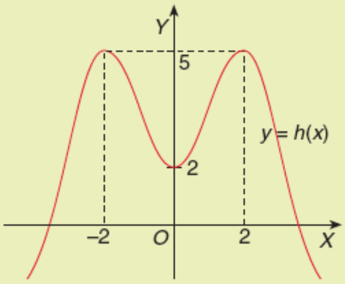
Unidad 13 – Aplicaciones de las derivadas

PÁGINA 299

cuestiones iniciales

1. Estudia la monotonía y los extremos relativos de la función $y = h(x)$ en la gráfica dada.



2. ¿Qué dos números cuya suma es 20 dan producto máximo? Ayúdate de una tabla de valores.

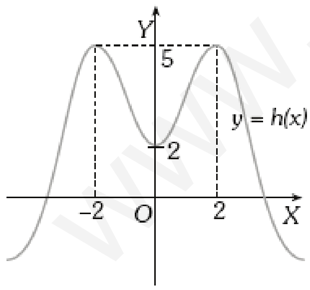
3. Estudia el crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g(x) = 16x - 2x^2$

4. En una tienda de golosinas han estudiado que si venden el kilo de caramelos a x € los beneficios al día serán $B(x) = -12{,}5x^2 + 150x - 250$. ¿A partir de que precio obtiene ganancias? ¿A qué precio obtiene beneficio máximo? ¿Cuánto vale este?

SOLUCIONES

1. La solución queda:



La función h(x) es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

Además tiene dos máximos relativos en los puntos $(-2,5)$ y $(2,5)$, y un mínimo relativo en el punto $(0,2)$.

2. Dos números cualquiera que sumen 20 son (x) y $(20-x)$.

Su producto es: $P=(20-x)\,x=20x-x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con un máximo relativo en su vértice (10, 100).

Es decir, los números pedidos son 10 y 10.

3. El estudio queda del siguiente modo:

a) Es una función de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola estrictamente decreciente en todo su dominio, es decir, en $\mathbb{R}-\{0\}$ y carece de extremos relativos.

b) Es una función cuadrática. Su gráfica es una parábola con un máximo relativo en su vértice (4, 32); estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,4)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(4,+\infty)$.

4. La solución queda:

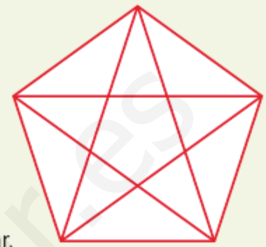
Sea la ecuación: $-12,5x^2+150x-250=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\text{ y }\; x=10$.
Por tanto obtiene ganancias a partir de 2 euros el kilo de caramelos.
El beneficio máximo lo obtiene en el vértice para $x=6$ euros el kilo, y este beneficio asciende a 200 euros diarios.

PÁGINA 313

ACTIVIDADES

■ Para que cojas soltura en esta técnica de organización, resuelve los siguientes problemas:

1. **Fonoteca.** La empleada de la fonoteca no ha parado de trabajar en toda la semana. El lunes recibió varios discos y marcó algunos de ellos. El martes recibió tantos discos nuevos como no había marcado el lunes, y marcó 12. El miércoles recibió 14 más que el lunes, y marcó doble número que el lunes. El jueves recibió el doble de los discos que había marcado el miércoles, y marcó 10. El viernes recibió 4 discos y marcó 14 menos de los que había recibido el miércoles. El sábado marcó los 20 discos que le quedaban. ¿Cuántos discos recibió el lunes?
2. **Camión y tractor.** Un camión tarda en adelantar a un tractor, una vez que lo alcanza, el doble de lo que tardan ambos en cruzarse cuando circulan en direcciones opuestas. ¿Qué relación existe entre las velocidades de ambos?
3. **Relojes de arena.** Disponemos de dos relojes de arena: el uno mide cuatro minutos y el otro nueve minutos. Se trata de conseguir medir intervalos de uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez minutos. Describe, razonadamente, los procedimientos a utilizar.
4. **Triángulos.** La figura adjunta muestra la estrella pitagórica inscrita en un pentágono regular. ¿Cuántos triángulos pueden verse en esta figura?



