

Dominios y operaciones de funciones

1. Determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

- a) $f : x \rightarrow x+4, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 5$ b) $f : x \rightarrow x^2 + 7, x \in \mathbb{R}$ c) $f : x \rightarrow 2x-3, x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 6$
 d) $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2+2}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 4$ e) $f : x \rightarrow (x^2+3)^2, x \in \mathbb{R},$ f) $f : x \rightarrow 5x^3-1, x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3$
 g) $f : x \rightarrow x^2-6x, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 6$ h) $f : x \rightarrow \frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 9$ i) $f : x \rightarrow 3\sqrt{x}-4, x \in \mathbb{R}, 0 < x < \infty$
 j) $f : x \rightarrow \sqrt{3x-2}, x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 9$ k) $f : x \rightarrow x^4+x^2, x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2$ l) $f : x \rightarrow \frac{1}{3+x^4}, x \in \mathbb{R}$

2. Determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 12-x & \text{si } 3 \leq x \leq 12 \end{cases}$
 c) $h(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ x^2+3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -3(x+2) & \text{si } -3 \leq x \leq -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3(x+2) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$
 e) $g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 7-x & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$ f) $h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x+4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 16-(x-6)^2 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$

3. Sea la función $f(x) = 5x-3, x \in \mathbb{R}$

- a) Hallar el valor de "x" para que $f(x)=7$.
 b) Resolver la ecuación $f(x)=x$.

4. Sea la función $f(x) = x^2-6x, x \in \mathbb{R}$

- a) Hallar el valor de "x" para que $f(x)=16$.
 b) Resolver la ecuación $f(x)=5-2x$.

5. Sea la función $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$ con $x \neq 0$

- a) Evaluar $f(-2)$.
 b) Resolver la ecuación $f(x)=2x+7$.

6. Sean las funciones: $f(x) = \frac{x}{x-2}$ para $x \neq 2$, y $g(x) = \frac{2}{x-3}$ para $x \neq 3$

- a) Evaluar $f(6)$.
 b) Resolver $g(x)=6$.
 c) Resolver $f(x)=g(x)$.

7. Calcular el dominio máximo de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
 e) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$ f) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x-6}$ g) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ h) $f(x) = \frac{2x}{2x^2+2x+1}$
 i) $f(x) = \frac{4x-1}{x^3+1}$ j) $f(x) = \frac{x+3}{x^3-8x^2+25x}$ k) $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2-2}$ l) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+4}$
 m) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ n) $f(x) = \sqrt{1-\frac{16}{x^2}}$ o) $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$ p) $f(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$
 q) $f(x) = \sqrt{-x^2+8x-7}$ r) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ s) $f(x) = \sqrt{x^2-1}-2x$

t) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x - 6}$ u) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ v) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2 - 2x - 3}}$ w) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$

x) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ z) $f(x) = |x - 1|$

8. Si $y_1 = \frac{x}{2x-1}$, $y_2 = \frac{3x-2}{x+1}$ calcular $y_1 + y_2$, $y_1 - y_2$ y sus dominios.

9. Sumar las funciones: $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$

10. Multiplicar las funciones: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $g(x) = x^2 - 6$. Determinar el dominio de $f \cdot g$

11. Multiplicar las funciones: $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$. Determinar el dominio de $f \cdot g$

12. Si $h(x) = x^2 - 8x + 6$, hallar otras dos funciones f y g , tales que $h = f \cdot g$

13. Hallar el dominio de la función $\frac{1}{f}$ si $f(x) = \begin{cases} 6 & x < 1 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$

14. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 6x - 1$, calcular $\frac{f}{g}$ y los dominios de f , g y $\frac{f}{g}$.

15. Sean $f, g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Comprobar la propiedad $a \cdot (f + g) = a \cdot f + a \cdot g$ tomando $a = 3$

16. Sean las funciones $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \frac{1}{x}$ realizar las siguientes evaluaciones:

- a) $f(3)$ b) $g(2)$ c) $(h \circ g)(2)$ d) $(f \circ g)(-3)$ e) $(g \circ f)(1)$ f) $(g \circ h)(-2)$
 g) $(h \circ f)(4)$ h) $(f \circ f)(5)$ i) $(g \circ g)(-3)$ j) $(h \circ h)(12)$ k) $(f \circ g \circ h)(2)$ l) $(h \circ f \circ g)(4)$

17. Sean $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = 2/x$, escribir y simplificar las expresiones:

- a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ h)(x)$ d) $(h \circ g)(x)$ e) $(g \circ g)(x)$ f) $(f \circ f)(x)$

18. Sean $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x + 5$ comprobar que la composición de funciones no es conmutativo. Y resolver $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

19. Sean $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = 5x - 3$. Hallar a) $(g \circ f)(3)$ b) $(g \circ f)(-1)$ c) $(f \circ g)(2)$

