Unidad 12 – Introducción a las derivadas.

PÁGINA 273

cuestiones iniciales

1. Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x^2 + 5;\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

b) $g(x) = \sqrt{3x+1};\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3)$ y su pendiente vale $-\dfrac{1}{5}$. Halla la perpendicular a esta recta en el punto A.

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 4x + 6$ en el punto $P(0, 6)$.

4. Calcula la tasa de variación media en los intervalos $[0, 2]$ y $[2, 4]$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 3x$ b) $f_2(x) = 3x + 2$ c) $f_3(x) = x^3$ d) $f_4(x) = 3^x$

SOLUCIONES

1. Los límites quedan:

a) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2+5-17}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h+3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(12+3h)}{h} = 12$$

b) $$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+3h+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x+1}\right)^2}{h\cdot\left(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}\right)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

2. Las ecuaciones de cada una de las rectan quedan:

- La primera ecuación es: $y+3=-\dfrac{1}{5}(x-2) \Rightarrow x+5y+13=0$
- La recta perpendicular tendrá pendiente 5. Su ecuación es: $y+3=5(x-2) \Rightarrow 5x-y-13=0$

3. La ecuación pedida es: $y=6-4x$.

4. En cada uno de los intervalos queda:

a) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_1(2)-f_1(0)}{2-0}=\dfrac{6}{2}=3$ $\quad t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_1(4)-f_1(2)}{4-2}=\dfrac{12-6}{2}=3$

b) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_2(2)-f_2(0)}{2-0}=\dfrac{8-2}{2}=3$ $\quad t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_2(4)-f_2(2)}{4-2}=\dfrac{14-8}{2}=3$

c) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_3(2)-f_3(0)}{2-0}=\dfrac{8}{2}=4$ $\quad t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_3(4)-f_3(2)}{4-2}=\dfrac{64-8}{2}=28$

d) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_4(2)-f_4(0)}{2-0}=\dfrac{9-1}{2}=4$ $\quad t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_4(4)-f_4(2)}{4-2}=\dfrac{81-9}{2}=36$

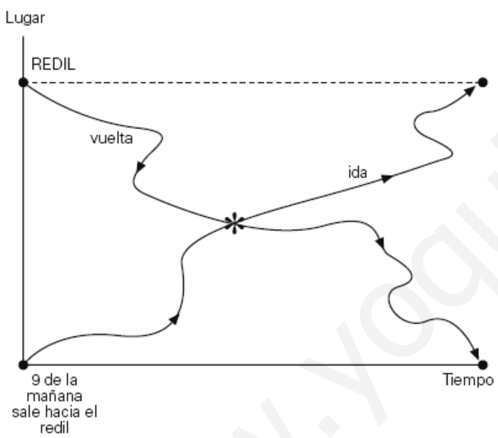
ACTIVIDADES

■ Ten muy en cuenta el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El pastor y el rebaño.** Un pastor tiene un redil, donde guarda su rebaño, en lo alto de una montaña. Un determinado día sale de su casa a las 9 de la mañana y, después de caminar toda la jornada, llega al lugar donde está el redil. Allí permanece durante 10 días, al término de los cuales y a las 9 de la mañana, regresa a su casa. Al ir bajando, se pregunta: «¿Habrá algún punto del camino por el que pase a la misma hora que pasé el día que subí a la montaña?».
2. **Dos deportistas.** Luis y Ana hacen deporte todos los días. Ayer fueron desde la plaza Mayor hasta el Pinarcillo. Luis corrió la mitad de la distancia y anduvo la otra mitad. Ana corrió la mitad del tiempo y anduvo la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y andan a la misma velocidad. ¿Quién llegó antes al Pinarcillo?
3. **Triple operación.** Un montañero ha sufrido una grave caída y, al llegar al hospital, ha de ser operado por tres cirujanos distintos. En ese momento hay una epidemia que pueden padecer los cirujanos y el montañero. Esta enfermedad puede contagiarse a través de cualquier útil o por la piel. Las tres intervenciones se debían realizar consecutivamente. Cada cirujano debe operar con ambas manos, pero en el hospital sólo había dos pares de guantes esterilizados. ¿Cómo consiguieron operar al montañero, utilizando los guantes disponibles y evitando toda posibilidad de contagio?

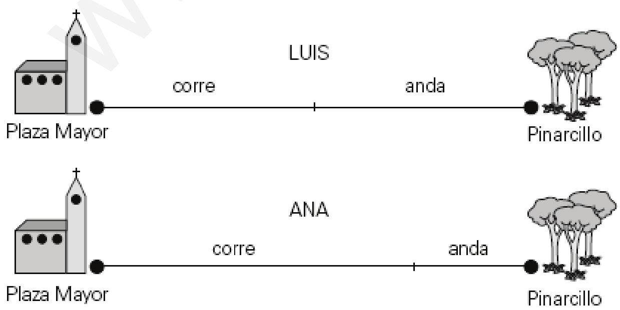
SOLUCIONES

1. El problema se representa del siguiente modo:



En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo. Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos: de ida y de vuelta.

2. La figura queda:



Cuando Luis está a la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.
En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así que llega antes Ana.

3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone al (B).

