > 0$ . Es decir, en el intervalo

$(0,4)$ . (El resultado viene de resolver la inecuación fraccionaria)

Calculamos la derivada de la función.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln x - \ln(4-x)$

$$f'(x) = \frac{4}{x(4-x)}$$

En  $x = 4$  la función no está definida, por lo tanto, no tiene sentido calcular sus rectas tangente y normal.

En  $x = 2$ .  $f(2) = 0$   $f'(2) = 1$

Recta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = x - 2$$

Recta normal

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y = -x + 2$$

- b) Calcula  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Como la función está definida en el intervalo  $(0,4)$ , no tiene sentido calcular estos límites.

- 15.) Dada la función  $f : (0, +\infty)$  definida por  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ . Calcula  $a$  y  $b$ , sabiendo que la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 1$  viene dada por  $y = -2$ .

Del enunciado del problema extraemos la siguiente información:

- La recta tangente es  $y = -2 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$ .
- El punto de tangencia es  $(1, -2) \Rightarrow f(1) = -2$ .

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = b = -1}$$

- 16.) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función  $f(x) = x \cdot |x + 3|$ . Representa la función.

$$|x + 3| = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x + 3 & \text{si } x > -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x^2 + 3x & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

### Estudio de la continuidad de la función.

La función es continua en  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  por ser función polinómica.

Estudio de la continuidad en  $x = -3$  (Punto de ruptura)

1.  $f(-3) = 0$

$$2. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} (-x^2 - 3x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + 3x) = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$$

3.  $f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$

Conclusión: La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

### Estudio de la derivabilidad de la función.

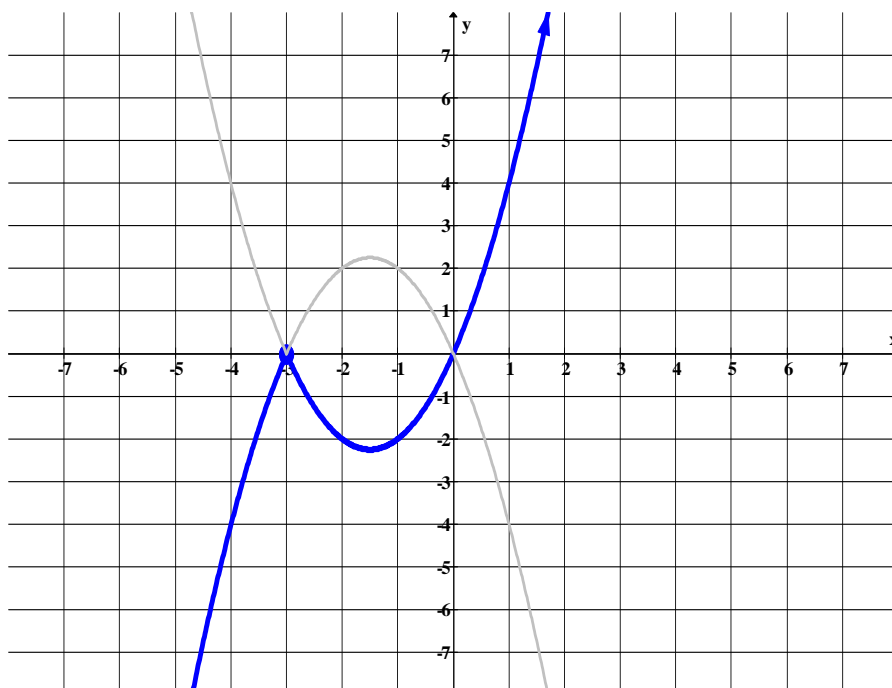
La función es derivable en  $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$  por ser función polinómica.

Estudio en  $x = -3$

$$\left. \begin{aligned} f'(-3^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(-h+3)}{h} = 3 \\ f(-3+h) &= -(-3+h)^2 - 3(-3+h) = -h^2 + 3h \\ f'(-3^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h-3)}{h} = -3 \\ f(-3+h) &= (-3+h)^2 + 3(-3+h) = h^2 - 3h \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-3^-) \neq f'(-3^+) \text{ La función no es}$$

derivable en este punto. Es un punto anguloso.

$$\text{Representación de } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x^2 + 3x & \text{si } x > -3 \end{cases}$$



**Conclusión:**

La función es continua en  $\mathbf{R}$  y derivable en  $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

17.) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función  $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & , x \leq 2 \\ -2x & , x > 2 \end{cases}$ .

Para empezar, observa que la raíz de la función racional está contenida en su intervalo de definición. ¡Ya tenemos una discontinuidad!

Estudio de la continuidad de la función.

En  $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$  la función es continua por ser racional. (La raíz del denominador no está contenida en dichos intervalos)

En  $x = 1$ , presenta una D.N.E. de salto infinito. Compruébalo.

En  $(2, +\infty)$  la función es continua por ser polinómica.

Estudio en  $x = 2$  Punto de ruptura.

1.  $f(2) = 3$

2. 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x) = -4 \end{array} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

En  $x = 2$  presenta una D.N.E. de salto finito.

Estudio de la derivabilidad de la función.

**Recuerda:** en los puntos en los que la función no es continua tampoco es derivable.

Luego en  $x = -1$ ,  $x = 2$  la función no es derivable.

En  $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$  la función es derivable por ser racional y tener la raíz del denominador fuera del intervalo.

En  $(2, +\infty)$  es derivable por ser polinómica.

**Conclusión:**

La función es continua y derivable en  $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

20.) Determina si la función  $f(x) = x \cdot |x|$  es derivable en  $x = 0$ .

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Recuerda:** para que una función sea derivable en un punto, primero debe ser continua en ese punto.

Estudio de la continuidad en  $x = 0$

1.  $f(0) = 0$

2. 
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

3.  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Dado que la función es continua en este punto, puede ser derivable.

Estudio de la derivabilidad en  $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h) = 0 \\ f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow f'(0) = 0$$

**Conclusión:** la función es derivable en  $x = 0$