

## Límites y continuidad

1. Comprueba dando valores que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x^2 + 1} = 1,2$

2. Halla, por sustitución (si se puede), los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)$    b)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+3}{x^2-4}$    c)  $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{2x-5}$    d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-5}$   
e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+3}{x^2+x-1}}$    f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+x-1}}$    g)  $\lim_{x \rightarrow 2} (e^{2x-3})$    h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3)$   
i)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$    j)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$    k)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tag} x$

(Sol. a)  $-2$ ; b)  $-9/32$ ; c)  $3$ ; d) No existe; e)  $\sqrt{5}$ ;  $1/\sqrt{5}$ ; g)  $e$ ; h)  $4$ ; i)  $1$ ; j)  $0$ ; k)  $\infty$ .

3. Halla el límite de:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , cuando  $x \rightarrow 0$ ;   b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x/(x-2) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ , cuando  $x \rightarrow -1$

Sol. a)  $0$ ; b) No existe.

4. Dada la función  $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}$ , halla su límite cuando  $x$  tiende a  $3$ ,  $0$ ,  $-2$ ,  $2$  y  $-1$ .

(Sol.  $15/4$ ;  $0$ ;  $0$ ;  $\infty$ ;  $\infty$ .)

5. Halla:   a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2}$    b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^2}$    c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4}$    d)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x+1}{2x-1}$

(Sol. a)  $\infty$ ; b)  $-3/2$ ; c)  $-1/4$ ; d)  $\infty$ .)

6. Halla: a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$    b)  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$    c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2-4}$    d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-3}{(x-4)^2}$

(Sol.  $0$ ; b)  $\pm\infty$ ; c)  $\pm\infty$ ; d)  $\infty$ )

7. Halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-1}$    b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x-5}$    c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$    d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

(Sol. a)  $\infty$ ; b)  $10$ ; c)  $\infty$ ; d)  $6$ .)

8. Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$    b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x}}{2x-4}$    c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x}$    e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$    f)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2-25}{x^2-5x}}$

(Sol. a)  $1/4$ ; b)  $\infty$ ; c)  $-4$ ; d)  $2/3$ ; e)  $1/18$ ; f)  $\sqrt{2}$ .)

9. Halla: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-5)$    b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x+7)$    c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 - 10x + 17)$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}$    e)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-14}{x^2}$    f)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-5}$

(Sol: a)  $\infty$ ; b)  $-\infty$ ; c)  $\infty$ ; d)  $0$ ; e)  $0$ ; f)  $0$ .)

10. Halla: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2-4x+1}$    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$    c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{2x+7}$    e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$    f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$

(Sol. a)  $0$ ; b)  $2/5$ ; c)  $2/5$ ; d)  $+\infty$ ; e)  $-\infty$ ; f)  $+\infty$ .)

11. Halla: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}}$

(Sol. a) 2; b) 0; c)  $\infty$ .)

### Cálculo de asíntotas

12. Determina las asíntotas de las funciones:

a)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

b)  $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

c)  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+2}$

a)  $x = 1$ ;  $y = 1$ . b)  $x = 0$ ;  $y = 2$ . c)  $y = 0$ .)

13. Calcula las asíntotas de las funciones: a)  $f(x) = \frac{3x^2-2x-4}{x-1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$

(Sol.  $x = 1$ ;  $y = 3x + 1$ . b)  $x = -1$ ;  $y = x + 1$ .)

14. Comprueba que las siguientes funciones tienen una asíntota horizontal hacia  $-\infty$ : Hállala en cada caso: a)  $f(x) = 1 + 2^x$  b)  $f(x) = 2 - 2^x$  (Sol. a)  $y = 1$ ;  $y = 2$ .)

### Continuidad de funciones y aplicaciones

15. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

Sol. a)  $\mathbf{R}$ ; b)  $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$ ; c)  $\mathbf{R}$ ..

16. ¿Para qué valores de  $k$  la función  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+kx}$  tiene dos discontinuidades? Hállalas cuando  $k = -1$ ? (Sol.  $k = 0$  y  $1$ . En  $x = 1$  es evitable.)

17. ¿Para qué valores de  $k$  la función  $f(x) = \frac{x+k}{x^2-2x-3}$  tiene una discontinuidad evitable? (Sol.  $k = 1$  y  $2$ .)

18. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , ¿para qué valores de  $a$  la función  $f(x)$  es continua en  $x = 1$ ? Comprueba gráficamente que tu resultado es correcto. (Sol. 1.)

19. (PAU) Calcula la constante  $k$  para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 5 \\ 4x+k & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (\text{Sol. 4.})$$

20. (PAU) Calcula la constante  $k$  para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ x+k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (\text{Sol. 6.})$$

21. (PAU) Dada la función  $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ , se pide:

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Estudia razonadamente sus asíntotas.

(Sol. a)  $\mathbf{R} - \{-1\}$ ; b)  $x = -1$ ;  $y = x - 2$ .)

22. Estudia la continuidad de las funciones: a)  $f(x) = |x| - x$  b)  $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Haz su representación gráfica.

(Sol. a) Continua; b) Discontinua en  $x = 0$ .)