   El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

   El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B), operando al herido por el lado del guante (B) con que ya han operado los otros dos cirujanos.

PÁGINA 292

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la tabla que sigue con la determinación de las tasas de variación media correspondientes.

t_{vm}	$f_1(x) = 3x$	$f_2(x) = 3x - 2$	$f_3(x) = 3x + 2$	$f_4(x) = x^2$	$f_5(x) = x^3$	$f_6(x) = 3^x$
[–2, 0]						
[–1, 1]						
[0, 2]						
[1, 2]						
[a, a + 1]						

2. Dado un depósito de agua tiene forma cilíndrica, con unas medidas de 1 m de radio y 3 m de altura:
   a) Realiza la gráfica de la función que proporciona el volumen de agua en función de la altura del líquido.
   b) Calcula la tasa de aumento medio del volumen en litros de agua por centímetro de altura cuando el nivel sube de 0,5 a 1 m; de 1,5 a 2 m y de 2 a 2,5 m.
   c) ¿Cuánto vale la tasa de aumento medio entre dos niveles de agua?

3. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [1, 4] para las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x + 2$ b) $g(x) = 4 - x^2$ c) $h(x) = \sqrt{x+5}$ d) $t(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$

4. La ecuación de movimiento que sigue un cuerpo que cae libremente viene dada por $e(t) = 4{,}9 \cdot t^2$, siendo e el espacio recorrido en metros, desde el punto que inicia la caída y t el tiempo en segundos, desde ese mismo instante. Calcula la velocidad media entre los instantes 2 s y 5 s. Calcula las velocidades instantáneas en esos dos instantes.

5. Un país desea enviar un satélite artificial al espacio. El cohete que lo transportará llevará una ecuación de movimiento $e(t) = 3t^2 + 8t$, siendo e el espacio recorrido en kilómetros, desde la superficie terrestre y t el tiempo en minutos, desde que la lanzadera espacial pone en movimiento el cohete. Calcula la velocidad media del cohete en los intervalos [0, 3]; [2, 5]; [1, 8] y [8, 12]. Al alejarse de la Tierra el cohete, ¿cómo varía su velocidad? ¿aumenta o disminuye?

6. Calcula, usando la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas siguientes en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 2x^2 + 3;\ f'(1)$ c) $h(x) = \sqrt{3x^2+4};\ h'(2)$ e) $l(x) = \dfrac{3}{x^2};\ l'(3)$

   b) $g(x) = \dfrac{-2}{x+1};\ D[g(1)]$ d) $k(x) = 6;\ D[k(0)]$ f) $t(x) = \sqrt{x-3};\ D[t(6)]$

7. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

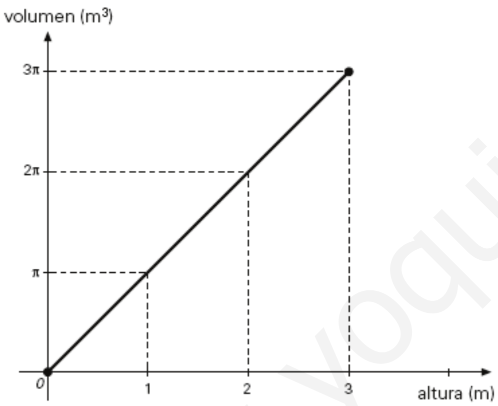
8. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y = 2x^2 - 12x + 10$ en los puntos donde esta corta al eje de abscisas.

1. La tabla queda del siguiente modo:

t_{vm}	$f_1(x)=3x$	$f_2(x)=3x-2$	$f_3(x)=3x+2$	$f_4(x)=x^2$	$f_5(x)=x^3$	$f_6(x)=3^x$
$[-2,0]$	3	3	3	-2	4	$4/9$
$[-1,1]$	3	3	3	0	1	$5/3$
$[0,2]$	3	3	3	2	4	4
$[1,2]$	3	3	3	3	7	6
$[a,a+1]$	3	3	3	$2a+1$	$3a^2+3a+1$	$2\cdot 3^a$

2. En cada apartado queda:

a) Llamando x a la altura del líquido obtenemos:



La ecuación es:

$V=\pi\cdot x$ con $0\leq x\leq 3$

b) Queda:

$$t_{vm}[0,5;\,1]=\frac{\pi-0,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[1,5;\,2]=\frac{2\pi-1,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[2;\,2,5]=\frac{2,5\pi-2\pi}{0,5}=\pi$$

c) Queda:

$$t_{vm}[a;\,b]=\frac{b\pi-a\pi}{b-a}=\pi$$

3. En cada uno de los casos queda del siguiente modo:

$$t_{vm}[1,\,4]=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{14-5}{3}=3 \qquad t_{vm}[1,\,4]=\frac{g(4)-g(1)}{4-1}=\frac{-12-3}{3}=-5$$

$$t_{vm}[1,\,4]=\frac{h(4)-h(1)}{4-1}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3}=\frac{3-\sqrt{6}}{3} \qquad t_{vm}[1,\,4]=\frac{t(4)-t(1)}{4-1}=\frac{\frac{8}{20}-\frac{8}{5}}{3}=\frac{-2}{5}$$