SOLUCIONES

1. Vamos a organizar los datos en una tabla:

	Recibe	Marca
Lunes	X	M
Martes	X − M	12
Miércoles	X + 14	2M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 − 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X+X-M+X+14+4M+4-$$
$$(M+12+2M+10+X)=20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3X+3M+18-3M-X-22=20$$

$2X=24 \Rightarrow \boxed{X=12}$ discos recibió el lunes.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: $v+w=2(v-w) \Rightarrow \boxed{v=3w}$

Es decir, la velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

- *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

- *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9 y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

- *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

- *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

- *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

- *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

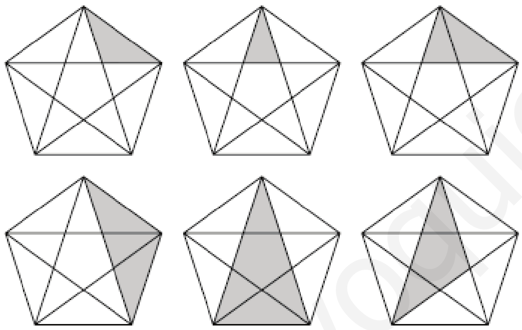
- *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos de R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

- *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

- *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

- *Para medir 10 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. en esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:



En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay $5 x 6 = 30$ triángulos.

PÁGINA 316

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra los valores de x que hacen ciertas las desigualdades en cada uno de los siguientes apartados:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2$; $D[f(x)] > 0$ b) $g(x) = \frac{3}{x^2}$; $g'(x) < 0$ c) $h(x) = x \cdot e^x$; $h'(x) > 0$

2. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ c) $h(x) = \frac{2}{x}$ e) $j(x) = \ln x$

   b) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$ d) $i(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ f) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

3. Una compañía de autobuses observa que sus ingresos dependen del precio del billete según la función:

$$I(p) = 18p - 3p^2$$

   siendo p el precio del billete en euros. ¿Para qué valores de p los ingresos aumentan?

4. En una empresa se ha hecho un estudio sobre el rendimiento, en tanto por ciento, de los trabajadores en función del tiempo a lo largo de un día cualquiera, y se ha obtenido la función:

$$f(t) = 3\,200t - 400t^2, \quad 0 < t < 8$$

   con t en horas. ¿En qué periodo de tiempo el rendimiento aumenta? ¿En qué periodo de tiempo disminuye?

5. La producción de tomates en un invernadero depende de la temperatura que hay en el mismo, mediante la expresión:

$$P(x) = -x^3 + 48x^2 - 720x$$

   con $P(x)$ en kg y x en grados centígrados. ¿Entre qué valores hay que mantener la temperatura del invernadero para que la producción aumente?

6. Determina los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = 2x^2 + 8x - 3$ d) $y = 1 - 24x + 6x^2 + 8x^3 - 3x^4$ g) $y = \ln(x^2 + 1)$

   b) $y = 4 - 3x$ e) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ h) $y = x^2 \cdot e^x$

   c) $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$ f) $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ i) $y = \frac{x^2}{x + 1}$

7. Calcula el valor de K para el cual la función $f(x) = x^3 + Kx^2 - 3x$ tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

8. Dada la función $f(x) = ax - x^2 + b$, halla a y b para que esta función tenga un máximo relativo en el punto (2, 7).

9. Halla dos números cuya suma sea 6 unidades y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

a) $D[f(x)]=3x^2-12x \Rightarrow 3x^2-12x>0 \Rightarrow (-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

b) $D[g(x)]=-\dfrac{6}{x^3} \Rightarrow -\dfrac{6}{x^3}<0 \Rightarrow (0,+\infty)$

c) $D[h(x)]=e^x+xe^x \Rightarrow e^x+xe^x>0 \Rightarrow (-1,+\infty)$

2. Los intervalos quedan:

a) $f'(x)=2x-5$ es creciente en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$.

b) $g'(x)=-3x^2+12x-9$ es creciente en $(1,3)$ y decreciente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

c) $h'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ es decreciente en $\mathbb{R}-\{0\}$.

d) $i'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ es creciente en $(-1,1)$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

e) $j'(x)=\dfrac{1}{x}$ es creciente en su dominio $(0,+\infty)$.

f) $k'(x)=\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$ es creciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y decreciente en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

3. Los ingresos aumentan para los valores de p que verifiquen I'(p)>0.
Es decir: $I'(p)=18-6p>0 \Rightarrow p\in(0,3)$.

4. El rendimiento aumenta para los valores de t que hacen $f'(t)>0$ y disminuye para los valores de t que hacen $f'(t)<0$.

