NOMBRE: ____

1ª y 2ª EVALUACIÓN: ☐ APROBADAS ☐ SUSPENDIDAS

1) Calcular el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x-3}}$ *(1 punto)*

2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-3, 4)$. *(1 punto)*

3) Hallar la ecuación de la paralela a $y = \dfrac{2x+1}{3}$ por el punto $(2, -3)$. *(0,5 puntos)*

4) Hallar el vector que va desde $B(-3, 4)$ hasta $A(2, -3)$. Calcular su módulo. *(0,5 ptos)*

5) a) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & si \quad x \le 6 \\ 2x & si \quad x > 6 \end{cases}$$

b) A la vista de la gráfica obtenida, dar el *dominio*, estudiar la *continuidad*, e indicar los *máximos y mínimos relativos y absolutos* de f. *(1 punto)*

6) *(Deben indicarse cómo se obtienen los resultados que se piden en esta problema: no basta el resultado que da la calculadora)* Se han medido los cierres de los índices bursátiles *SP&500* e *Ibex-35* durante 6 días de mayo de 2014, obteniéndose los siguientes resultados:

SP&500	1877.86	1870.85	1888.53	1897.45	1896.65	1878.48
Ibex-35	10478.7	10365	10613.9	10587.2	10867	10487.2

a) Calcular las medias y desviaciones típicas de cada serie, la covarianza, el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo. *(1 punto)*

b) Calcular la recta de regresión del Ibex-35 sobre el SP&500 y predecir el precio de cierre del Ibex si el SP&500 cierra en 1878.21, indicando si sería fiable la predicción. *(1 punto)*

7) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 2ª evaluación)* Sin calculadora, y siendo $\cos \alpha = -1/2$, con $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*

8) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 2ª evaluación)* Resolver las ecuaciones:

a) $\log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2$ *(1 punto)*

b) $25^x + 5^x = 30$ *(1 punto)*

7) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 2ª evaluación)* Siendo $y = \dfrac{3x}{x^2-4}$, se pide:

a) Calcular su dominio. *(0,5 puntos)*

b) Calcular sus intersecciones con los ejes de coordenadas. *(0,5 puntos)*

c) Averiguar si es par, impar o ninguna de las dos cosas. *(0,5 puntos)*

8) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 2ª evaluación)* Dados los puntos $A(1, 10)$, $B(-3, -8)$ y $C(5, 16)$:

a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une B y C. *(0,5 ptos)*

b) Hallar el simétrico de B respecto de C. *(0,5 puntos)*

c) ¿Están alineados A, B y C? *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Calcular el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x-3}}$ *(1 punto)*

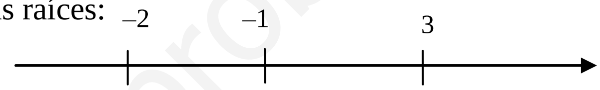
El dominio de esta función lo constituyen los valores de x que resuelven la siguiente inecuación, puesto que no existen raíces de números negativos y que la solución de la inecuación ya excluye los valores de x que anulen el denominador, que tampoco tienen imagen:

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3} \geq 0$$

- Raíces del numerador: $x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = -2}$. Factorizado: $\underline{x + 2}$.
- Raíces del denominador: $x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \\ = 3 \end{array} \right.$

  $\Rightarrow\; \underline{x = -1 \text{ ó } x = 3}$. Factorizado: $\underline{(x+1)(x-3)}$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados: $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-3)} \geq 0$

División de R en intervalos mediante las raíces:



	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 2$	–	0	+	…	+	…	+
$x + 1$	–	…	–	0	+	…	+
$x - 3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x+2}{(x+1)(x-3)}$	–	0	+	$\nexists$	–	$\nexists$	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución, y el dominio, es: $\boxed{D(f) = [-2, -1) \cup (3, +\infty)}$.

2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-3, 4)$. *(1 punto)*

La ecuación del la recta en *forma continua* nos proporciona un método fácil para resolver el problema. Siendo los puntos conocidos (x_0, y_0) y (x_1, y_1):

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{-3-2} = \frac{y+3}{4+3} \;\Rightarrow\; 7(x-2) = -5(y+3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 7x - 14 = -5y - 15 \;\Rightarrow\; 5y = -7x + 14 - 15 \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{-7x-1}{5}}$$

3) Hallar la ecuación de la paralela a $y = \dfrac{2x+1}{3}$ por el punto $(2, -3)$. *(0,5 puntos)*

La recta que nos dan puede expresarse como $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. Luego $2/3$ es su pendiente. La paralela buscada debe tener la misma pendiente. Y como conocemos un punto suyo, usando la forma *punto-pendiente*, su ecuación será:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - (-3) = \frac{2}{3}(x-2) \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 3 \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}}$$

4) Hallar el vector que va desde $B(-3, 4)$ hasta $A(2, -3)$. Calcular su módulo. *(0,5 ptos)*

La diferencia de vectores siempre es "*extremo*" – "*origen*":

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (2, -3) - (-3, 4) = \boxed{(5, -7)}$$

Su módulo es: $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \boxed{\sqrt{74}}$

5) a) Dibujar la siguiente función, calculando *eje, vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & si \quad x \le 6 \\ 2x & si \quad x > 6 \end{cases}$$

En $(-\infty, 6)$ f coincide con $y = -x^2 + 6x$. Vamos a dibujarla, restringiéndola a dicho intervalo.