4. Queda:

$$V_m=t_{vm}[2,\,5]=\frac{e(5)-e(2)}{5-2}=\frac{4{,}9\cdot 5^2-4{,}9\cdot 2^2}{5-2}=34{,}3 \text{ m/s}$$

$$v_i=t_{vi}[2]=\lim_{h\to 0}\frac{e(2+h)-e(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4{,}9\,(2+h)^2+4{,}9\cdot 2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4{,}9\,(4h+h^2)}{h}\boxed{\tfrac{0}{0}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\,(19{,}6+4{,}9h)}{h}=19{,}6 \text{ m/s}$$

$$v_i=t_{vi}[5]=\lim_{h\to 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4{,}9\,(5+h)^2+4{,}9\cdot 5^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4{,}9\,(10h+h^2)}{h}\boxed{\tfrac{0}{0}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\,(49+4{,}9h)}{h}=49 \text{ m/s}$$

5. Queda:

$$V_m[0,3]=t_{vm}[0,3]=\frac{e(3)-e(0)}{3-0}=\frac{3\cdot 3^2+8\cdot 3}{3}=17 \text{ km/s}$$

$$V_m[2,5]=t_{vm}[2,5]=\frac{e(5)-e(2)}{5-2}=\frac{115-28}{3}=29 \text{ km/s}$$

$$V_m[1,8]=t_{vm}[1,8]=\frac{e(8)-e(1)}{8-1}=\frac{256-11}{7}=35 \text{ km/s}$$

$$V_m[8,12]=t_{vm}[8,12]=\frac{e(12)-e(8)}{12-8}=\frac{528-256}{4}=68 \text{ km/s}$$

Al alejarse de la Tierra aumenta la velocidad del cohete.

6. Las derivadas quedan:

a) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(1+h)^2+3-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h+2h^2}{h}=4$

b) $D[g(1)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-2}{1+h+1}-\dfrac{-2}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h^2+2h}=\dfrac{1}{2}$

c) $h'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2+h)-h(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3(2+h)^2+4}-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{3h^2+12h+16}-4\right)\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+12h}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3h+12)}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

d) $D[k(0)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(0+h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6-6}{h}=0$

e) $l'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{l(3+h)-l(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3}{(3+h)^2}-\dfrac{1}{3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2-6h}{(3h^2+18h+27)}=-\dfrac{6}{27}=-\dfrac{2}{9}$

f) $D[t(6)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{t(6+h)-t(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{6+h-3}-\sqrt{3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

7. La derivada queda: $f'(x)=3x^2-6x$

La pendiente de la recta tangente en $P(-1,-2)$ es: $f'(-1)=9$

La ecuación de la recta tangente es: $y+2=9(x+1)\ \Rightarrow\ 9x-y+7=0$

La pendiente de la recta normal es: $-1/9$ y su ecuación es: $y+2=-\dfrac{1}{9}(x+1)\ \Rightarrow\ x+9y+19=0$

8. La solución queda:

Los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2-12x+10 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1,0) \quad Q(5,0)$$

La derivada queda: $y'=4x-12$

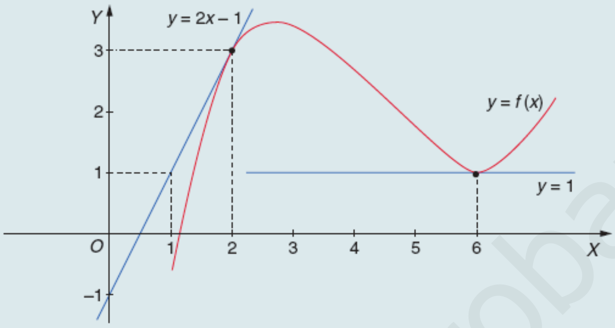
- La pendiente de la recta tangente en P es: $y'(1)=4\cdot1-12=-8$
  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-1) \Rightarrow 8x+y-8=0$
  La pendiente de la recta normal en P es: $1/8$
  La ecuación de la recta normal queda: $y-0=\frac{1}{8}(x-1) \Rightarrow x-8y-1=0$

- De igual forma queda en el punto Q.
  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-5) \Rightarrow 8x+y-40=0$
  La ecuación de la recta normal queda: $y-0=\frac{1}{8}(x-5) \Rightarrow x-8y-5=0$

PÁGINA 293

9. ¿En qué punto de la curva $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

10. Sea la función cuya gráfica aparece en el dibujo adjunto. Calcula, de forma razonada, $D[f(2)]$ y $D[f(6)]$.



11. Halla el ángulo que forma la tangente a la curva $y = \frac{2}{x}$ en el punto $x_0 = 4$ con el semieje positivo de abscisas.