La derivada queda: $f'(t)=3200-800t \Rightarrow \begin{cases} f'(t)>0 \Rightarrow t\in(0,4) \\ f'(t)<0 \Rightarrow t\in(4,8) \end{cases}$

5. La producción aumenta para todos los valores de x que verifiquen $P'(x)>0$.
Queda: $P'(x)=-3x^2+96x-720 \Rightarrow P'(x)>0\ \forall x\in(12,20)$.

6. Queda en cada caso:

a) Mínimo en el punto $(-2,-11)$.

b) Carece de máximos y mínimos relativos.

c) Máximo en $(0,2)$ y mínimo en $(2,-10)$.

d) Mínimo relativo en $(1,-12)$ y máximos relativos en los puntos $(-1,20)$ y $(2,-7)$.

e) Máximo relativo en $(1,5)$ y mínimo relativo en $(3,1)$.

f) Máximo relativo en $(0,2)$.

g) Mínimo relativo en $(0,0)$.

h) Mínimo relativo en $(0,0)$ y máximo relativo en $\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)$.

i) Mínimo relativo en $(0,0)$ y máximo relativo en $(-2,-4)$.

7. La función debe verificar que $f'(3)=0$ y $f''(3)>0$.

Por tanto:

$$f'(x)=3x^2+2Kx-3 \;\Rightarrow\; f'(3)=24+6K=0 \;\Rightarrow\; K=-4$$
$$f''(x)=6x+2K=6x-8 \;\Rightarrow\; f''(3)>0$$

Por tanto, el valor buscado es $K=-4$.

8. La función tiene un máximo relativo en $(2,7)$ si verifica:

$$\left.\begin{array}{r} f(2)=7 \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-4+b=7 \\ a-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b=3 \\ a=4 \end{array}$$

9. Los números son (x) y $(6-x)$.

El producto queda: $P=(6-x)\cdot x^2=6x^2-x^3$.

Este producto es máximo para $x=4$. Los números buscados son 4 y 2.

PÁGINA 317

10. Una empresa estima que los ingresos y gastos anuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por:

Ingresos: $I(x) = 2x^2 + 360x$ Gastos: $G(x) = 4x^2 + 120x + 70$

a) Encuentra la función que dé el beneficio de la empresa.

b) ¿Cuántas unidades debe fabricar para que el beneficio sea máximo?

c) ¿A cuántos euros asciende este beneficio máximo?

11. Se desea construir el marco para una puerta rectangular que tenga 2,5 m² de luz. Se sabe que el coste del marco es de 3 euros por cada metro de alto y 2 euros por cada metro de ancho. Halla las dimensiones de la puerta de marco lo más económico posible.

12. De todas las fincas rectangulares de 1 600 m² de área, ¿cuál es la más barata de cercar?

13. El ayuntamiento de un pueblo dispone de 1 440 metros de valla para cercar tres pistas rectangulares, unidas por el lado mayor y consecutivas, para dedicarlas a entrenamientos de atletismo. Halla las dimensiones de estas que hacen que su área sea máxima.

14. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo (en años) que lleva funcionando, viene dado por:

$$f(t) = 9 - (t - 2)^2 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 6$$

¿En qué momento alcanzó su valor máximo?

15. ¿Qué dimensiones debe tener una botella cilíndrica de 1 litro de capacidad para que se utilice en su construcción la menor cantidad de material posible?

16. Halla el volumen máximo de todos los cilindros inscritos en una esfera de 40 cm de radio.

17. La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 48 cm. Halla las dimensiones para que el volumen sea máximo. ¿Qué valor alcanza este volumen máximo?

18. Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área que podemos cercar con una cuerda de 24 cm.

19. Una empresa maderera arroja diariamente material según la función:

$$p(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$$

siendo p la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día con $8 \leq t \leq 20$.

¿En qué momento del día aumenta la cantidad de material que arroja? ¿en cuál disminuye? Halla la cantidad máxima de material que arroja y a qué hora se produce eso.

10. La solución queda:

a) Función Beneficio $B(x) = I(x) - G(x)$

$\Rightarrow B(x) = (2x^2 + 360x) - (4x^2 + 120x + 70) = -2x^2 + 240x - 70$

b) $B'(x) = -4x + 240 = 0 \Rightarrow x = 60$

$B''(60) < 0 \Rightarrow$ El beneficio es máximo al vender 60 unidades del producto.

c) Para $x = 60 \Rightarrow B(60) = 7130$ euros.

El beneficio máximo es de 7130 euros.

11. Llamamos x a la anchura de la puerta e y a la altura.

Obtenemos de las condiciones del enunciado que: $x \cdot y = 2{,}5 \Rightarrow y = \dfrac{2{,}5}{x}$.

Hemos de minimizar el coste del marco, que viene dado por: $C = 6y + 4x = \dfrac{15 + 4x^2}{x}$.

Derivando e igualando a cero: $C'(x) = \dfrac{4x^2 - 15}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1{,}94$

Como: $C''(1{,}94) > 0 \Rightarrow$ El coste es mínimo para: $x = 1{,}94$ m; $y = 1{,}29$ m.

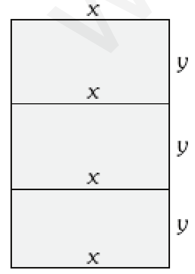
12. Llamando x e y a los lados de la finca rectangular obtenemos:

$$x \cdot y = 1600 \Rightarrow y = \frac{1600}{x} \Rightarrow \text{Perímetro} = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{1600}{x}$$

Y este perímetro es de longitud mínima para $x = 40$ m e $y = 40$ m.

Por tanto, la más barata de cercar es un cuadrado de 40 m de lado.

13. La solución queda:



Observando el dibujo tenemos:

$$4x + 6y = 1400 \Rightarrow y = \frac{720 - 2x}{3}$$

$$\text{Área} = 3 \cdot x \cdot y = 3 \cdot x \cdot \left(\frac{720 - 2x}{3} \right) = 720x - 2x^2$$

El área es máxima para $x = 180$ m e $y = 120$ m.

14. La empresa alcanza el valor máximo en $f'(t) = 0$ y $f''(t) < 0$, es decir, para $t = 2$ años.

15. La solución queda:

Llamamos *r* al radio de la base y *h* a la altura del cilindro. Ocurre: $\pi r^2 \cdot h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

Cantidad de material $= 2\pi r\, h + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$

Esta cantidad es mínima para:

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\,\text{dm};\ h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,\text{dm, es decir, las dimensiones son } r = 0{,}54\,\text{dm y } h = 1{,}08\,\text{dm.}$$

16. La solución queda:

Llamamos *r* al radio de la base y *h* a la altura del cilindro. Según las condiciones del enunciado ocurre que:

$$h^2 + (2r)^2 = (80)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{6\,400 - h^2}{4}$$

Operando:

$$\text{Vol} = \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot \frac{6\,400 - h^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(6\,400\,h - h^3\right) \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{4}\left(6\,400 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \pm 46{,}2\,\text{cm}$$

$$V''(46{,}42) < 0 \Rightarrow \text{El volumen es máximo para: } h = 46{,}2\,\text{cm};\ r = 32{,}7\,\text{cm.}$$

17. Llamando *x* a la arista básica e *y* a la arista lateral se debe verificar:

$$8x + 4y = 48 \Rightarrow 2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$$

$\text{Volumen} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (12 - 2x) = 12x^2 - 2x^3$; es máximo para $x = 4\,\text{cm}$ e $y = 4\,\text{cm}$. Es decir, el prisma de volumen máximo es un cubo de 4 cm de lado.

