Unidad 3 – Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Inecuaciones

PÁGINA 57

cuestiones iniciales

1. Halla los valores que, sustituidos por x, verifiquen las igualdades siguientes:

a) $(x-2)^2 = x^2 - 5x + 5$ b) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2. ¿Qué dos números dan el mismo resultado cuando se suman que cuando se multiplican? ¿Y si consideramos tres números?

3. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan 12 equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos, y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

4. Los pueblos de Abejar, Buitrago y Cidones no están situados en línea recta. Para ir desde Abejar a Cidones, pasando por Buitrago, se recorren 24 km. En el camino de Buitrago a Abejar, pasando por Cidones, se cubren 32 km. Desde Cidones a Buitrago, pasando por Abejar, se recorren 28 km. ¿Cuáles son los pueblos más cercanos entre sí?

SOLUCIONES

1. Operando obtenemos:

   a) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5x + 5 \Rightarrow x = 1$
   Esta igualdad sólo se verifica para $x = 1$.

   b) Esta igualdad se verifica para todos los valores de x.

2. En cada uno de los casos:

   - Son números x, y que verifican: $x + y = x \cdot y$. Es decir: $\frac{x}{x-1} = y$.

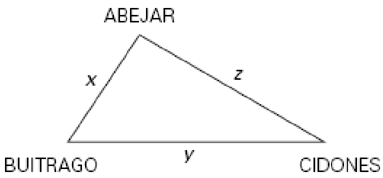
   Todos los números $x; \frac{x}{x-1}$ con $x \neq 1$ dan el mismo resultado al sumar y al multiplicar.

   - En el caso de tres números, éstos quedarían de la forma: x; y; $\frac{x+y}{xy-1}$ con $x \cdot y \neq 1$ y se obtienen de forma análoga al caso anterior.

3. Llamamos x a los partidos ganados. Como participan 12 equipos a doble vuelta se juegan 22 partidos. Por tanto:

$$2 \cdot x + 1 \cdot (22 - x) = 36$$
$$2x + 22 - x = 36$$
$$x = 14 \text{ partidos ganados.}$$

4. Consideremos el siguiente esquema:



Imponiendo las condiciones del problema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ y + z = 32 \\ x + z = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 10 \text{ km de Abejar a Buitrago} \\ y = 14 \text{ km de Buitrago a Cidones} \\ z = 18 \text{ km de Abejar a Cidones} \end{array}$$

PÁGINA 77

ACTIVIDADES

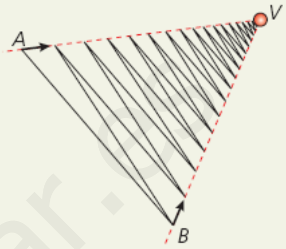
■ Practica la fase de búsqueda de estrategias en la resolución de los siguientes problemas:

1. Producto de cuatro enteros. Observa las siguientes igualdades:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5^2 - 1 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 11^2 - 1 \qquad 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 19^2 - 1$$

¿Será siempre cierto que el producto de cuatro enteros consecutivos es un cuadrado perfecto menos uno?

2. Naves hacia Venus. Los cohetes A y B marchan hacia Venus a una velocidad de 50 000 km/s, formando sus trayectorias hacia dicho planeta un ángulo de 60°. En un instante dado, hallándose ambos a 3 000 000 de km de Venus, A emite una señal de adio (velocidad de esta 300 000 km/s) que, una vez alcanzado B, es devuelta por este hacia A. Este nuevamente la reenvía y así sucesivamente, hasta que ambos cohetes llegan al planeta. Halla la distancia recorrida por las señales radio eléctricas desde su emisión hasta ese momento.



3. A buen fin, mejor principio. ¿En qué cifra termina $7^{83\,578}$?

SOLUCIONES

1. Veamos si el producto de cuatro números enteros $(x-1)\,x\,(x+1)(x+2)$ es un cuadrado perfecto menos una unidad.

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Luego } (x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = (x^2 + x - 1)^2 - 1$$

2. Ambos cohetes tardan $\dfrac{3\,000\,000}{50\,000} = 60$ segundos en alcanzar Venus. Durante este tiempo la señal, en sus idas y venidas ha recorrido:

$$300\,000 \cdot 60 = 18\,000\,000 \text{ km}.$$

3. Planteamos lo siguiente:

$7^1 = 7 \quad \Rightarrow$ termina en 7
$7^2 = 49 \quad \Rightarrow$ termina en 9
$7^3 = 343 \quad \Rightarrow$ termina en 3
$7^4 = 2\,401 \quad \Rightarrow$ termina en 1
$7^1 = 16\,807 \quad \Rightarrow$ termina en 7

Por tanto hay cuatro terminaciones distintas que se repiten cíclicamente; de modo que:

$$\begin{array}{l|l} 83\,578 & 4 \\ \hline R = 2 & 20\,894 \end{array}$$

Es decir, 7^{83578} termina en el mismo número que 7^2, es decir, termina en 9.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6}$

b) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{3}{4} = 2$

c) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x}$

d) $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x(x+3) = 3(x-1)$

b) $x + 1 = \frac{6}{x}$

c) $(x+2)(x-2) = 2(x+5) + 21$

d) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$

e) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

h) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$

3. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el valor de m en la ecuación $x^2 + mx - 24 = 0$ sabiendo que una de las raíces es 8.

b) Las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son 2 y -3. Halla a y b.

c) Halla b en la ecuación $2x^2 + bx + 50 = 0$ para que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

d) Halla el valor de k en la ecuación $x^2 - (k+5)x + 2 = 0$ para que una raíz sea el doble que la otra.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $-x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

c) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

f) $x^2 - 3x + 1 = \frac{2}{x^2 - 3x}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 - 5} = 2$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 2x - 1$

c) $\sqrt{x^2 + 9} + x^2 = 21$

d) $3x - 3\sqrt{x+3} = x + 3$

e) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-4} = 3$

f) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$

6. El dividendo de una división es 1 081. El cociente y el resto son iguales y el divisor es doble del cociente. Halla el divisor.

7. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

8. La suma de un número y su inverso es $\frac{34}{15}$, ¿cuánto vale el número?

9. El número de días que tiene un año tiene la propiedad de ser el único número que es suma de los cuadrados de tres números consecutivos. Además, es también suma de los cuadrados de los dos números consecutivos a los anteriores. Demuéstralo.

1. Las soluciones son:

   a) $x=\frac{6}{5}$ b) $x=3$ c) $x=4$ d) $x=\frac{3}{5}$

2. Las soluciones son:

   a) $2x(x+3)=3(x-1) \iff 2x^2+3x+3=0$ No tiene soluciones reales.

   b) $x+1=\frac{6}{x} \iff x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-3$

   c) $(x+2)(x-2)=2(x+5)+21 \iff x^2-2x-35=0 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-5$

   d) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2 \iff x^2+6x-27=0 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=-9$

   e) $(x^2-5)(x^2-3)=-1 \iff x^4-8x^2+16=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2$

   f) $x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=3;\ x_4=-3$

   g) $x^2-(a+b)x+ab=0 \Rightarrow x_1=a;\ x_2=b$

   h) $x^2+2ax+(a^2-b^2)=0 \Rightarrow x_1=(b-a);\ x_2=(-a-b)$

3. Las soluciones quedan:

a) Si una de las raíces de la ecuación es 8, ésta verificará la misma; es decir: $8^2+8m-24=0 \quad \Rightarrow \quad m=-5$

b) Si las raíces de la ecuación son 2 y -3, éstas deben verificar la ecuación, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} 4+2a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-6 \end{array}$$

c) Las dos raíces son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2-4ac=0 \quad \Rightarrow \quad b^2-4\cdot 2\cdot 50=0 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 20$$

d) Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación. Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2=K+5 \\ x_1\cdot x_2=2 \\ x_1=2x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2=\pm 1 \\ x_1=\pm 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Si } x_1=2;\ x_2=1 & \Rightarrow \quad K=-2 \\ \text{Si } x_1=-2;\ x_2=-1 & \Rightarrow \quad K=-8 \end{array}$$

4. Las soluciones quedan:

a) $x^3+2x^2-5x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2)(x+3)=0$
$\Rightarrow \quad$ Las soluciones son: $x_1=-1;\ x_2=2;\ x_3=-3$

b) $-x^4+x^3-4x^2+4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(x-1)(x^2+4)=0$
$\Rightarrow \quad$ Las soluciones reales son: $x_1=0;\ x_2=1$

c) $4x^4-65x^2+16=0$. Las soluciones de la ecuación son: $x_1=\dfrac{1}{2};\ x_2=-\dfrac{1}{2};\ x_3=4;\ x_4=-4$

d) $9x^4+5x^2-4=0$. Las soluciones reales de la ecuación son: $x_1=\dfrac{2}{3};\ x_2=-\dfrac{2}{3}$

e) $x^6+19x^3-216=0$. Las soluciones reales de la ecuación son: $x_1=2;\ x_2=-3$

f) $x^2-3x+1=\dfrac{2}{x^2-3x} \quad \Leftrightarrow \quad x^4-6x^3+10x^2-3x-2=0$