12. Dada la función $f(x) = ax + b$, calcula a y b, de manera que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$.

13. Halla la función derivada de cada función y, en cada caso, representa en un diagrama cartesiano ambas funciones:

a) $f_1(x) = 3$

b) $f_2(x) = 3x$

c) $f_3(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f_4(x) = x^3 - 12x + 8$

e) $f_5(x) = \frac{1}{x}$

f) $f_6(x) = -2x + 5$

14. Halla las funciones derivadas de las siguientes, aplicando la definición:

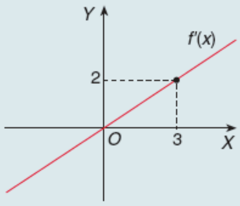
a) $f(x) = -3x + 5$

b) $g(x) = (2x - 3)^2$

c) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 5$

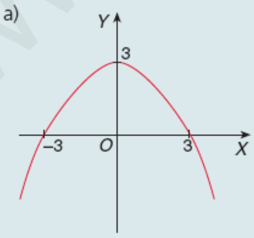
d) $k(x) = 2\sqrt{x^2 + 3}$

15. La gráfica adjunta corresponde a la función derivada de una determinada función $f(x)$.

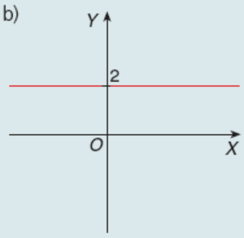


Indica cuál de las gráficas, a), b) ó c) se corresponde a la función $f(x)$, justificando la respuesta.

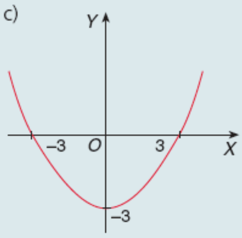
a)



b)



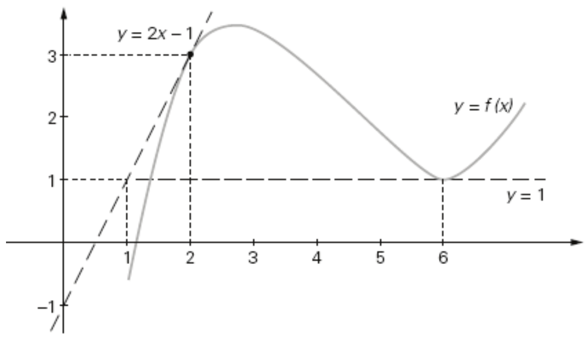
c)



9. La bisectriz del primer cuadrante es la recta de pendiente $m=1$.
Luego hay que hallar el punto en el cual:

$$f'(x)=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot 2x=1 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; \text{el punto es } P\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

10. Realizamos los cálculos a partir de siguiente gráfico:



$D[f(2)]=$ valor de la pendiente de la tangente $y=2x-1$ a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 2 $\Rightarrow D[f(2)]=2$.

$D[f(6)]=$ valor de la pendiente de la tangente $y=1$ a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 6 $\Rightarrow D[f(6)]=0$.

11. Queda:

Calculamos la pendiente mediante la derivada $y'=\frac{-2}{x^2} \;\Rightarrow\; m=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$.

El ángulo queda: $\operatorname{tg} x=\frac{-1}{8} \;\Rightarrow\; x=172^{\circ}\,52'\,30''$

12. Queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \;\Rightarrow\; a+b=1 \\ f'(1)=2 \;\Rightarrow\; a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}$$

13. Queda:

a) $f'_1(x)=0$ b) $f'_2(x)=3$

c) $f'_3(x)=2x-2$ d) $f'_4(x)=3x^2-12$

e) $f'_5(x)=-\frac{1}{x^2}$ f) $f'_6(x)=-2$

14. Queda en cada uno de los casos:

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-3(x+h)+5-(-3x+5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-3h}{h}=-3$

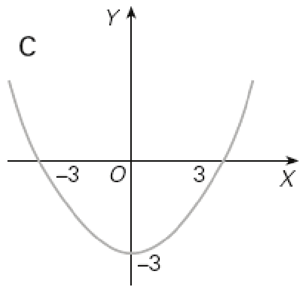
b) $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[2(x+h)-3\right]^2-(2x-3)^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h^2+8xh-12h}{h}=8x-12$

c) $h'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(x+h)-h(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[(x+h)^3-2(x+h)^2+5\right]-(x^3-2x^2+5)}{h}=3x^2-4x$

d) $k'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\sqrt{(x+h)^2+3}-2\sqrt{x^2+3}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h^2+8xh}{h\left(2\sqrt{(x+h)^2+3}+2\sqrt{x^2+3}\right)}=\dfrac{8x}{4\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

15. Queda:



$f'(x)$ tiene por ecuación: $f'(x)=\dfrac{2}{3}x$

Quedaría $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-3 \;\Rightarrow$ Gráfica C

PÁGINA 294

ACTIVIDADES FINALES

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones potenciales:

a) $D[x^6]$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]$

c) $D\left[8\sqrt[4]{x}\right]$

d) $D[3x^2 - x + 4]$

e) $D[(x^2 + x)^4]$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4+5x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}\right]$

h) $D\left[\dfrac{x^2 - 1}{4}\right]$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right]$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]$

b) $D[3 \cdot 2^x]$

c) $D[e^{2x^2} - e^x - 2]$

d) $D[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}]$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]$

f) $D[(e^{2x} + 1)^3]$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $D[\ln(x^2 + 7)]$

b) $D[\ln(e^x + 2)]$

c) $D[\ln(3 - 4x^3)^5]$

d) $D[\ln \sqrt[3]{3x^2 + 1}]$

e) $D[\log_2(x^2 + 1)]$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right]$

g) $D[\ln(\ln x)]$

h) $D[\ln(x \cdot \sqrt{4 - x^2})]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas y de sus inversas:

a) $D[\text{sen } 4x]$

b) $D[4 \text{ sen } x]$

c) $D\left[\text{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]$

d) $D\left[\text{sen}\left(\dfrac{4}{x}\right)\right]$

e) $D[\text{sen } x^4]$

f) $D[\text{sen}^4 x]$

g) $D[\text{arcsen } \sqrt{x-1}]$

h) $D[\text{sen } x^{-4}]$

i) $D[\sqrt[4]{\text{sen } x}]$

j) $D[\cos(x + 1)]$

k) $D[\cos^3(x^3 + 1)]$

l) $D[\text{arctg } (2x + 1)^2]$

m) $D[\text{tg } (x^2 + 2)]$

n) $D[\text{tg } \sqrt{x}]$

ñ) $D[\text{tg}^3(x + 1)]$

o) $D[\arccos(\ln x)]$

p) $D[\text{tg } (3^x)]$

q) $D[\sqrt{\text{tg } x}]$

20. Calcula las derivadas que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 2x^4}}{x}$; $Df(1)$

b) $g(x) = \ln[x + \sqrt{4 + x^2}]$; $Dg(0)$

c) $h(x) = \text{sen}^2 3x - \cos^2 3x$; $Dh(\pi)$

d) $j(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$; $Dj(-1)$

21. Dada la función $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5$, calcula el valor de a, para que $Df(1) = -3$.

Haz un estudio análogo para la función $g(x) = \dfrac{x^2 - x - a}{x + 1}$, siendo $Dg(1) = 0$.

16. Quedan:

a) $D\left[x^6\right]=6x^5$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]=D\left[7x^{-5}\right]=-7\cdot 5x^{-6}=\dfrac{-35}{x^6}$

c) $D\left[8\sqrt[4]{x}\right]=D\left[8x^{1/4}\right]=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

d) $D\left[3x^2-x+4\right]=6x-1$

e) $D\left[\left(x^2+x\right)^4\right]=(8x+4)\left(x^2+x\right)^3$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4+5x}\right]=\dfrac{20}{(4+5x)^2}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\left(x^5-x^2+3\right)^5}\right]=D\left[\left(x^5-x^2+3\right)^{-5}\right]=\dfrac{-25x^4+10x}{\left(x^5-x^2+3\right)^6}$

h) $D\left[\dfrac{x^2-1}{4}\right]=\dfrac{x}{2}$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2+5}}\right]=\dfrac{-12x}{\sqrt{\left(4x^2+5\right)^3}}$

17. Las derivadas quedan:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]=4^{\frac{3}{x}}\cdot\ln 4\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)$

b) $D\left[3\cdot 2^x\right]=3\cdot 2^x\cdot\ln 2$

c) $D\left[e^{2x^2}-e^x-2\right]=e^{2x^2}\cdot 4x-e^x$

d) $D\left[2^{x^2}\cdot 3^{x^2}\right]=D\left[6^{x^2}\right]=6^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 6$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]=\dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D\left[\left(e^{2x}+1\right)^3\right]=6\cdot e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$

18. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\ln\left(x^2+7\right)\right]=\frac{2x}{x^2+7}$

b) $D\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]=\frac{e^x}{e^x+2}$

c) $D\left[\ln\left(3-4x^3\right)^5\right]=D\left[5\cdot\ln\left(3-4x^3\right)\right]=5\cdot\frac{-12x^2}{3-4x^3}=\frac{-60x^2}{3-4x^3}$

d) $D\left[\ln\sqrt[3]{3x^2+1}\right]=D\left[\frac{1}{3}\ln\left(3x^2+1\right)\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{6x}{3x^2+1}=\frac{2x}{3x^2+1}$

e) $D\left[\log_2\left(x^2+1\right)\right]=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$

f) $D\left[\ln\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]=D\left[\ln\left(1-\sqrt{x}\right)-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{x}}{x-x^2}$

g) $D\left[\ln\left(\ln x\right)\right]=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\cdot\ln x}$

h) $D\left[\ln\left(x\cdot\sqrt{4-x^2}\right)\right]=D\left[\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)\right]=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{4-x^2}=\frac{4-2x^2}{x\left(4-x^2\right)}$

i) $D\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\right]=D\left[\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$

19. Las derivadas quedan:

a) $D[\text{sen } 4x]=4\cdot\cos 4x$

b) $D[4\text{ sen } x]=4\cdot\cos x$

c) $D\left[\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right]=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$

d) $D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)\right]=-\frac{4}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{4}{x}\right)$

e) $D\left[\operatorname{sen} x^4\right]=4x^3\cdot\cos x^4$

f) $D\left[\operatorname{sen}^4 x\right]=D\left[(\operatorname{sen} x)^4\right]=4\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$

g) $D\left[\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x-1}\right]=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x-2-x^2}}$

h) $D\left[\operatorname{sen} x^{-4}\right]=\frac{-4\cdot\cos\left(x^{-4}\right)}{x^5}$

i) $D\left[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\right]=\frac{\cos x}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}$

j) $D\left[\cos(x+1)\right]=-\operatorname{sen}(x+1)$

k) $D\left[\cos^3\left(x^3+1\right)\right]=-9x^2\cdot\cos^2\left(x^3+1\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x^3+1\right)$

l) $D\left[\operatorname{arc\,tg}(2x+1)^2\right]=\frac{4x+2}{8x^4+16x^3+12x^2+4x+1}$

m) $D\left[\operatorname{tg}\left(x^2+2\right)\right]=\frac{2x}{\cos^2\left(x^2+2\right)}$

n) $D\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

ñ) $D\left[\operatorname{tg}^3(x+1)\right]=\frac{3\operatorname{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}$

o) $D\left[\arccos(\ln x)\right]=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$

p) $D\left[\operatorname{tg}(3^x)\right]=\frac{3^x\cdot\ln 3}{\cos^2 3^x}$

q) $D\left[\sqrt{\operatorname{tg} x}\right]=\frac{1}{2\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