18. Llamando *x* e *y* a los lados del rectángulo se debe verificar: $2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12$.

$\text{Área} = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2$ debe ser máximo.

El área es máxima para $x = 6\,\text{cm}$ e $y = 6\,\text{cm}$.

Por tanto, el rectángulo es un cuadrado de 6 cm de lado.

19. La cantidad de material aumenta cuando la función es creciente y disminuye cuando es decreciente.

Esta función es creciente $(-\infty; 3{,}3) \cup (10, +\infty)$, y decreciente en $(3{,}3; 10)$; por tanto, la cantidad de material aumenta para $t \in (10, 20)$ y disminuye para $t \in (8, 10)$.

El máximo de esta función está en $(3{,}3; 2{,}48)$, luego la cantidad máxima de material está en $t = 3{,}3$ y arroja 2,48 kg, pero esta hora se sale del intervalo fijado.

ACTIVIDADES FINALES

20. Estudia la concavidad de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 - 2$
b) $y = 4 - x^2$
c) $y = 2 - 3x^2 - x^3$
d) $y = \dfrac{2}{x}$
e) $y = \ln(x - 1)$
f) $y = 2(x - 1)^3$

21. Halla los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 8x^2 - x^4 - 2$
b) $y = 3(x + 2)^3$
c) $y = x^6 - 15x^2 - 1$

22. Halla a, b, c para que la función $y = ax^3 + x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en $(0, 3)$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

23. La función $f(x) = x^3 + px + q$ tiene un mínimo que vale 3 para $x = 2$. Halla sus máximos y mínimos, si es que los tiene, y su punto de inflexión.

24. Halla el valor de m para el cual la función $y = x^4 + mx^2 + 2$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

25. Representa gráficamente la función que se ajuste a cada una de las siguientes condiciones:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Mínimos relativos $(-1, -4)$, $(1, -4)$; Máximo relativo $(0, -3)$; Cortes con el eje OX en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$, simétrica respecto a OY.

b) Dom $g = \mathbb{R} - \{+1, -1\}$; Máximo relativo $(0, -1)$; Asíntotas verticales $x = 1$, $x = -1$; asíntota horizontal $y = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \infty$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$; Asíntotas las rectas de ecuaciones $x = 0$; $y = x$; Máximo relativo $(-1, -2)$ y mínimo relativo $(1, 2)$; Simétrica respecto al origen de coordenadas y no posee puntos de corte con los ejes.

26. Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$
b) $g(x) = 3x^2 - 2x^3$
c) $h(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 1$
d) $k(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$
e) $l(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$
f) $m(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$
g) $p(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$
h) $i(x) = \dfrac{4 - x}{x^2 - 1}$
i) $v(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$
j) $w(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

27. Se ha comprobado que la evolución, desde el año 1980 ($t = 0$) del número de ejemplares del lince ibérico sigue la ley:

$$N = \frac{t + 2}{t + 1} \quad \text{con } N = \text{miles de ejemplares y } t = \text{años}$$

¿Cómo va evolucionando el lince ibérico? ¿Se puede considerar especie en peligro de extinción?

20. En cada uno de los casos queda:

Cóncava hacia las y negativas en $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$.

a) Cóncava hacia las y negativas en todo $\mathbb{R}$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-1,+\infty)$.
Cóncava hacia las y positivas en $(-\infty,-1)$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,0)$.
Cóncava hacia las y positivas en $(0,+\infty)$.

b) Cóncava hacia las y negativas en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,1)$.
Cóncava hacia las y positivas en $(1,+\infty)$.

21. Quedan del siguiente modo:

a) $y'=16x-4x^3 \Rightarrow y''=16-12x^2 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Esta función tiene los dos siguientes puntos de inflexión: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{62}{9}\right)$ y $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{62}{9}\right)$.

b) Esta función tiene un punto de inflexión en: $(-2,0)$.

c) Esta función tiene dos puntos de inflexión en: $(1,-15)$ y $(-1,-15)$.

