## OPCIÓN A

PROBLEMAS

1.- Un satélite de telecomunicaciones de 1 Tm describe órbitas circulares alrededor de la Tierra con un periodo de 90 min. Calcular

a) la altura a que se encuentra sobre la tierra.
b) su energía total.
c) Su velocidad orbital.

Datos: Radio Tierra = 6.370 km, $M_T = 5'98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

2.- Tres masas de 100 kg se colocan en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula:

a) El vector intensidad de campo gravitatorio en el otro vértice.
b) El potencial gravitatorio en el cuarto vértice.
c) El trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el cuarto vértice hasta el centro del cuadrado.

CUESTIONES

1. ¿Qué significa y qué consecuencias tiene que el campo gravitatorio sea conservativo?
2. Describe los modelos de Universo propuestos por Ptolomeo y Copérnico.
3. ¿Qué cuesta más, situar en órbita un satélite pesado o uno ligero? Justifica tu respuesta.
4. ¿Qué son los satélites geoestacionarios?

## OPCIÓN B

PROBLEMAS

1.- Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la gravedad en su superficie es de 6,2 $m/s^2$. Calcula:

a) La densidad media del planeta.
b) La velocidad de escape del planeta.
c) La energía necesaria para lanzar un objeto de 50 kg y ponerlo en una órbita de período 2 horas.

2.- Dos masas de 2000 y 4000 Tm están separadas 7 km. Determina:

a) El campo gravitatorio en un punto situado a 2 km de la masa de 2000 Tm.
b) El potencial en dicho punto.
c) El trabajo necesario para traer una masa de 1000 Tm desde el infinito hasta ese punto.

CUESTIONES

1. Determina a qué altura sobre la superficie terrestre el peso de un cuerpo se reduce a la cuarta parte.
2. Enuncia las tres leyes de Kepler.
3. Al separar dos masas, ¿aumenta o disminuye su energía potencial gravitatoria? ¿Cuál es el signo del trabajo realizado por el campo gravitatorio?
4. ¿Qué sucedería si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- a) De la 3ª Ley de Kepler, o de la armonía: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ despejo R y sustituyo, teniendo en cuenta las unidades (pasar de minutos a segundos)

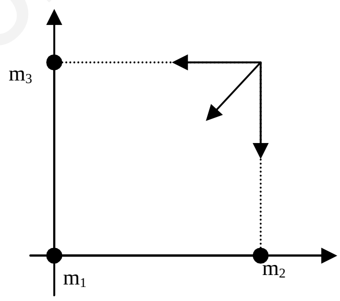
$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 6{,}654 \cdot 10^6 m$$

Y la altura sobre la superficie se calcula restando el radio de la Tierra:
h = R – $R_T$ = 6,654· $10^6$ – 6,37· $10^6$ = 2,84· $10^5$ m = **284 km**

b) De la expresión de la Energía total de un satélite: $E = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{R} = \mathbf{-3 \cdot 10^{10} J}$ donde el signo negativo indica una órbita ligada.

c) La ecuación de la velocidad orbital: $v = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}654 \cdot 10^6}} =$ $\mathbf{7742{,}3\ {}^{m}/_{s}}$

2.- a) el campo en el 4º vértice es la suma vectorial de los Campos generados por cada una de las masas.




$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} + \vec{g_3}$$

Calculo cada uno por separado y luego sumo vectorialmente.

$$\vec{g_1} = \vec{g_{1x}} + \vec{g_{1y}} = g_{1x}(-\vec{\imath}) + g_{1y}(-\vec{\jmath})$$
$$g_{1x} = G\frac{m_1}{r_1^2}\cos 45^0 = 2{,}35 \cdot 10^{-8}$$

$$g_{1y} = G\frac{m_1}{r_1^2}\sin 45^0 = 2{,}35 \cdot 10^{-8}$$
$$\vec{g_1} = \vec{g_{1x}} + \vec{g_{1y}} = g_{1x}(-\vec{\imath}) + g_{1y}(-\vec{\jmath}) = -2{,}35 \cdot 10^{-8}\vec{\imath} - 2{,}35 \cdot 10^{-8}\vec{\jmath}\ {}^{N}/_{Kg}$$
$$\vec{g}_2 = G\frac{m_2}{r_2^2}(-\vec{\jmath}) = -6{,}67 \cdot 10^{-9}\vec{\jmath}\ {}^{N}/_{Kg}$$
$$\vec{g}_3 = G\frac{m_3}{r_3^2}(-\vec{\imath}) = -6{,}67 \cdot 10^{-9}\vec{\imath}\ {}^{N}/_{Kg}$$