20. Las derivadas quedan:

a) $D[f(x)]=\dfrac{2x^4-1}{x^2\sqrt{1+2x^2}} \Rightarrow D[f(1)]=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $D[g(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow D[g(0)]=\dfrac{1}{2}$

c) $D[h(x)]=12\,\text{sen}\,3x\cdot\cos 3x \Rightarrow D[h(\pi)]=0$

d) $D[j(x)]=\dfrac{2^x\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2} \Rightarrow D[j(-1)]=\dfrac{2\ln 2}{9}$

21. El estudio en cada caso queda:

- $f(x)=2x^4+3x^3+x^2-ax+5 \Rightarrow D[f(x)]=8x^3+9x^2+2x-a \Rightarrow D[f(1)]=19-a=-3 \Rightarrow a=22$
- $g(x)=\dfrac{x^2-x-a}{x+1} \Rightarrow D[g(x)]=\dfrac{x^2+2x+a-1}{(x+1)^2} \Rightarrow D[g(1)]=\dfrac{2+a}{4}=0 \Rightarrow a=-2$

■ 22. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D[(1-x)\sqrt{1+x}]$

b) $D[(x^2-1)^2 \cdot 5^{2x}]$

c) $D[2^x \cdot \ln 2]$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)\right]$

e) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2]$

f) $D[\operatorname{sen} x \cdot 3^{2x}]$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]$

j) $D[x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x}]$

k) $D[\ln \sqrt{x(2-x)}]$

l) $D\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

m) $D[\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}]$

n) $D[\ln(e^x - 5x^4)]$

ñ) $D[(\operatorname{sen} 2x)^{\cos x}]$

o) $D[\ln(\operatorname{tg} x)]$

p) $D[(x^2+1)^{7x}]$

q) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]$

s) $D[\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}]$

t) $D[10^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot (2x)^8]$

u) $D\left[\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

v) $D[\ln(\ln \cos x)]$

w) $D[\operatorname{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4]$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x} + \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]$

y) $D[2^x \cdot \sqrt{4+2^x}]$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$

■ 23. La trayectoria que sigue una motora viene dada por $e(t) = -t^3 + 9t^2 + 5$, donde e viene dado en kilómetros y t en horas.
Halla la velocidad instantánea a las 4 horas ($t = 4$ h).
¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad se anula?

■ 24. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, calcula $f^{(10)}(x)$.

■ 25. Calcula los valores de x para los cuales $D[f(x)] > 0$, siendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

■ 26. Calcula $f^{(2003)}(x)$ para la función $f(x) = e^{-2x}$.

■ 27. ¿En qué punto la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$ tiene una tangente que forma un ángulo de 45° con el eje OX?

■ 28. Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{5}, 4)$.

■ 29. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en el punto de abscisa 8.

22. Las derivadas quedan:

a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right]=-1\sqrt{1+x}+\dfrac{1-x}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[(x^2-1)\cdot 5^{2x}\right]=2x\cdot 5^{2x}+5^{2x}\cdot \ln 5\cdot 2\cdot (x^2-1)$

c) $D\left[2^x\cdot \ln 2\right]=2^x\cdot (\ln 2)^2$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)\right]=\dfrac{\cos x}{1+\text{sen } x}-\dfrac{-\cos x}{1-\text{sen } x}=\dfrac{2}{\cos x}$

e) $D\left[x^2\ln x+x\ln x^2\right]=2x\cdot \ln x+\dfrac{x^2}{x}+2\ln x+2=2x\cdot \ln x+x+2\ln x+2$

f) $D\left[\text{sen } x\cdot 3^{2x}\right]=\cos x\cdot 3^{2x}+3^{2x}\cdot 2\cdot \ln 3\cdot \text{sen } x$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]=\dfrac{2^{3x}\cdot 3\cdot \ln 2\cdot x^2-2x\cdot 2^{3x}}{x^4}=\dfrac{2^{3x}(3x\ln 2-2)}{x^3}$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]=\dfrac{-\text{sen } x(1-\cos x)-\text{sen } x\ (1+\cos x)}{2\,(1-\cos x)^2\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}=\dfrac{-1}{1-\cos x}$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+9}=\dfrac{9}{x\,(x^2+9)}$

j) $D\left[x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\right]=2ax^{2a-1}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}+a^{2x}\cdot \ln a\cdot 2\cdot x^{2a}\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot x^{2a}\cdot a^{2x}$