20. Hallar $g \circ f$, $Dom(g \circ f)$, $f \circ g$, $Dom(f \circ g)$ siendo f y g las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 3x^2 - 1$, $g(x) = 4x$ b) $f(x) = 5x$, $g(x) = \frac{2}{6x-1}$ c) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x^2$ d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

21. La función "h" y "k" están definidas por $h : x \rightarrow 3/x$ $k : x \rightarrow x + 5$

- a) Resolver $(h \circ k)(x) = 1$
 b) Resolver $(k \circ h)(x) = 6$

22. Sean las funciones: $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 5$ $x \in \mathbb{R}$ resolver las ecuaciones:

- a) $(f \circ g)(x) = 9$ b) $(g \circ g)(x) = 21$

23. Calcular el dominio y la imagen de $(g \circ f)(x)$, siendo $f(x) = x^2 \quad x \in \mathfrak{R}, 1 \leq x \leq 5$ y $g(x) = 2x + 5 \quad x \in \mathfrak{R}$
24. Sean las funciones “p” y “q” definidas como: $p: x \rightarrow 3x^2 + 1, x \in \mathfrak{R}, 0 \leq x \leq 2$ $q: x \rightarrow x - 2, x \in \mathfrak{R}$ calcular la imagen de la composición $(q \circ p)(x)$.
25. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \frac{1}{x-3} \quad x \in \mathfrak{R}, x \geq 4$, calcular $Dom(g \circ f)(x)$ y $Im(g \circ f)(x)$
26. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x+1} \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$ y $g(x) = x^2 \quad x \in \mathfrak{R}$ hallar:
- a) $Dom(f \circ g)(x)$ y $Im(f \circ g)(x)$ b) $Dom(g \circ f)(x)$ y $Im(g \circ f)(x)$
27. Tomamos las funciones $h(x) = 3x + 5 \quad x \in \mathfrak{R}$, y $k(x) = 2 - x \quad x \in \mathfrak{R}$ resolver la ecuación $(h \circ h)(x) = (k \circ k)(x)$.
28. Resolver la ecuación $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 0$ siendo $f(x) = x + 1 \quad x \in \mathfrak{R}$, y $g(x) = x^2 - 3 \quad x \in \mathfrak{R}$
29. Calcular las inversas de las siguientes funciones:
- a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = 5x - 1$ c) $f(x) = 4 - 3x$
- d) $f(x) = 2/x$ para $x \neq 0$ e) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ para $x \neq 1$ f) $f(x) = \frac{5}{2-3x}$ para $x \neq 2/3$
- g) $f(x) = \frac{x}{x+21}$ para $x \neq -2$ h) $f(x) = \frac{2x}{5-x}$ para $x \neq 5$ i) $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$ para $x \neq -1/2$
30. Calcular la inversa de las siguientes funciones en sus respectivos dominios y determinar donde están definidas:
- a) $f(x) = x^2 \quad x \in \mathfrak{R}, x > 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2+x} \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$
- c) $f(x) = \sqrt{x-2} \quad x \in \mathfrak{R}, x > 3$ d) $f(x) = 3x^2 - 1 \quad x \in \mathfrak{R}, 1 < x < 4$
- e) $f(x) = \sqrt{2x+3} \quad x \in \mathfrak{R}, x \geq 11$ f) $f(x) = \frac{1}{x} - 3 \quad x \in \mathfrak{R}, 2 < x < 5$
- g) $f(x) = (x+2)^2 + 3 \quad x \in \mathfrak{R}, x \geq -2$ h) $f(x) = x^3 + 1 \quad x \in \mathfrak{R}$
31. Sea la función $f(x) = 3x - 4$, resolver $f(x) = f^{-1}(x)$.
32. Sea la función $f(x) = 10 - 2x \quad x \in \mathfrak{R}, x \geq 0$, resolver $f(x) = f^{-1}(x)$.
33. Sea la función $f(x) = x^2 - 6 \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$, resolver $f(x) = f^{-1}(x)$.
34. Sea la función $f: x \rightarrow (x-2)^2, x \in \mathfrak{R}, x \geq 2$, resolver $f(x) = f^{-1}(x)$.
35. Sean las funciones $f(x) = 2x - 5 \quad x \in \mathfrak{R}$, y $g(x) = 7 - 4x \quad x \in \mathfrak{R}$ resolver:
- a) $f(x) = g(x)$ b) $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$
36. Sea la función $h(x) = \frac{4}{x+3} \quad x \in \mathfrak{R}^+$
- a) Dibujar y calcular la imagen de $h(x)$.
- b) Hallar h^{-1} .
- c) Resolver $h(x) = h^{-1}(x)$
37. Considerando las funciones $f(x) = 3x + 1 \quad x \in \mathfrak{R}$ y $g(x) = x - 2 \quad x \in \mathfrak{R}$ comprobar que $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
38. Sean las funciones $f(x) = 2x + 3 \quad x \in \mathfrak{R}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1} \quad x \in \mathfrak{R}, x \neq 1$ resolver la ecuación $f^{-1}(x) = (g \circ f)(x) - 1$.
39. Resolver $3g^{-1}(x) = 10g(h(x)) + 9$ con $g(x) = \frac{5}{x-3} \quad x \in \mathfrak{R}, x \neq 3$ y $h(x) = x^2 + 4 \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$