Factorizando la ecuación obtenemos: $(x-1)(x-2)(x^2-3x-1)=0$

Las soluciones son: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\ x_4=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

5. Las soluciones quedan:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-9=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=3$; $x_2=-3$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $3x^2+x-2=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=-1$; $x_2=\frac{2}{3}$. La solución que verifica la ecuación dada es $x=\frac{2}{3}$.

c) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$x^4-43x^2+432=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\sqrt{3}\,;\ x_2=-3\sqrt{3}\,;\ x_3=4;\ x_4=-4$$

Las soluciones que verifican la ecuación dada son: $x_1=4$; $x_2=-4$

d) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$4x^2-21x-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6;\ x_2=-\frac{3}{4} \quad \text{donde la solución buscada es}: \ x_1=6$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $-1=\sqrt{2x-4}$ y elevando de nuevo se obtiene $x=\frac{5}{2}$, sin embargo esta solución no verifica la ecuación inicial, por lo que se concluye que no existe solución.

f) Elevando al cuadrado y operando:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\frac{3}{\sqrt{x+3}} \quad \Rightarrow \quad 3=x+3+\sqrt{(x+6)(x+3)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9x+18}=-x$$

Elevando al cuadrado se obtiene: $9x+18=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

6. Las condiciones del problema nos dan:

$$\begin{array}{r|l} 1081 & 2x \\ \cline{2-2} x & x \end{array}$$

De donde se extrae: $1081=2x^2+x$ cuyas soluciones son: $x_1=23$; $x_2=-23,5$.
El divisor de esta división es -46 ó 47.

7. El triángulo tiene por catetos x, $x-5$ y por hipotenusa 25, por lo tanto:

$$x^2+(x-5)^2=25^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5x-300=0 \quad \Rightarrow \quad x=20\,\text{cm}$$

Un cateto mide 20 cm y el otro 15 cm.

8. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 15x^2-34x+15=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Las soluciones son: } x_1=\frac{5}{3};\ x_2=\frac{3}{5}$$

9. La expresión sería: $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365 \quad \Rightarrow \quad x=11$

   Los números son: 10, 11 y 12.

   Los números consecutivos a éstos son: 13 y 14, y se cumple también que $13^2+14^2=365$.

PÁGINA 81

10. Los estudiantes de 1º de Bachillerato están preparando una excursión. La agencia de viajes les da un presupuesto de 1 620 euros. En el último momento, dos estudiantes se ponen enfermos y, al no poder ir de excursión, el resto ha de pagar 4,80 euros más cada uno. ¿Cuántos estudiantes había en el curso?

11. Resuelve los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 7 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{11}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y - x = 4 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 117 \\ x \cdot y = -54 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 41 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$

12. Halla las dimensiones del rectángulo de 60 cm² de área y cuya base es 7 cm más larga que su altura.

13. Marta quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm², ¿de qué longitud deben ser los trozos que ha de cortar?

14. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3 250 m² y su diferencia 800 m². Calcula la medida de sus lados.

15. Dos albañiles hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría en 4 horas. Calcula el tiempo que tardaría en hacerlo el otro solo.

16. Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y di de qué tipo son:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ x + z = 2 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 14 \\ 8x - y - 4z = -10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ t - x = -3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + t = 6 \\ x + z - t = -1 \\ y + z + t = 6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

17. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las decenas más el doble de la de las unidades. Si se permutan entre sí las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

10. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y=1\,620 \\ (x-2)(y+4{,}8)=1\,620 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=27 \text{ estudiantes} \\ y=60 \text{ euros paga cada uno} \end{array}\right.$$

11. Los sistemas resueltos quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{11}{2} \end{array}\right\}$ Por reducción obtenemos:

$\boxed{x=2}$; $\boxed{y=\dfrac{1}{2}}$

b) $\left.\begin{array}{r} y=x^2-3 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}}$; $\boxed{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=6 \end{array}}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2y-x=4 \\ x^2-y^2=-5 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{array}}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=9 \\ x\cdot y=20 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{array}{l} x=5 \\ y=4 \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} x=-5 \\ y=-4 \end{array}}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=117 \\ x\cdot y=-54 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{array}{l} x=9 \\ y=-6 \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} x=-9 \\ y=6 \end{array}}$ ó

$\boxed{\begin{array}{l} x=6 \\ y=-9 \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} x=-6 \\ y=9 \end{array}}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y=41 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{array}{l} x=25 \\ y=16 \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} x=16 \\ y=25 \end{array}}$

g) $\left.\begin{array}{r} x^2+xy+y^2=57 \\ x^2-xy-y^2=43 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos} \\ \text{Restando ambas ecuaciones obtenemos} \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=50 \\ xy=7 \end{array}\right\}$

Resolviendo este sistema por sustitución obtenemos:

$\boxed{x=7 \quad y=1}$ $\boxed{x=-7 \quad y=-1}$ $\boxed{x=1 \quad y=7}$ $\boxed{x=-1 \quad y=-7}$

12. Llamando x a la longitud de la altura, la base tendrá por longitud $(7+x)$. Conocida el área se verifica:

$$x(7+x)=60 \quad \Rightarrow \quad x=5\,\text{cm}$$

El rectángulo mide 5 cm de altura y 12 cm de base.

13. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=20 \\ x\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6\text{ cm} \\ y=4\text{ cm} \end{array} \text{ o bien } \begin{array}{l} x=4\text{ cm} \\ y=6\text{ cm} \end{array}$$

14. Llamando x al área de un cuadrado e y al área del otro obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3\,250 \\ x-y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2\,025\text{ m}^2 \\ y=1\,225\text{ m}^2 \end{array}$$

De donde el lado de un cuadrado mide 35 m y el del otro 45 m.

15. Llamando x al tiempo que tarda él solo en hacer el trabajo obtenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x=12 \text{ horas tardaría él solo.}$$

16. Las soluciones quedan:

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} x+3y-2z=-1 \\ x+z=2 \\ 2x+5y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$$

e) $$\left.\begin{array}{l} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=14 \\ 8x-y-4z=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=2 \end{array}$$

f) $$\left.\begin{array}{l} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}$$

g) $$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ t-x=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3+m \\ y=2+m \\ z=1+m \\ t=m \\ m\in R \end{array}$$

h) $$\left.\begin{array}{l} x+y+t=6 \\ x+z-t=-1 \\ y+z+t=6 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=3 \end{array}$$

$$i)\ \left.\begin{array}{l} x-2y+3z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+3z=6 \\ 3x+y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}$$

17. Sea el número *xyz*.
De las siguientes condiciones del enunciado obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x=y+2z \\ xyz-zyx=297 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=297 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x=4,\ y=2,\ z=1$

El número buscado es el 421.

ACTIVIDADES FINALES

18. Un hombre le dijo a su hijo: «Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí, —contestó el hijo—, pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía». ¿Cuál es la edad actual del hijo?

19. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

20. Las edades de una familia formada por los padres y una hija suman 86 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la edad de la madre es triple de la edad de la hija, y las edades del padre y de la hija difieren en 26 años.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$
b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$
c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
d) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$
e) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$
f) $6^{1-x} + 6^x = 7$
g) $3^x \cdot 9^x = 9^3$
h) $2^{-x} = 8^{3-x}$
i) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$

22. Calcula el valor de x en cada uno de los siguientes apartados, ayudándote de la definición de logartimo:

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$
b) $\ln e^5 = x$
c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$
d) $\log x = -1$
e) $x = \log_{\sqrt{3}} 3$
f) $\log_x 0{,}0001 = 4$
g) $\frac{1}{2} = \ln x$
h) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = 1 + \log (22 - x)$
b) $\log (3x - 1) - \log (2x + 3) = -\log 25 + 1$
c) $2 \log (5x + 4) - \log 4 = \log (x + 4)$
d) $\dfrac{\log (5 + x^2)}{\log (2 - x)} = 2$
e) $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$
f) $2 \log_2 x - \log_2 (x - 16) = \log_2 64$

24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$

c) $\begin{cases} e^x = \dfrac{e^{11}}{e^y} \\ \log(x + y) + \log(x - y) = \log 55 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_x(y - 18) = 2 \\ \log_y(x + 3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 3 \end{cases}$

25. Una central lechera emplea partidas de 10 400 litros de leche que envasa en bricks de un litro de leche entera semidesnatada o desnatada, obteniendo por la venta 5 765 euros. Halla cuántos bricks de cada tipo envasa, sabiendo que su precio es de 0,60; 0,55 y 0,50 euros respectivamente y, además, el número de bricks de leche entera es el 60% del de semidesnatada y desnatada juntos.