Y sumando:

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} + \vec{g_3} = \mathbf{-3 \cdot 10^{-8}\vec{\imath} - 3 \cdot 10^{-8}\vec{\jmath}\ {}^{N}/_{Kg}}$$

b) Por un principio de superposición, el potencial en el 4º vértice es la suma de los potenciales creados en ese punto por cada una de las masas de la distribución:
$V_4 = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2} - G\frac{m_3}{r_3} = \mathbf{-1{,}8 \cdot 10^{-8}\ {}^{J}/_{Kg}}$

Con $r_2 = r_3$ = 1 m. y $r_1 = \sqrt{2}\ m$

c) Para calcular el trabajo realizado por las fuerzas del campo para trasladar una masa de 1 kg desde el 4º vértice hasta el centro del cuadrado, necesito conocer el potencial en los dos puntos. En el apartado b, ya calculamos el potencial en el 4º vértice; ahora calculo en el centro:

$$V_c = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2} - G\frac{m_3}{r_3} = -2{,}83 \cdot 10^{-8}\, {}^{J}/_{Kg}$$

$$W = -m \cdot \Delta V = -m(V_c - V_4) = \mathbf{1{,}03 \cdot 10^{-8} J}$$

Trabajo positivo porque se realiza a favor del campo.

OPCIÓN B

1.- a) Con la ecuación de la intensidad del campo gravitatorio, puedo despejar la masa del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{6{,}2 \cdot (3{,}2 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 9{,}5 \cdot 10^{23} Kg$$

Y hacemos uso de la ecuación de la densidad y del volumen de una esfera:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \mathbf{6921{,}2}\ {}^{\mathbf{Kg}}/_{\mathbf{m^3}}$$

b) La ecuación de la velocidad de escape:

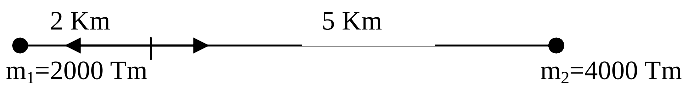
$$v = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \mathbf{6233{,}1}\ {}^{\mathbf{m}}/_{\mathbf{s}}$$

c) La energía necesaria para poner el satélite en una órbita de período 2 horas, será la que tenga el satélite a esa altura menos la energía potencial gravitatoria sobre la superficie de la Tierra.
Pero primero hay que calcular el radio de la órbita del satélite, con la 3ª ley de Kepler y teniendo en cuenta que 2 horas son 7200 s.

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 7200^2}{4\pi^2}} = 4{,}35 \cdot 10^6 m$$

$$E = E_{orbita} - E_{suelo} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_{orb}} - \left(-G\frac{Mm}{R_{suelo}}\right) = \mathbf{6{,}25 \cdot 10^8 J}$$

2.- a)




El campo gravitatorio será la suma vectorial de los campos creados por cada una de las masas en ese punto, pero como cada uno se orienta en la misma dirección pero sentido contrario, será la resta:

$$\vec{g} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2}$$

$$g_1 = G\frac{M_1}{R_1^2} = 3{,}33 \cdot 10^{-11}\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$g_2 = G\frac{M_2}{R_2^2} = 1{,}06 \cdot 10^{-11}\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$g = g_1 - g_2 = \mathbf{2{,}27 \cdot 10^{-11}}\, {}^{\mathbf{m}}/_{\mathbf{s^2}}$$

En el sentido de la masa $m_1$.

b) El potencial es la suma de los potenciales creados por cada una de las masas:

$$V = V_1 + V_2 = -G\frac{M_1}{R_1} + \left(-G\frac{M_2}{R_2}\right) = \mathbf{-1,2 \cdot 10^{-7}}\ {}^{\boldsymbol{J}}/_{\boldsymbol{Kg}}$$

c) El trabajo será el producto de la masa que se traslada por la diferencia de potencial entre el punto final menos el inicial. Pero el punto es inicial es el infinito, el origen de potenciales, donde el potencial vale 0.

$$W = -m \cdot \Delta = -m\left(V_p - V_\infty\right) = \mathbf{-0,12}\ \boldsymbol{J}$$