$=x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\left(\dfrac{2a}{x}+2\ln a-1\right)$

k) $D\left[\ln\sqrt{x(2-x)}\right]=D\left[\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(2-x)\right]=\dfrac{1-x}{x\,(2-x)}$

l) $D\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}$

m) $D\left[\text{tg}^2\sqrt{x}\right]=2\,(\text{tg}\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\text{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

n) $D\left[\ln(e^x-5x^4)\right]=\frac{e^x-20x^3}{e^x-5x^4}$

ñ) $D\left[(\text{sen}\,2x)^{\cos x}\right]=2\cos x\,(\text{sen}\,2x)^{\cos x-1}\cdot\left[\cos 2x-(\text{sen}\,x)^2\ln(\text{sen}\,2x)\right]$

o) $D\left[\ln\text{tg}\,x\right]=\frac{1}{\text{sen}\,x\cdot\cos x}$

p) $D\left[(x^2-1)^{7x}\right]=7(x^2-1)^{7x-1}\cdot\left[2x^2+(x^2-1)\ln(x^2-1)\right]$

q) $D\left[\frac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]=\frac{4x\,(2x^2-1)-4x\,(2x^2+1)}{(2x^2-1)^2}=\frac{-8x}{(2x^2-1)^2}$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]=\frac{4x^3}{4\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

s) $D\left[\text{arc tg}^2\sqrt{x}\right]=2\cdot\text{arc tg}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)}=\frac{\text{arc tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

t) $D\left[10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8\right]=\frac{10^{\sqrt{x}}\cdot\ln 10}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8+\frac{1}{2x}\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot(2x)^8+16\,(2x)^7\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}$

u) $D\left[\text{arc sen}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

v) $D\left[\ln(\ln\cos x)\right]=\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}$

w) $D\left[\operatorname{sen}^4 x^3\cdot\cos^3 x^4\right]=4\operatorname{sen}^3 x^3\cdot\cos x^3\cdot 3x^2\cdot\cos^3 x^4-3\cdot\cos^2 x^4\cdot\operatorname{sen} x^4\cdot 4x^3\cdot\operatorname{sen}^4 x^3$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x}+\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=\dfrac{-1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-2-x}{(1+x)^2}$

y) $D\left[2^x\cdot\sqrt{4+2^x}\right]=2^x\cdot\ln 2\cdot\sqrt{4+2^x}+\dfrac{2^x\cdot\ln 2\cdot 2^x}{2\sqrt{4+2^x}}=\dfrac{2^x\cdot\ln 2\,(8+3\cdot 2^x)}{2\sqrt{4+2^x}}$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. Queda:

La velocidad viene dada por la expresión: $v(t)=e'(t)=-3t^2+18t$

La velocidad instantánea en $t=4$ es $v(4)=24\,{}^{\text{km}}\!/_{\text{h}}$

La velocidad se anula es: $0=-3t^2+18t \Rightarrow t=0$ y $t=6$.

Al cabo de 6 horas se anula.

24. Queda:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad f^{(10)}(x)=\frac{2\cdot 10!}{(x-1)^{11}}$$

25. La derivada queda: $D[f(x)]=3x^2-12x>0$ y el intervalo resultante es: $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

26. Queda:

$$f^{(n)}(x)=(-2)^n\cdot e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f^{(2\,003)}(x)=-2^{2\,003}\cdot e^{-2x}$$

27. El punto buscado es el punto en el que la pendiente de la recta tangente valga 1.

$f'(x)=-6x+7=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ El punto es $P(1,2)$.

28. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto dado.

Derivamos la función en implícitas: $8x-2yy'=0 \Rightarrow y'=\dfrac{4x}{y} \Rightarrow m=\sqrt{5}$

Por tanto, la ecuación de la recta queda: $y-4=\sqrt{5}\left(x-\sqrt{5}\right) \Rightarrow y=\sqrt{5}x-1$

29. El punto es $P(8,6)$.

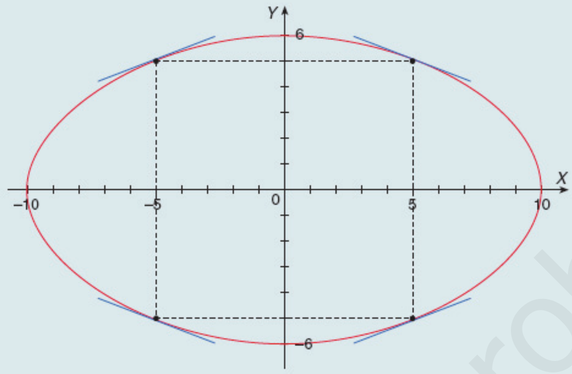
La pendiente de la recta es: $2x-8-2y'=0 \Rightarrow y'=x-4 \Rightarrow y'(8)=8-4 \Rightarrow m=4$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $y-6=4(x-8) \Rightarrow y=4x-26$

ACTIVIDADES FINALES

30. ¿En qué punto de la parábola $y = x^2$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

31. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse del dibujo en los puntos indicados.



32. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 27 = 0$ en el punto de abscisa 1.