18. Llamando *x* a la edad del padre e *y* a la edad del hijo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y+\frac{x}{3}=\frac{x}{2} \\ x-4=11\,(y-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+6y=0 \\ x-11y=-40 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=48 \\ y=8 \end{array}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

19. Sea el número *xyz*.
Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=594 \\ y=\frac{x+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

El número es el 963.

20. Llamamos *x* a la edad del padre, *y* a la edad de la madre y *z* a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=86 \\ y=3z \\ x-z=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=38 \\ y=36 \\ z=12 \end{array}$$

El padre tiene 38 años, la madre 36 años y la hija 12 años.

21. Las soluciones quedan:

a) $128^{x+1}=2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow 2^{7(x+1)}=2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Rightarrow x_1=9;\ x_2=-1$

b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7 \Leftrightarrow 2^x+2\cdot 2^x+4\cdot 2^x=7 \Leftrightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$

c) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-18\cdot 3^x+81=0 \Rightarrow x=2$

d) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x-320=0 \Rightarrow x=3$

e) $5^{x+1}=10+3\cdot 5^{2-x} \Leftrightarrow 5\cdot 5^x=10+\frac{75}{5^x} \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-10\cdot 5^x-75=0 \Rightarrow x=1$

f) $6^{1-x}+6^x=7 \Leftrightarrow \frac{6}{6^x}+6^x=7 \Leftrightarrow 6^{2x}-7\cdot 6^x+6=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=1$

g) $3^x\cdot 9^x=9^3 \Leftrightarrow 3^{3x}=3^6 \Rightarrow x=2$

h) $2^{-x}=8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{-x}=2^{9-3x} \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$

i) $2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}=1 \Leftrightarrow 4\cdot 2^{x}+2\cdot 2^{x}+2^{x}=4 \Leftrightarrow 2^{x}=\dfrac{4}{7} \Rightarrow x=\dfrac{ln\left(\frac{4}{7}\right)}{ln 2}$

22. Las soluciones quedan:

a) $\log_2 \sqrt{32}=x \Rightarrow 2^{x}=\sqrt{32} \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

b) $\ln e^{5}=x \Rightarrow 5\cdot \ln e=x \Rightarrow x=5$

c) $\log_x \dfrac{1}{8}=3 \Rightarrow x^{3}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

d) $\log x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{10}$

e) $x=\log_{\sqrt{3}} 3 \Rightarrow x=\dfrac{\log 3}{\log\sqrt{3}}=\dfrac{\log 3}{\frac{1}{2}\log 3}=2$

f) $\log_x 0{,}0001=4 \Rightarrow x^{4}=0{,}0001 \Rightarrow x=0{,}1$

g) $\dfrac{1}{2}=\ln x \Rightarrow x=\sqrt{e}$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x=-2 \Rightarrow x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x=4$

23. Las soluciones quedan:

a) $\log x=1+\log(22-x) \Leftrightarrow \log x=\log 10(22-x) \Rightarrow x=20$

b) $\log(3x-1)-\log(2x+3)=-\log 25+1 \Leftrightarrow \log\dfrac{3x-1}{2x+3}=\log\dfrac{10}{25} \Rightarrow x=1$

c) $2\log(5x+4)-\log 4=\log(x+4) \Leftrightarrow \log\dfrac{(5x+4)^{2}}{4}=\log(x+4) \Rightarrow x_1=0;\ x_2=-\dfrac{36}{25}$

d) $\dfrac{\log\left(5+x^{2}\right)}{\log(2-x)}=2 \Leftrightarrow \log\left(5+x^{2}\right)=\log(2-x)^{2} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

e) $(x^2-5x+9)\log 2+\log 125=3 \Leftrightarrow \log(125\cdot 2^{x^2-5x+9})=\log 1000 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+9}=8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=3$

f) $2\log_2 x-\log_2(x-16)=\log_2 64 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2}{x-16}=\log_2 64 \Rightarrow x_1=32$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r}2^x+5^y=9\\ 2^{x+2}-5^{y+1}=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2^x+5^y=9\\ 4\cdot 2^x-5\cdot 5^y=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}2^x=4 \Rightarrow x=2\\ 5^y=5 \Rightarrow y=1\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r}2^x+2^y=24\\ 2^{x+y}=128\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2^x+2^y=24\\ 2^{x+y}=2^7\end{array}\right\} \Rightarrow x=4;\ y=3 \text{ ó } x=3;\ y=4$

c) $\left.\begin{array}{r}e^x=\dfrac{e^{11}}{e^y}\\ \log(x+y)+\log(x-y)=\log 55\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=11-y\\ (x+y)(x-y)=55\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=8\\ y=3\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r}\log_3 x+\log_3 y=0\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x\cdot y=1\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow x=2,62;\ y=0,38 \text{ ó } x=0,38;\ y=2,62$

e) $\left.\begin{array}{r}\log_x(y-18)=2\\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}y-18=x^2\\ x+3=\sqrt{y}\end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{3}{2};\ y=\dfrac{81}{4}$

f) $\left.\begin{array}{r}\log_2 x-3\log_2 y=5\\ \log_2 x^2-\log_2 y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\log_2 x-3\log_2 y=5\\ 2\log_2 x-\log_2 y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\log_2 x=2 \Rightarrow x=4\\ \log_2 y=1 \Rightarrow y=2\end{array}$

25. Llamando:

x: número de bricks de leche entera
y: número de bricks de leche semidesnatada
z: número de bricks de leche desnatada

Imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10\,400 \\ 0,6x+0,55y+0,5z=5\,765 \\ x=0,6(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3\,900 \text{ bricks de leche entera} \\ y=3\,500 \text{ bricks de leche semidesnatada} \\ z=3\,000 \text{ bricks de leche desnatada} \end{array}$$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{-10}{x-2} > 0$

b) $x^2 - 10x \leq 0$

c) $3(x-1) - 2(x+3) > 5x - 7$

d) $\frac{6-2x}{x+3} \leq 0$

e) $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$

f) $x(x-3) \leq x^2 + 5x + 2$

g) $\frac{x+1}{x} \geq 2$

h) $\frac{3x}{8} > \frac{3x-9}{2} - \frac{2x-8}{3}$

i) $\frac{2x-3}{x+1} < 1$

27. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2(x-1) < 6x + 3(2-x) \\ 5(x-3) \leq \frac{3-x}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} \leq 2 \\ \frac{3x+1}{2} - \frac{3x-6}{4} > 2 \end{cases}$

28. En un número de seis cifras, la cifra de su izquierda es 1. Si se lleva esta cifra al primer lugar de la derecha, el número obtenido es triple del primitivo. Calcula el número primitivo.

29. En un trabajo actúan tres mecanógrafas y lo terminan en cuatro días. Si trabajase solamente la primera, lo terminaría en 12 días; si trabajase solamente la segunda, lo terminaría en 10 días. ¿En cuánto tiempo lo terminaría la tercera actuando sola?

30. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero, si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número total de cubitos.

31. En un centro hay dos equipos de fútbol, A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B, en ambos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A, queda en este un número que es el cuadrado de los de aquel. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?

32. Resuelve las cuestiones siguientes referidas a ecuaciones de segundo grado:

a) En la ecuación $2x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$, determina el valor que ha de tomar m para que la diferencia de sus soluciones sea la unidad.

b) Calcula el valor de m en la ecuación $mx^2 + 14x + 12 = 0$, para que una de las soluciones sea seis veces la otra.

c) Determina el valor de m en la ecuación $x^2 + mx + 1 = 0$, sabiendo que una de las soluciones es $-\frac{1}{4}$. Halla la otra solución.

d) Determina m en la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$, de modo que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

33. Calcula el valor de la expresión $\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b}$.

26. Las soluciones son:

a) $(-\infty,2)$ d) $(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$ *g*) $(0,1]$

b) $[0,10]$ e) $\{3\}$ *h*) $(-\infty,4)$

c) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ f) $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$ *i*) $(-1,4)$

27. Operando con cada una de las inecuaciones de estos sistemas obtenemos los siguientes intervalos como solución:

a) $(-8,3]$ b) $(0,7]$

28. Por ensayo y error dirigido obtenemos que el número es 142 857. También se puede hacer mediante ecuaciones:

$$\text{Número}=100\,000+x \Rightarrow 3(100\,000+x)=x\cdot 10+1$$
$$\Rightarrow x=42\,857 \Rightarrow \text{Número}=142\,857$$

29. Llamamos *x* al tiempo que invertiría la tercera ella sola. Obtenemos:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x=15 \text{ días tarda la 3ª}$$

30. Llamamos x a la longitud de la arista de la caja, obtenemos:

$$x^3+71=(x+1)^3-200 \quad \Rightarrow \quad x=9\,\text{cm}$$

Las aristas de las cajas son 9 cm y 10 cm, y hay 800 cubitos de 1 cm^3.