22. La función debe verificar:

$$\left.\begin{array}{r} 3=c \\ b=0 \\ 6a+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c=3 \\ b=0 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función queda}: y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3.$$

Esta función presenta un máximo relativo en $\left(2,\dfrac{13}{3}\right)$, un mínimo relativo en $(0,3)$ y un punto de inflexión en $\left(1,\dfrac{11}{3}\right)$.

Por tanto, no tiene un máximo en $(0,3)$, sino un mínimo.

No existe ningún valor de a, b, c que verifique las condiciones del enunciado.

23. La función debe verificar:

$$\left.\begin{array}{r} 3=8+2p+q \\ 12+p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} p=-12 \\ q=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función queda}: f(x)=x^3-12x+19.$$

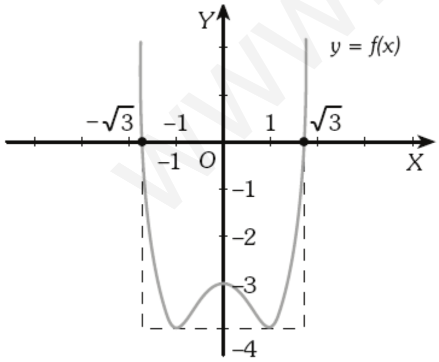
Esta función presenta un máximo en $(-2,35)$, un mínimo en $(2,3)$. Además tiene un punto de inflexión en $(0,19)$.

24. La función debe cumplir $y''(x)=0$ e $y'''(x)\neq 0$; por tanto, $12+2m=0 \Rightarrow m=-6$.

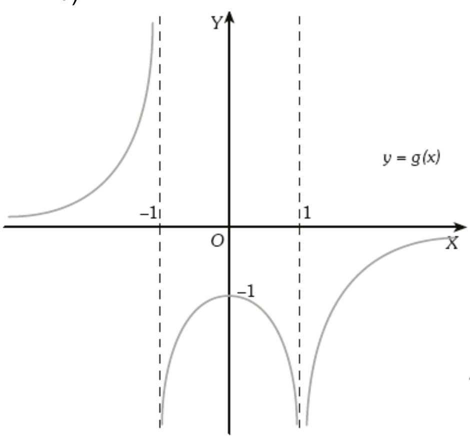
La función $y=x^4-6x^2+2$ tiene un punto de inflexión en $(1,-3)$ y otro en $(-1,-3)$.

25. Las representaciones quedan:

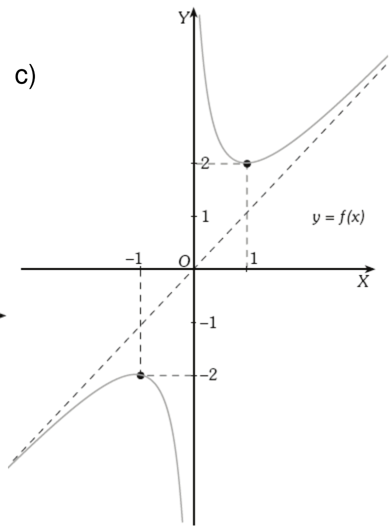
a)



b)

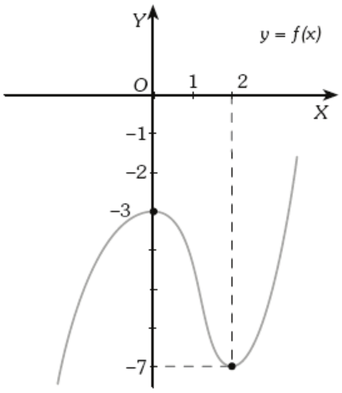


c)