Soluciones:

- 1) a) $Domf = \mathbb{R}; Im f = [4,9]$, b) $Domf = \mathbb{R}; Im f = [7, \infty)$, c), d) $Domf = \mathbb{R}; Im f = [1/18, 1/3]$, e) $Domf = \mathbb{R}; Im f = [9, \infty)$, f) $Domf = \mathbb{R}; Im f = (4, 134)$, g) $Domf = \mathbb{R}; Im f = [-9, 0]$, h) $Domf = \mathbb{R} - \{-1\}; Im f = (1/10, 1/2)$, i) $Domf = \mathbb{R}^+$; $Im f = (-4, \infty)$, j) $Domf = [2/3, \infty)$; $Im f = [2, 5]$, k) $Domf = \mathbb{R}; Im f = (0, 20]$, l) $Domf = \mathbb{R}; Im f = (0, 1/3]$.
- 2) a) $Domf = [0, 6]$; $Im f = [4, 36]$, b) $Domg = [0, 12]$; $Im g = [0, 9]$, c) $Domh = [-3, 2]$; $Im h = [0, 7]$, d) $Domf = [-3, 3]$; $Im f = [0, 4]$, e) $Domg = [-1, 6]$; $Im g = [1, 4]$, f) $Domh = [0, 10]$; $Im h = [0, 16]$.
- 3) a) 2, b) 3/4; 4) a) -2, 8, b) -1, 5; 5) a) -1/2, b) -3.27, 0.766; 6) a) 3/2, b) 10/3, c) 1, 4 7) a) \mathbb{R} , b) $\mathbb{R} - \{-1\}$, c) \mathbb{R}^* , d) $\mathbb{R} - \{1\}$, e) $\mathbb{R} - \{2, -2\}$, f) $\mathbb{R} - \{2, -3\}$, g) \mathbb{R} , h) \mathbb{R} , i) $\mathbb{R} - \{-1\}$, j) \mathbb{R}^* , k) $\mathbb{R} - \{1\}$, l) $\mathbb{R} - \{1, -4\}$, m) $\mathbb{R} - (-3, 3)$, n) $\mathbb{R} - (-4, 4)$, o) $[-3/2, 3/2]$, p) $[-2, 1]$, q) $[1, 7]$, r) $[1, 2] \cup [3, +\infty)$, s) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, t) $(-\infty, 1] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$, u) $[1, 2)$, v) $(-1, 2] \cup (3, +\infty)$, w) $(1, 2)$, x) \mathbb{R}^* , y) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, z) \mathbb{R}
- 16) a) 7; b) 4; c) 1/4; d) 19; e) 1; f) 1/4; g) 1/9; h) 23; i) 81; j) 12; k) 3/2; l) 1/33; 17) a) $3x^2 - 1$; b) $(3x - 1)^2$, c) $(6/x) - 1$; d) $2/x^2$, e) x^4 , f) $9x - 4$; 18) $(f \circ g)(x) = x^2 + 10x + 28$; $(g \circ f)(x) = x^2 + 8$; $x = -2$; 21) a) $3/(x+5)$, 2; b) $(3/x) + 5$, 3 22) a) -4, -1; b) 3/2 23) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5$, $7 \leq (g \circ f)(x) \leq 55$ 24) $(q \circ p)(x) = 9x^4 + 6x^2 - 1$; $0 \leq (q \circ p)(x) \leq 167$; 25) $(g \circ f)(x) = 1/(x^2 + 1)$; $0 \leq (g \circ f)(x) \leq 1/17$, 26) $\sqrt{x^2 + 1}$; $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) > 1$, 27) -5/2, 28) -2, 1; 29) a) $f^{-1}(x) = (x - 2)/3$; b) $f^{-1}(x) = (1 + x)/5$; c) $f^{-1}(x) = (4 - x)/3$; d) $f^{-1}(x) = 2/x$ $x \neq 0$; e) $f^{-1}(x) = (3 + x)/x$ $x \neq 0$; f) $f^{-1}(x) = (2x - 5)/3x$ $x \neq 0$; g) $f^{-1}(x) = 2x/(1 - x)$ $x \neq 1$; h) $f^{-1}(x) = 5x/2 + x$ $x \neq -2$, i) $f^{-1}(x) = x/(3 - 2x)$ $x \neq 3/2$