31. En el equipo A hay *x* futbolistas y en el equipo B hay *y* futbolistas.

$$\left.\begin{array}{l} x-3=y+3 \\ x+7=(y-7)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=18 \text{ futbolistas en el equipo A} \\ y=12 \text{ futbolistas en el equipo B} \end{array}$$

32. Cada uno de los apartados queda:

a) Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4 \cdot 2\,(m+3)}}{4}$$

Imponiendo la condición del enunciado:

$$\frac{(m+1) + \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} - \frac{(m+1) - \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} = 1$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)} = 2\ \Rightarrow\ m^2 - 6m - 27 = 0\ \Rightarrow\ m = 9\ \text{ ó }\ m = -3$$

b) Llamamos y, z a las soluciones de la ecuación. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = -\dfrac{14}{m} \\ y \cdot z = \dfrac{12}{m} \\ y = 6z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 2 \\ z = -1 \\ y = -6 \end{array}$$

c) Si una solución es $x_1 = -\frac{1}{4}$, ésta verifica la ecuación, por tanto:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + m\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0\ \Rightarrow\ m = \frac{17}{4}\ \Rightarrow\ \text{La otra solución es } -4.$$

d) Resolviendo la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$ obtenemos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$$

Las dos raíces son iguales si: $m^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 4$

33. Quedaría del siguiente modo:

$$\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b} = \frac{\log a}{\log \frac{1}{a}} + \frac{\log \frac{1}{b}}{\log b} = \frac{\log a}{-\log a} + \frac{-\log b}{\log b} = -2$$

ACTIVIDADES FINALES

34. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = 12$

b) $\sqrt{2x^2 - 4} = 1 + \sqrt{x^2 - 3}$

c) $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 = 3x^2$

d) $\dfrac{4}{x^2 - 1} = x^2 - 1$

35. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + y + 2z = 150 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - z \\ 3x - 5z = -4 - 2y \\ z - 6y = 9 - 4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy = 30 \\ xy + y^2 = 6 \end{cases}$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales o logarítmicas:

a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

b) $9^{x+1} = 55 + 8 \cdot 3^x$

c) $\dfrac{\log(5 - x^3)}{\log(1 - x)} = 3$

d) $\log_x(2 + x - 2x^2) = 3$

37. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + 2 < 0$

b) $x^3 + 10x \leq 11\, x^2$

38. El perímetro de un jardín rectangular es 36 m. Si se aumentan sus lados en 2 m cada uno, el área aumenta en 40 m². Halla las dimensiones del jardín.

39. Halla tres números sabiendo que su suma dividida por el primero de ellos es una división exacta de cociente 5. La misma suma dividida por el segundo de los números da 2 de cociente y 9 de resto. Finalmente, dividida por el tercero da 2 de cociente y 9 de resto.

40. Un padre tiene 27 años más que su hijo. ¿En qué etapa de la vida del hijo la edad del padre fue más de 10 veces la de su hijo?

41. Una empresa de telefonía móvil paga a sus comerciales 10 euros por cada móvil vendido y 1 200 euros fijos al mes. Otra empresa paga 5 euros por cada móvil vendido y 1 500 euros fijos al mes. ¿Qué número de móviles debe vender un comercial para que resulte más rentable trabajar para la segunda empresa?

42. Un individuo hace un viaje de 920 km en su coche. Su velocidad es de 80 km/h cuesta arriba, 120 km/h cuesta abajo, y 100 km/h en llano. A la ida emplea 9 horas en el viaje, y al volver por el mismo camino emplea 10 horas. ¿Cuántos kilómetros hace cuesta arriba y cuántos cuesta abajo? ¿y en llano?

43. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2 - 8| = 1$

b) $|2x - 3| = |x + 9|$

34. Las soluciones quedan:

a) $\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)=12 \quad \Rightarrow \quad x^4=16 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-2=2\sqrt{x^2-3}$, y elevando de nuevo obtendríamos: $x^4-8x^2+16=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$ y ambas soluciones son válidas.

c) Factorizando obtenemos: $x^2(x-1)(x+1)(2x+3)=0$ y sus soluciones serán las siguientes: $x=0$ doble ; $x=-1$; $x=1$; $x=-\dfrac{3}{2}$.

d) Operando obtenemos: $x^4-2x^2-3=0$ cuyas soluciones son: $x=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$.

35. Los sistemas son:

a) Las soluciones son: $x=3$ e $y=1$ ó $x=-2$ e $y=-4$

b) Las soluciones son: $x=20$; $y=30$; $z=50$

c) Las soluciones son: $x=3$; $y=1$; $z=3$

d) Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $(x+y)^2=36 \quad \Rightarrow \quad x+y=6$ ó $x+y=-6$ y la solución provendrá de la resolución de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+xy=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=5 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+xy=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-5 \\ y=-1 \end{matrix}$$

36. Las soluciones quedan:

a) La solución sería: $x=2$

b) Haciendo $3^x=z$ obtenemos la ecuación: $9z^2-8z-55=0$ cuyas soluciones quedan como $z=2,96$ y $z=-2,07$; por tanto:

$$3^x=2,96 \Rightarrow x=\frac{\log 2,96}{\log 3}=0,99$$

c) Operando obtenemos:

$$\log\left(5-x^3\right)=3\log\left(1-x\right) \Rightarrow 5-x^3=\left(1-x\right)^3 \Rightarrow 3x^2-3x-4=0$$

$\Rightarrow$ $x=1,76$ solución no válida y $x=-0,76$ que es la solución válida.

d) Obtenemos la ecuación: $x^3+2x^2-x-2=0$ cuyas soluciones no verifican la ecuación original. Diremos, por tanto, que carece de soluciones.

37. Las soluciones quedan:

a) Operando obtenemos la inecuación: $\frac{3x-1}{x-1}<0$ cuya solución es el intervalo $\left(\frac{1}{3},1\right)$

b) Operando la ecuación: $x^3-11x^2+10x\leq 0$ cuya solución se define por $\left(-\infty,0\right]\cup\left[1,10\right]$

38. Llamando *x*, *y* a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c}2x+2y=36\\ \left(x+2\right)\left(y+2\right)=xy+40\end{array}\right\}$$

Este sistema tiene indefinidas soluciones, todos los valores de *x* e *y* que verifiquen la siguiente expresión: $x+y=18$ con $x\in\left(0,18\right)$ e $y\in\left(0,18\right)$.

39. Llamando *x*, *y*, *z* a los números e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=5x\\ x+y+z=2y+9\\ x+y+z=2z+9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=9\\ y=18\\ z=18\end{array}$$

40. Cuando la edad del hijo esté en el intervalo $(0,3)$.

41. Llamando x al número de móviles vendidos obtenemos la ecuación: $5x+1500>10x+1200$ cuya solución es $x<60$. Luego la solución es el conjunto de números enteros de x comprendidos en el intervalo $(0,60)$.

42. Llamamos x al número de kilómetros hacia arriba a la ida, y al número de kilómetros hechos en llano y z al número de kilómetros hacia abajo. Imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=920 \\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{100}+\dfrac{z}{120}=9 \\ \dfrac{x}{120}+\dfrac{y}{100}+\dfrac{z}{80}=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=240 \text{ km} \\ y=200 \text{ km} \\ z=480 \text{ km} \end{array}$$

43. Las soluciones quedan:

a) $x^2-8=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3$ y $x=\pm\sqrt{7}$

b) $2x-3=x+9 \quad \Rightarrow \quad x=12$ o bien $2x-3=-(x+9) \quad \Rightarrow \quad x=-2$

Unidad 4 – Trigonometría I

PÁGINA 87

cuestiones iniciales

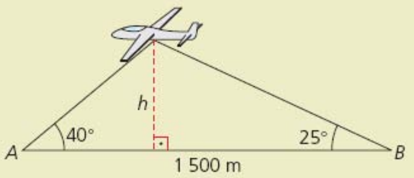
1. Un ángulo α, situado en el segundo cuadrante, tiene por coseno $\cos \alpha = -0{,}2$. Determina el resto de las razones trigonométricas de este ángulo.

2. Discute si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

a) El seno de un ángulo vale 1,5.
b) La tangente de un ángulo vale –5 000.
c) El coseno de 720° vale 1.