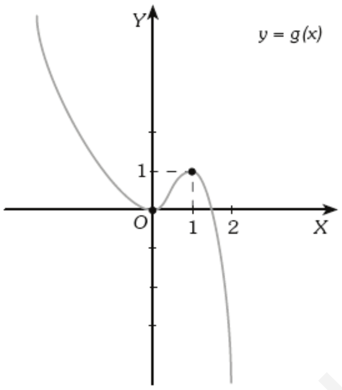
26. Cada una de las gráficas quedan:

a) $f(x)=x^3-3x^2-3$



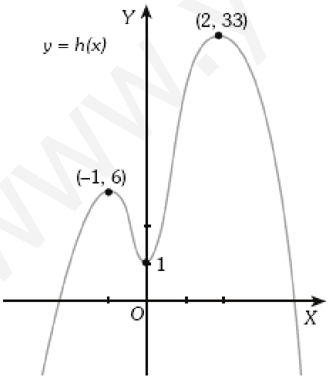
Dominio $=\mathbb{R}$.
No presenta cortes con OX enteros.
Corte con OY en $(0,-3)$.
No tiene simetrías. No tiene asíntotas.
Tiene máximo en $(0,-3)$ y mínimo en $(2,-7)$.

b) $g(x)=3x^2-2x^3$



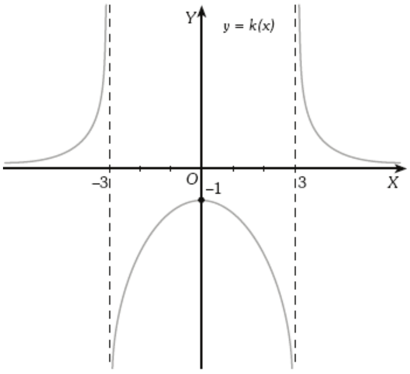
Dominio $=\mathbb{R}$.
Corte en $(0,0)$ $\left(\frac{3}{2},0\right)$.
Tiene máximo en $(1,1)$ y mínimo en $(0,0)$.

c) $h(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+1$



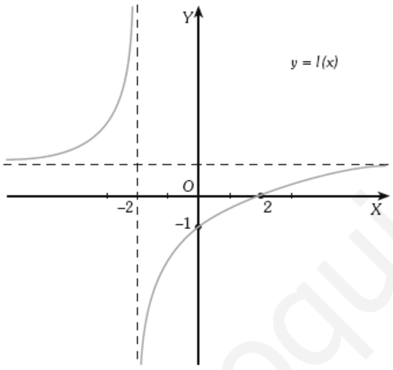
Dominio $=\mathbb{R}$.
Corte con ejes en $(0,1)$.
Máximo en $(2,33)$ y $(-1,6)$.
Mínimo en $(0,1)$.

d) $k(x)=\dfrac{9}{x^2-9}$



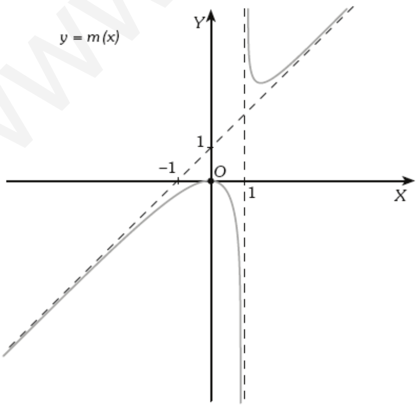
Dominio $=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.
Corte con ejes en $(0,-1)$.
Simétrica respecto OY.
Asíntotas verticales: $x=3$; $x=-3$.
Asíntota horizontal: $y=0$.

e) $l(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$



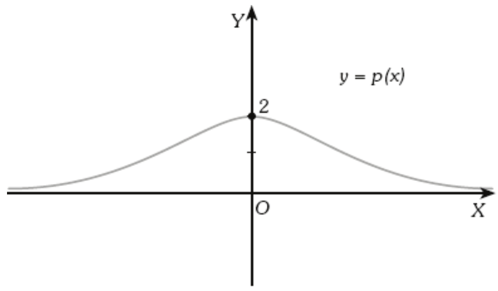
Dominio $=\mathbb{R}-\{-2\}$.
Cortes en $(0,-1)$ $(2,0)$.
Asíntota vertical: $x=-2$.
Asíntota horizontal: $y=1$.