33. Demuestra que la pendiente de la función afín $f(x) = ax + b$ vale a.

34. La cantidad de agua recogida en millones de litros en cierto pantano en el año 2001, en función del tiempo en meses, viene dada por:

$$f(t) = \frac{100}{(t-4)^2 + 2} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 12$$

¿En qué época aumentó la cantidad de agua recogida ($f'(t) > 0$)? ¿En qué momento la velocidad de crecimiento del agua fue nula?

35. Dada la función $y = 2x^2 + ax + b$ halla a y b para que tenga una tangente de pendiente –6 en el punto (1, 4).

36. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 4y + 4x - 12 = 0$ en los puntos de corte con los ejes coordenados.

37. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $4x^2 + y^2 = 8$, $x \cdot y = 2$ en sus puntos comunes.

38. Calcula la derivada n-ésima de la función $f(x) = \ln(x - 2)$.

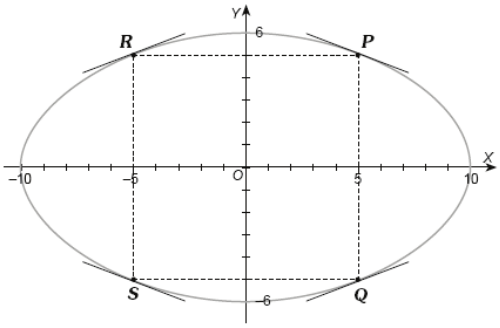
39. Comprueba que la función $y = e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx$ verifica la igualdad $2ay' - y'' = (a^2 + b^2) \cdot y$.

40. La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(1, 7)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del segundo cuadrante. Halla la ecuación de la curva.

30. La tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante tendrá pendiente -1.

Por tanto: $y'=2x=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ El punto pedido es : $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

31. La solución queda:



La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

Los puntos indicados son:

$$P\left(5,3\sqrt{3}\right) \qquad Q\left(5,-3\sqrt{3}\right)$$
$$R\left(-5,3\sqrt{3}\right) \qquad S\left(-5,-3\sqrt{3}\right)$$

Hallamos la pendiente de todas las rectas tangentes a la elipse, que viene dada por la siguiente expresión:

$$y'=-\frac{36x}{100y}$$

En cada uno de estos puntos la recta tangente queda:

- En $P \quad \Rightarrow \quad y-3\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$
- En $Q \quad \Rightarrow \quad y+3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$
- En $R \quad \Rightarrow \quad y-3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{5}(x+5)$
- En $S \quad \Rightarrow \quad y+3\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x+5)$

32. El punto es $P(1,2)$ ó $Q(1,-10)$.

Hallemos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta circunferencia:

$$2x+2yy'+6+8y'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{x+3}{y+4}$$

- La recta tangente en P: $y-2=-\frac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$
- La recta tangente en Q: $y+10=\frac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x-\frac{32}{3}$

33. Mediante la derivada: $f'(x)=a$ para todo valor de $x \Rightarrow$ pendiente$=a$

34. La expresión queda:

$$f'(t)=\frac{800-200t}{\left(t^2-8t+18\right)^2}>0$$

Resolviendo la inecuación obtenemos la cantidad de agua recogida para $t\in[0,4)$, es decir, durante los primeros meses del año.
La velocidad fue nula para $f'(t)=0$, es decir, para $t=4$.

35. Por pasar por el punto (1,4) obtenemos: $4=2+a+b$.
Por tener en ese punto una tangente de pendiente (-6) obtenemos: $4+a=-6$.
Resolviendo el sistema obtenemos: $a=-10 \quad b=12$.

36. Los puntos de corte con los ejes son: $P(3,0)$; $Q(0,6)$; $R(0,-2)$.

Hallemos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta parábola: $y'=\frac{2}{2-y}$

- La recta tangente en P: $y-0=1(x-3) \Rightarrow y=x-3$
- La recta tangente en Q: $y-6=-\frac{1}{2}x \Rightarrow y=6-\frac{1}{2}x$
- La recta tangente en R: $y+2=\frac{1}{2}x \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

37. La solución queda:

Los puntos comunes son: $P(1,2) \quad Q(-1,-2)$.

- Rectas tangentes en P, tienen por pendientes $m_1=-2 \quad m_2=-2$; por tanto, el ángulo que forman es de 0º.
- Rectas tangentes en Q, tienen por pendientes $m_1=-2 \quad m_2=-2$; por tanto, el ángulo que forman es de 0º.

38. Queda:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x-2)^n}$$

39. La demostración queda:

Sea la función $y = e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx$, derivamos e introducimos en la expresión a demostrar.

$y' = a\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx + b\, e^{ax} \cdot \cos bx \quad \Rightarrow \quad y'' = a^2\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx + 2ab\, e^{ax} \cdot \cos bx - b^2\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx$

Introducimos las derivadas en la expresión a demostrar :

$2ay' - y'' = a^2\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx + b^2\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx = (a^2 + b^2) \cdot y$

40. La solución queda:

Por pasar por el punto $P(1,7)$ verifica: $7 = a + b + c$.

Por pasar por el punto $O(0,0)$ verifica: $0 = c$.

Por ser tangente a la recta $y = -x \Rightarrow y'(0) = b = -1$.

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=7 \\ c=0 \\ b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=8 \\ b=-1 \\ c=0 \end{array}$$