3. Calcula el área de un pentágono regular de 12 cm de lado.

4. Dos amigos, situados a 1 500 m de distancia, observan en un mismo instante una avioneta, tal como se muestra en la figura. Las visuales que cada uno de ellos dirigen a la avioneta forman, respectivamente, ángulos de 40° y 25° con la horizontal. Calcula la altura a la que se encuentra la avioneta.



SOLUCIONES

1. Sabemos que $\cos\alpha = -0{,}2$ y que $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$. Utilizando la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ hallamos $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}98$. Por otro lado quedaría:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -4{,}9$$

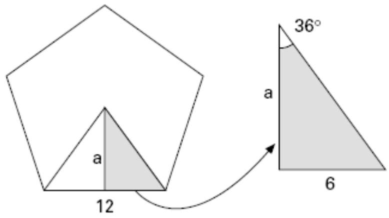
2. La discusión quedaría:

a) Falsa pues $\operatorname{sen}\alpha \in [-1,1]$

b) Verdadera pues $\operatorname{tg}\alpha \in (-\infty, +\infty)$

c) Verdadera pues $\cos 720^{\circ} \cong \cos 360^{\circ} = 1$.

3. Según el esquema:



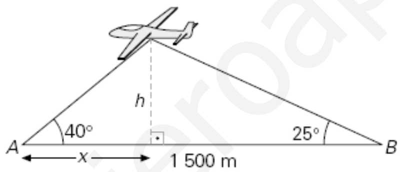
$$360^{\circ}:5=72^{\circ}$$

En el triángulo rayado calculemos el valor de la apotema del pentágono.

$$\text{tg}\,36^{\circ}=\frac{6}{a}\ \Rightarrow\ a=8,26\text{ cm}$$

$$\text{Área}=\frac{5\cdot 12\cdot 8,26}{2}\ \Rightarrow\ \text{Área}=247,8\text{ cm}^2$$

4. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg}\,40^{\circ}=\dfrac{h}{x}\\ \text{tg}\,25^{\circ}=\dfrac{h}{1500-x}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l}h=\dfrac{1500\cdot\text{tg}\,40^{\circ}\cdot\text{tg}\,25^{\circ}}{\text{tg}\,40^{\circ}+\text{tg}\,25^{\circ}}\\ \\ h=449,61\text{ m}\end{array}$$

PÁGINA 103

ACTIVIDADES

- Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El pequeño astuto.** El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?

2. **Igualdad.** ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{988\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1\,000}=0{,}999$$

3. **Tostado rápido.** Hay que tostar en un tostador tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

$$\text{Números triangulares}: 1, 3, 4, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Números cuadrados}: 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; \text{esto se cumple para } n=8, \text{ pues } \frac{8^2+8}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; x^2=36.$$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es:

$$n=49, \text{ pues } \frac{49^2+49}{2}=35^2=1225 \;\Rightarrow\; \text{Luego } x^2=1225 \text{ cajas tiene.}$$

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \text{ con } n\geq 2.$$

Luego:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\ldots=\ldots-\ldots$$
$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$
$$\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=0{,}999$$

3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1.º A_1B_1 tarda: 30 s: tostar cara A_1 y B_1
5 s: colocar A_1
5 s: colocar B_1
5 s: sacar B_1

2.º A_2C_1 tarda: 3 s: dar la vuelta A_1
5 s: meter C_1
30 s: tostar cara A_2 y C_1
3 s: dar la vuelta C_2

3.º B_2C_2 tarda: 5 s: sacar A_2
5 s: meter B_2
30 s: tostar cara B_2 y C_2
5 s: sacar B_2
5 s: sacar C_2

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

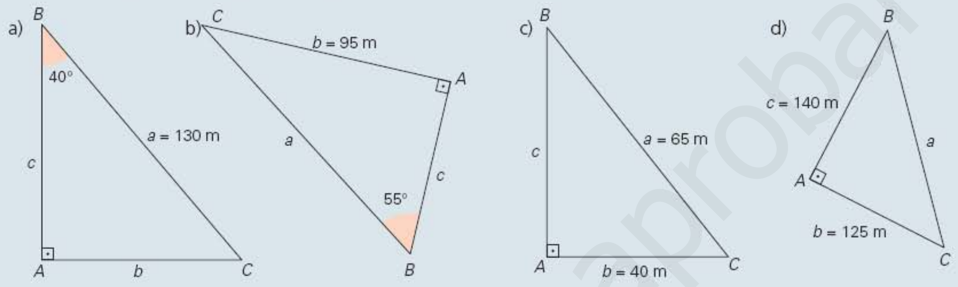
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida:

90°		120°		225°		39° 42′		135° 22′ 42″	
	$\frac{\pi}{4}$ rad		$\frac{3\pi}{2}$ rad		$\frac{4\pi}{3}$ rad		1 rad		2,5 rad

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



3. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42°. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?

4. Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45°.

5. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.

6. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

7. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\text{tg } x = \frac{4}{3}$ y que $180° < x < 270°$, calcula las demás razones trigonométricas.

↑ Los astrolabios se utilizan para determinar ángulos.

10. Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\text{sen } A = -\frac{3}{5}$.

1. La tabla queda:

90º	45º	120º	270º	225º
$\frac{\pi}{2}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{2\pi}{3}$rad	$\frac{3\pi}{2}$rad	$\frac{5\pi}{4}$rad
240º	39º 42'	57º 20'	135º 22' 42''	143º 19'
$\frac{4\pi}{3}$rad	$0{,}22\,\pi$rad	1rad	$0{,}75\,\pi$rad	$2{,}5$rad

2. La resolución de los triángulos queda:

I) $\hat{C} = 50º;\ b = 130 \cdot \text{sen } 40º = 83{,}56 \text{ m};$
$c = 130 \cdot \cos 40º = 99{,}59 \text{ m}$

II) $\hat{C} = 35º;\ c = \dfrac{95}{\text{tg } 55º} = 66{,}52 \text{ m};$

$$a = \frac{95}{\text{sen } 55º} = 115{,}97 \text{ m}$$

III) $\cos \hat{C} = \dfrac{40}{65} \Rightarrow \hat{C} = 52º\ 1';\ \hat{B} = 37º\ 59';$

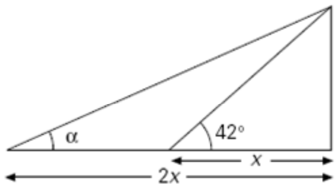
$$c = \sqrt{65^2 - 40^2} = 51{,}23 \text{ m}$$

IV) $a = \sqrt{140^2 + 125^2} = 187{,}68 \text{ m};$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{140}{125} \Rightarrow \hat{C} = 48º\ 14'\ 23''$$

$$\hat{B} = 41º\ 45'\ 37''$$

3. Sea la figura:



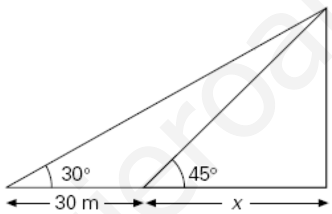
Queda:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 42º &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{h}{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{tg } 42º = 0{,}45; \quad \alpha = 24º\,14'\,15''$$

Si nos colocamos a distancia triple se verificará:

$$\text{tg } \beta = \frac{h}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \text{tg } 42º = 0{,}3 \ \Rightarrow \ \beta = 16º\,42'\,23''$$

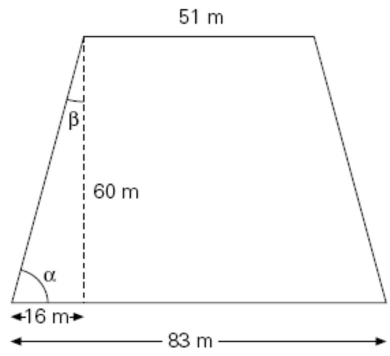
4. Sea la figura:



Queda:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 45º &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 30º &= \frac{h}{30 + x} \end{aligned}\right\} \ h = \frac{30 \cdot \text{tg } 45º \cdot \text{tg } 30º}{\text{tg } 45º - \text{tg } 30º} \quad \Rightarrow \quad h = 40{,}98 \text{ m}$$

5. Sea la figura:

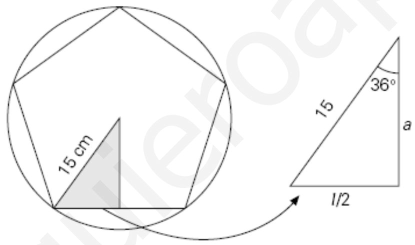


Queda:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{60}{16} \Rightarrow \alpha = 75^{\circ}\,4'\,7''$$
$$\beta = 90 - \alpha = 14^{\circ}\,55'\,53''$$

Los ángulos del trapecio miden $75^{\circ}\,4'\,7''$ los dos agudos y $104^{\circ}\,55'\,33''$ cada uno de los dos obtusos.