f) $m(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$



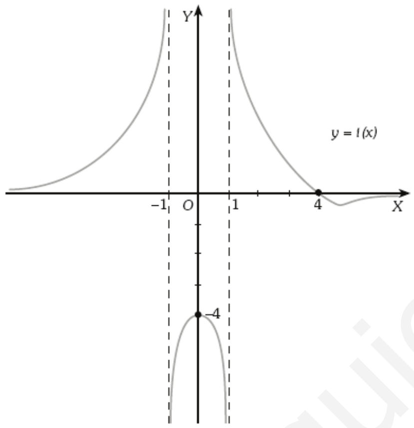
Dominio $=\mathbb{R}-\{1\}$.
Corte con ejes en $(0,0)$.
Asíntota vertical: $x=1$.
Asíntota oblicua: $y=x+1$.

g) $p(x)=\frac{8}{x^2+4}$



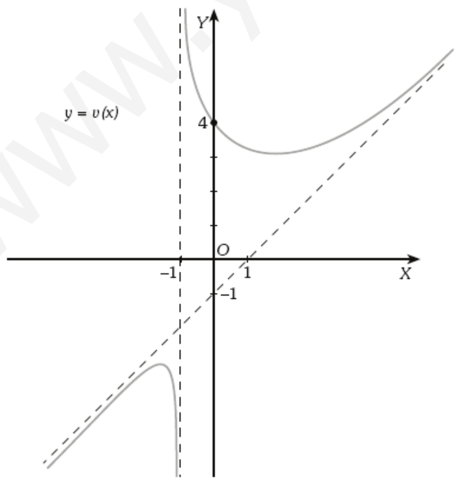
Dominio $=\mathbb{R}$.
Corte con ejes en $(0,2)$.
Simétrica respecto a OY.
Asíntota horizontal: $y=0$.
Máximo relativo en $(0,2)$.

h) $i(x)=\frac{4-x}{x^2-1}$



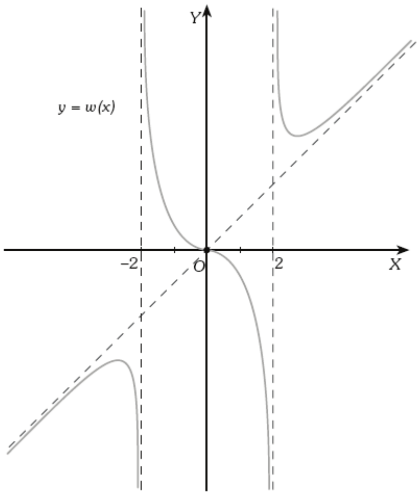
Dominio $=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.
Cortes en $(0,-4)$ $(4,0)$.
Asíntotas verticales: $x=1; x=-1$.
Asíntota horizontal: $y=0$.
Máximo en $(0,2;-3,96)$.
Mínimo en $(7,8;-0,06)$.

i) $v(x)=\frac{x^2+4}{x+1}$



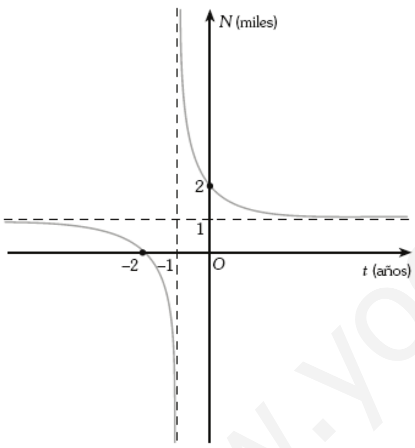
Dominio $=\mathbb{R}-\{-1\}$.
Cortes en $(0,4)$.
Asíntota vertical: $x=-1$.
Asíntota oblicua: $y=x-1$.
Máximo en $\left(-3,-\frac{13}{2}\right)$ y mínimo en $\left(1,2;\frac{5}{2}\right)$.

j) $w(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$



Dominio $=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.
Cortes en $(0,0)$.
Simétrica respecto al origen.
Asíntota vertical: $x=-2; x=2$.
Asíntota oblicua: $y=x$.
Máximo en $(-3,5;-5,2)$.
Mínimo en $(3,5;5,2)$.

27. La función dada es :



En el dibujo está representada gráficamente la función dada.
Sólo consideramos la parte positiva de la gráfica (desde $t=0$), pues el resto no tiene sentido en el contexto.