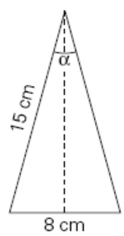
6. Sea la figura:



Llamamos *l* al lado del pentágono. De la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen} 36^{\circ} = \frac{l/2}{15} \Rightarrow l = 30 \cdot \operatorname{sen} 36^{\circ} \Rightarrow l = 17{,}63 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 17{,}63 = 88{,}15 \text{ cm}$$

7. Sea la figura:



Llamamos α al ángulo que forman las ramas del triángulo rectángulo de la figura. Obtenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha/2 = \frac{4}{15} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}\,55'\,55''$$

8. Quedan:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0{,}91; \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{-\sqrt{119}}{5} = -2{,}18$$

9. Quedan:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{-3}{5} \;\; y \;\; \text{sen}\; x = \frac{-4}{5}$$

10. Quedan:

$$\text{Si tg}\, A > 0 \;\Rightarrow\; 0 < A < \frac{\pi}{2} \;\; \text{ó} \;\; \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Como sen}\, A = -\frac{3}{5} \;\Rightarrow\; \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \;\Rightarrow\; \cos A = -\frac{4}{5} \;\; \text{y} \;\; \text{tg}\, A = \frac{3}{4}$$

11. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\alpha}$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\alpha}$

d) $\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\text{tg}\alpha+\text{cotg}\alpha)$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\alpha+\cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha$

12. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:

a) sen 120°
b) sen 1 215°
c) cos 210°
d) tg (–60°)
e) tg 300°
f) $\sec\dfrac{23\pi}{6}$
g) cotg 225°
h) $\text{cosec}\,\dfrac{29\pi}{4}$

13. Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $\text{sen}\,(180°-\alpha)$
b) $\text{tg}\,(90°+\alpha)$
c) $\cos\,(180°+\alpha)$
d) $\text{sen}\,(270°+\alpha)$
e) $\cos\,(90°-\alpha)$
f) $\text{cotg}\,(360°-\alpha)$

14. Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{\text{cotg}\,a+\text{cotg}\,b}=\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b$

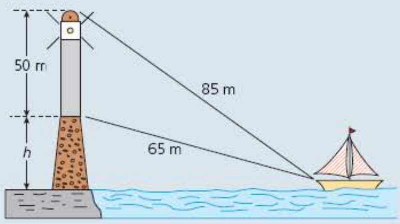
b) $\text{sen}^4x-\text{sen}^2x=\cos^4x-\cos^2x$

c) $\dfrac{1-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\alpha}$

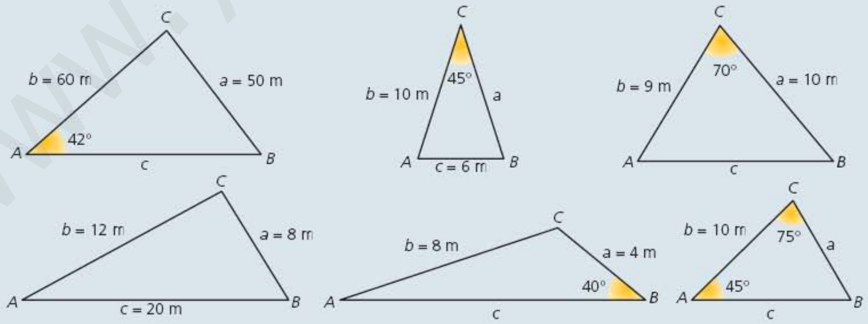
d) $\text{tg}^2x-\text{tg}^2x\cdot\text{sen}^2x=\text{sen}^2x$

15. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m.

Halla la altura del promontorio.



16. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}}=\text{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=1-\text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\,(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=1$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}\,\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\;\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\;\text{sen}^2\alpha=(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)=\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\cdot(1-\text{sen}^2\alpha)=\text{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$

12. Queda:

a) $\text{sen } 120º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen } 1215º = \text{sen } 135º = \text{sen } 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 210º = -\cos 30º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg } (-60º) = -\text{tg } 60º = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg } 300º = -\text{tg } 60º = -\sqrt{3}$

f) $\sec \frac{23\pi}{6} = \sec 330º = \frac{2}{\sqrt{3}}$

g) $\text{cotg } 225º = \text{cotg } 45º = 1$

h) $\text{cosec } \frac{29\pi}{4} = \text{cosec } 225º = -\sqrt{2}$

13. Los cálculos quedan:

a) $\text{sen } (180º - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}6$

b) $\text{tg } (90º + \alpha) = -\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$

c) $\cos (180º + \alpha) = -\cos \alpha = -0{,}8$

d) $\text{sen } (270º + \alpha) = -\cos \alpha = -0{,}8$

e) $\cos (90º - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}6$

f) $\text{cotg } (360º - \alpha) = -\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$

14. Se comprueba del siguiente modo:

a) $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{cotg\ a + cotg\ b} = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\dfrac{1}{\text{tg } a} + \dfrac{1}{\text{tg } b}} = \dfrac{(\text{tg } a + \text{tg } b) \cdot \text{tg } a \cdot \text{tg } b}{\text{tg } a + \text{tg } b} = \text{tg } a \cdot \text{tg } b$

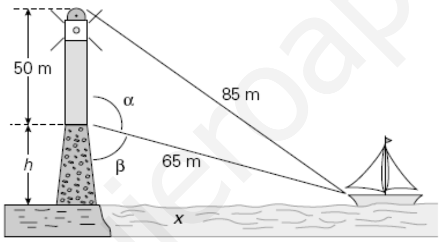
b) $\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x\,(\text{sen}^2 x - 1) = (1 - \cos^2 x)\,(-\cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x$

c) $\dfrac{1 - \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} \iff 1 - \text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

d) $\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 x \cdot \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x\,(1 - \text{sen}^2 x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

Todas las igualdades son verdaderas.

15. Sea la representación del problema:



Por Pitágoras obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h = 5 \text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 94º\ 24'\ 42''$$

Por tanto $\beta = 180º - \alpha = 85º\ 35'\ 18'' \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{h}{65} \quad \Rightarrow \quad h = 65 \cdot \cos \beta = 5 \text{ m}$

16. Los triángulos se resuelven del siguiente modo:

a) $50^2 = 60^2 + c^2 - 2\cdot 60\cdot c\cdot\cos 42º \Rightarrow c = 74,39\,\text{m}$ *ó* $c = 14,79\,\text{m}$

$\bullet$Si $c = 74,39\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \dfrac{50^2 + 60^2 - 74,39^2}{2\cdot 50\cdot 60} \Rightarrow C = 84º\,35'\,9''$ y $B = 53º\,24'\,51''$

$\bullet$Si $c = 14,79\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \dfrac{50^2 + 60^2 - 14,79^2}{2\cdot 50\cdot 60} \Rightarrow C = 11º\,25'\,5''$ y $B = 126º\,34'\,55''$

b) $6^2 = 10^2 + a^2 - 2\cdot 10\cdot a\cos 45º \Rightarrow a$ no es un número real. Este triángulo no tiene solución.

c) $c^2 = 9^2 + 10^2 - 2\cdot 9\cdot 10\cdot\cos 70º \Rightarrow c = 10,93\text{ m}$
$10^2 = 9^2 + 10,93^2 - 2\cdot 9\cdot 10,93\cdot\cos A \Rightarrow A = 59º\,17'\,35''$ y $B = 50º\,42'\,25''$

d) $\cos A = \dfrac{12^2 + 20^2 - 8^2}{2\cdot 12\cdot 20} \Rightarrow A = 0º$

Imposible. Además un lado es igual a la suma de los otros dos, por tanto no existe este triángulo.

e) $8^2 = 4^2 + c^2 - 2\cdot 4\cdot c\cdot\cos 40º \Rightarrow c = 10,64\text{ m}$
$\cos A = \dfrac{8^2 + 10,64^2 - 4^2}{2\cdot 8\cdot 10,64} \Rightarrow A = 18º\,44'\,44''$ y $C = 121º\,15'\,16''$

f) $B = 60º$.

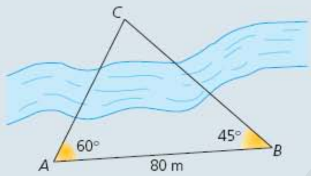
Utilizando el teorema del seno obtenemos :

$$\frac{a}{\text{sen }45º} = \frac{10}{\text{sen }60º} \Rightarrow a = 8,16\text{ m}$$
$$\frac{c}{\text{sen }75º} = \frac{10}{\text{sen }60º} \Rightarrow c = 11,15\text{ m}$$

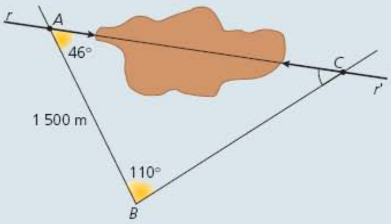
PÁGINA 108

ACTIVIDADES FINALES

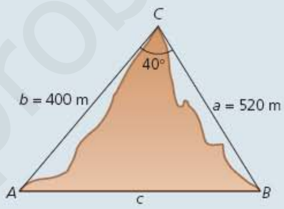
17. Desde dos puntos A y B situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto C, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente.
Calcula las distancias desde los puntos A y B hasta el punto C.



18. La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña, perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por r, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por r'. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto A en la recta r. Elegimos un ángulo A, por ejemplo 46°, y medimos una distancia AB de 1 500 m, por ejemplo. En B tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo C y la distancia BC. A partir de ambos datos queda determinada la dirección r' de perforación. Calcula estos datos.



19. La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto C, visible desde A y B, se encuentra a 400 m de A y 520 m de B, y el ángulo C mide 40°.
Calcula la longitud del túnel AB.



20. Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

21. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60°. Halla el área del trapecio.

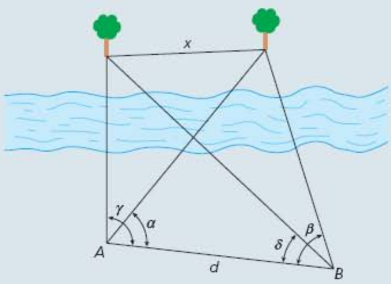
22. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.

23. Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.

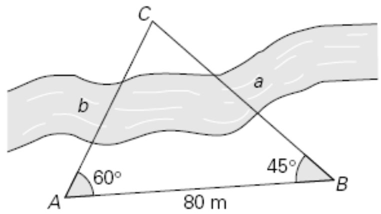
24. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.

25. El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.

26. En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snelius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos A y B medimos los ángulos α, β, γ y δ, y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia x sabiendo que $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$, $\delta = 40°$ y $d = 120$ m.



17. Un esquema del problema sería:

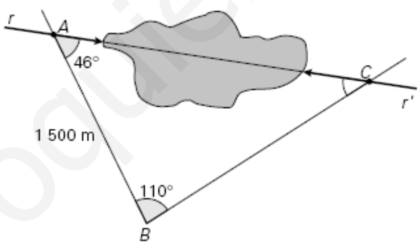


El ángulo $\widehat{C} = 75º$. Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 60º} = \frac{80}{\text{sen } 75º} \Rightarrow a = 71{,}73 \text{ m}$$
$$\frac{b}{\text{sen } 45º} = \frac{80}{\text{sen } 75º} \Rightarrow b = 58{,}56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,13 m y 58,56 m.

18. Un esquema del problema es el siguiente:

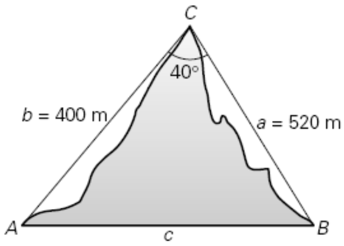


El ángulo $\widehat{C} = 24º$.

Determinamos la distancia BC (lado *a*) mediante el teorema del seno:

$$\frac{1\,500}{\text{sen } 24º} = \frac{BC}{\text{sen } 46º} \Rightarrow BC = 2\,652{,}85 \text{ m}$$

19. La figura queda:

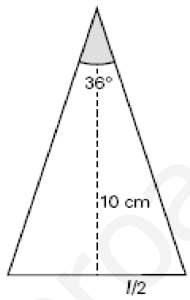


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 334,25 \text{ m} = AB$$

20. Como el decágono está circunscrito a la circunferencia, el radio de ésta es la apotema del polígono. El ángulo central del polígono es 36º.

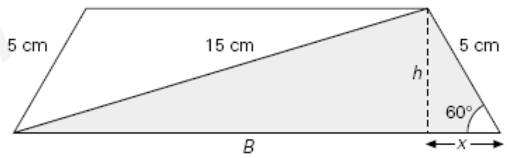
Obtenemos el lado del triángulo de la figura:



El cálculo queda:

$$\text{tg } 18º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 6,5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = \frac{10 \cdot 6,5 \cdot 10}{2} = 325 \text{ cm}^2$$

21. la figura es:



En el triángulo rayado aplicamos el teorema del coseno y obtenemos la base mayor B.

$$15^2 = B^2 + 5^2 - 2 \cdot B \cdot 5 \cdot \cos 60º \Rightarrow B = 16,86 \text{ cm}$$

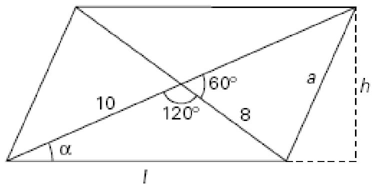
La altura h del triángulo mide: $h = 5 \cdot \text{sen } 60º = 4,33 \text{ cm}$

La base menor mide: $B - 2 \cdot x = B - 2 \cdot 5 \cdot \cos 60º = 11,86 \text{ cm}$

El área total queda:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} h = \frac{16,86 + 11,86}{2} 4,33 = 62,18 \text{ cm}^2$$

22. La figura queda:



Los cálculos son:

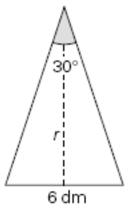
$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120º \Rightarrow l = 15{,}62 \text{ cm}$$
$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60º \Rightarrow a = 9{,}17 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15{,}62 + 2 \cdot 9{,}17 = 49{,}58 \text{ cm}$$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9{,}17^2 = 20^2 + 15{,}62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15{,}62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26º\ 20'\ 50''$$
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \text{sen}\ 26º\ 20'\ 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8{,}88 \text{ cm}$$
$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \text{l} \cdot \text{h} = 15{,}62 \cdot 8{,}88 \Rightarrow \text{Área} = 138{,}71 \text{ cm}^2$$

23. La distancia *d* que los separa viene dada por:

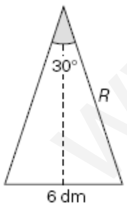
$$d^2 = 100^2 + 130^2 - 2 \cdot 100 \cdot 130 \cdot \cos 60º \Rightarrow d = 117{,}9 \text{ km}$$

24. Las soluciones en cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

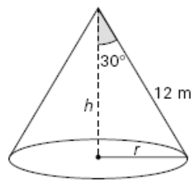
$$\text{tg}\ 15º = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11{,}20 \text{ dm}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

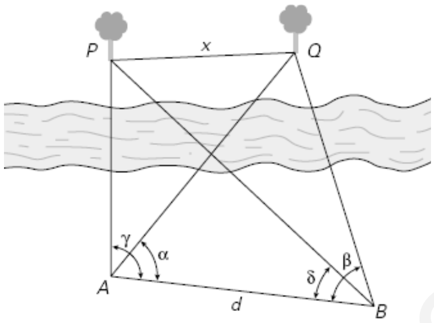
$$\text{sen}\ 15º = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11{,}59 \text{ dm}$$

25. La solución queda:



$$\left.\begin{array}{r} r = 12 \cdot \text{sen } 30^{\circ} = 6 \text{ m} \\ h = 12 \cdot \cos 30^{\circ} = 10{,}39 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 10{,}39}{3} = 391{,}7 \text{ m}^3$$

26. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles.
En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{\text{sen } 110^{\circ}} = \frac{120}{\text{sen } 30^{\circ}} \Rightarrow PB = 225{,}53 \text{ m}$$

En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{\text{sen } 50^{\circ}} = \frac{120}{\text{sen } 55^{\circ}} \Rightarrow BQ = 112{,}22 \text{ m}$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^{\circ} \Rightarrow x = 148{,}30 \text{ m}$$

Unidad 5 – Trigonometría II

PÁGINA 111

cuestiones iniciales

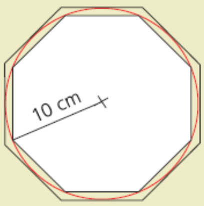
1. Razona la veracidad de las siguientes igualdades:

a) $\cos(60° + 45°) = \cos 60° + \cos 45°$

b) $\text{sen}(2 \cdot 30°) = 2 \cdot \text{sen } 30°$

c) $\text{tg}(45° - 30°) = \text{tg } 45° - \text{tg } 30°$

2. En una circunferencia de 10 cm de radio inscribimos y circunscribimos sendos octógonos regulares. Calcula el área de la superficie comprendida entre ellos.



3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(x + 25°) = 0{,}5$ b) $\text{sen } x = \cos x$ c) $\text{tg}(2x) = \sqrt{3}$

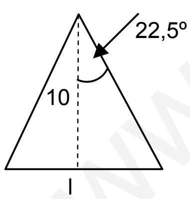
4. Deduce la expresión que permite calcular el área de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

SOLUCIONES

1. Las tres igualdades son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. Calculamos el área del octógono circunscrito y le restamos el área del octógono inscrito obteniendo la superficie pedida.

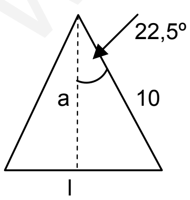
- El octógono circunscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{tg}\,22{,}5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 8{,}28\,\text{cm}$$

Área del octógono circunscrito $= 331{,}2\,\text{cm}^2$

- El octógono inscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{sen } 22{,}5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 7{,}65\,\text{cm}$$

$$\cos 22{,}5° = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9{,}24\,\text{cm}$$

Área del octógono inscrito $= 282{,}744\,\text{cm}^2$

El área comprendida entre ambos será: $331{,}2 - 282{,}744 = 48{,}456\,\text{cm}^2$

3. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}(x+25^\circ)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5^\circ+360^\circ K \\ x=125^\circ+360^\circ K \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} x=\cos x \Rightarrow \begin{cases} x=45^\circ+360^\circ K \\ x=225^\circ+360^\circ K \end{cases}$

c) $\operatorname{tg}(2x)=\sqrt{3} \Rightarrow \{x=30^\circ+90^\circ K$

4. Supongamos conocidos los lados b y c y el ángulo A comprendido:

Calculamos la altura: $h=b\cdot \operatorname{sen} A$

El área será:

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{c\cdot b\cdot \operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \text{Área}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \operatorname{sen} A$$

PÁGINA 123

ACTIVIDADES

- Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en los siguientes problemas:

  1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?
  2. **Igualdad.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podemos apilar? Intenta generalizar este problema.

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

   $$5\cdot(4B+3N)=4\cdot(3B+5N) \;\Rightarrow\; 20B+15N=12B+20N \;\Rightarrow\; 8B=5N$$

   Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

   $1^2+2^2+3^2+4^2+...+14^2+15^2=1\,240$ naranjas.

PÁGINA 126

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\text{sen } a = -\frac{12}{13}$ y $\text{tg } b = \frac{24}{7}$, y que $270° < a < 360°$ y $180° < b < 270°$, calcula:

   a) $\text{sen }(a + b)$ b) $\cos(a + b)$ c) $\text{tg }(a + b)$.

2. Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

   a) sen 90° b) cos 90° c) sen 120° d) cos 120° e) tg 120° f) sen 105° g) cos 105° h) tg 105°

3. Sabiendo que el seno de un ángulo es $\text{sen } a = \frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30°$.

4. Justifica las siguientes igualdades:

   a) $\text{sen }(180° + a) = -\text{sen } a$

   b) $\text{tg }\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotg } a$

   c) $\text{sen }(270° + a) = -\cos a$

   d) $\text{tg }(\pi + 2a) = \text{tg } 2a$

   e) $\cos(90° + a) = -\text{sen } a$

   f) $\text{tg }(270° + a) = -\text{cotg } a$

5. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\text{sen } a \cdot \text{sen }(b - c) - \text{sen } b \cdot \text{sen }(a - c) + \text{sen } c \cdot \text{sen }(a - b)$$

6. Demuestra que $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$.

7. Demuestra que $\text{sen }(a + b) \cdot \text{sen }(a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

8. Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

   a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$

   b) $\text{sen } 4a$ en función de $\text{sen } a$

9. Sabiendo que $\text{tg } a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.

10. Sabiendo que $\text{tg } 2a = \sqrt{3}$, halla $\text{tg } a$

11. Simplifica las expresiones:

    a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a}$ b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \dfrac{1 + \cos 2a}{\cos a}$

12. Demuestra que $\text{tg } x = \text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x$.

13. Comprueba que $\dfrac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \cos 2a$.

14. Calcula las razones trigonométricas de 22° 30′ y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

1. Quedan:

$$\text{sen } a = -\frac{12}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{5}{13} \text{ y } \text{tg } a = -\frac{12}{5}$$
$$\text{tg } b = \frac{24}{7} \Rightarrow \cos b = -\frac{7}{25} \text{ y } \text{sen } b = -\frac{24}{25}$$
$$\text{sen } (a+b) = -\frac{36}{325};\ \cos (a+b) = -\frac{323}{325};\ \text{tg } (a+b) = \frac{36}{323}$$

2. Los cálculos son los siguientes:

$$\text{sen } 90° = \text{sen } (30° + 60°) = 1$$

$$\cos 90° = \cos (30° + 60°) = 0$$

$$\text{sen } 120° = \text{sen } (60° + 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos (60° + 60°) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 120° = \text{tg } (60° + 60°) = -\sqrt{3}$$

$$\text{sen } 105° = \text{sen } (45^{\underline{o}} + 60°) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105° = \cos (45^{\underline{o}} + 60°) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg } 105° = \text{tg } (45^{\underline{o}} + 60°) = -2 - \sqrt{3}$$

3. Quedan:

$$\text{sen } a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$$
$$\text{sen } (a - 30°) = \text{sen } a \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$
$$\cos (a - 30°) = \cos a \cdot \cos 30° + \text{sen } a \cdot \text{sen } 30° = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$
$$\text{tg } (a - 30°) = \frac{\text{sen } (a - 30°)}{\cos (a - 30°)} = -\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad didáctica.

5. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen}(b-c)-\operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen}(a-c)+\operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen}(a-b)=$$
$$=\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos c-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} c\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} a\cdot\cos c+\operatorname{sen} b\cdot\operatorname{sen} c\cdot\cos a+$$
$$+\operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} c\cdot\operatorname{sen} b\cdot\cos a=0$$

6. Queda de la forma:

$$\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)\cdot(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)=$$
$$=\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a\cdot(1-\operatorname{sen}^2 b)-(1-\cos^2 a)\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 b\cdot(1-\operatorname{sen}^2 a)-(1-\cos^2 b)\cdot\operatorname{sen}^2 a=\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a$

7. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\operatorname{sen} b\cdot\cos a)\cdot(\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a)=$$
$$=\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cdot(1-\operatorname{sen}^2 b)-(1-\operatorname{sen}^2 a)\cdot\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a=\cos^2 b\cdot(1-\cos^2 a)-(1-\cos^2 b)\cdot\cos^2 a=\cos^2 b-\cos^2 a$

8. Queda:

a) $\cos 3a=\cos(2a+a)=4\cos^3 a-3\cos a$

b) $\operatorname{sen} 4a=\operatorname{sen} 2\cdot 2a=(4\operatorname{sen} a-8\operatorname{sen}^3 a)\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$

También se puede resolver esta actividad mediante la fórmula de De Moivre.

9. Las razones trigonométricas quedan:

$$\operatorname{tg} a=\sqrt{24}\ \ y\ \left(\pi<a<\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\ \operatorname{sen} a=-\frac{\sqrt{24}}{5};\ \cos a=-\frac{1}{5}$$
$$\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cdot\cos a=\frac{2\sqrt{24}}{25};\quad \cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=-\frac{23}{25};\quad \operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=-\frac{2\sqrt{24}}{23}$$

10. La tangente queda:

$$\text{tg } 2a = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{3} \text{ tg}^2 a + 2 \text{ tg } a - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \text{tg } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o bien } \text{tg } a = -\sqrt{3}$$

11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} = \dfrac{2 \text{ sen } a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a} = tg\ a$

b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \dfrac{1 + \cos 2a}{\cos a} = \dfrac{\text{sen } 2a \cdot \cos a}{\text{sen } a \cdot (1 + \cos 2a)} = 1$

12. Partimos del segundo miembro para llegar al primero:

$$\text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2}{\text{tg } 2x} = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2\,(1 - \text{tg}^2 x)}{2 \text{ tg } x} = \frac{1 - 1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg } x} = \text{tg } x$$

13. Partiendo del primer miembro obtenemos:

$$\frac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \frac{\text{tg } a}{\dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} - \text{tg } a} = \frac{(1 - \text{tg}^2 a) \text{ tg } a}{\text{tg } a\,(1 + \text{tg}^2 a)} = \cos 2a$$

14. Quedan:

$$\text{sen } 22^\circ\, 30' = \text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ\, 30' = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg } 22^\circ\, 30' = \text{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75^{\circ} = \cos\left(\frac{150^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 150^{\circ}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^{\circ} = \operatorname{tg}\left(\frac{150^{\circ}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 150^{\circ}}{1+\cos 150^{\circ}}} = 2+\sqrt{3}$$