- Como el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola es cóncava.
- *Eje*: $x = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-6}{-2} \Rightarrow \boxed{x = 3}$.
- *Vértice*: Si $x = 3 \Rightarrow y = -9 + 18 = 9$: $\boxed{(3, 9)}$.
- *Intersecciones con los ejes*: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.

  $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

  $x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ ó} \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$ puesto que un producto vale 0 si, y sólo si algún factor vale 0. Los puntos son: $\boxed{(0, 0) \text{ y } (6, 0)}$.
- Completamos con una tabla de valores:

x	–1	1	2	4	5
y	–7	5	8	8	5

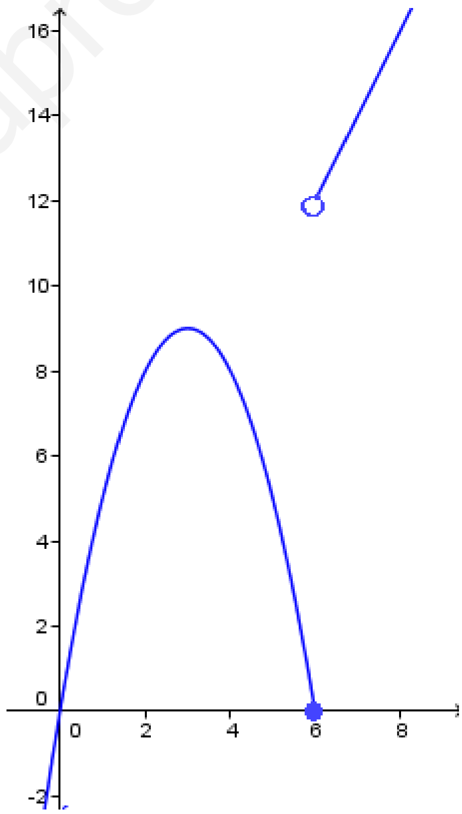
El punto final (6, 0) hay que destacarlo *relleno*, porque para $x = 6$ la imagen se calcula por esta fórmula, y no por $y = 2x$.

Para trazar $y = 2x$, que es una recta, creamos una pequeña tabla de valores:

x	6	8
y	12	16

y el punto inicial (6, 12) es *hueco*, porque la imagen de $x = 6$ se calcula por la fórmula $y = -x^2 + 6x$, y no por $y = 2x$.

Y así se obtiene la gráfica adjunta.



b) A la vista de la gráfica obtenida, dar el *dominio*, estudiar la *continuidad*, e indicar los *máximos y mínimos relativos y absolutos* de f. *(1 punto)*

- $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$ (todos los puntos tienen imagen, incluido $x = 6$).
- Es $\boxed{\text{continua en } \mathbb{R} - \{6\}}$. Tiene $\boxed{\text{discontinuidad de salto finito en } x = 6}$.
- $\boxed{\text{Máximo relativo: (3, 9). No tiene mínimos relativos.}}$

- $\boxed{\text{No tiene extremos absolutos}}$, porque cuando x tiende a $-\infty$ las imágenes se van al $-\infty$, y cuando x tiende a $+\infty$ las imágenes se van al $+\infty$.

6) *(Deben indicarse cómo se obtienen los resultados que se piden en esta problema: no basta el resultado que da la calculadora)* Se han medido los cierres de los índices bursátiles *SP&500* e *Ibex-35* durante 6 días de mayo de 2014, obteniéndose los siguientes resultados:

SP&500	1877.86	1870.85	1888.53	1897.45	1896.65	1878.48
Ibex-35	10478.7	10365	10613.9	10587.2	10867	10487.2

a) Calcular las medias y desviaciones típicas de cada serie, la covarianza, el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo. *(1 punto)*

$$\bar{x} = \frac{1877.86 + 1870.85 + \ldots + 1878.48}{6} = 1884.97$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1877.86^2 + 1870.85^2 + \ldots + 1878.48^2}{6} - \bar{x}^2} = 9.97$$

$$\bar{y} = \frac{10478.7 + 10365 + \ldots + 10487.2}{6} = 10566.5$$

$$s_y = \sqrt{\frac{10478.7^2 + 10365^2 + \ldots + 10487.2^2}{6} - \bar{y}^2} = 156.83$$

$$s_{xy} = \frac{1877.86 \cdot 10478.7 + 1870.85 \cdot 10365 + \ldots + 1878.48 \cdot 10487.2}{6} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 1320.169$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = 0.84$$

Existe $\boxed{\textit{correlación positiva moderadamente fuerte}}$, por lo que las predicciones son relativamente fiables.

b) Calcular la recta de regresión del Ibex-35 sobre el SP&500 y predecir el precio de cierre del Ibex si el SP&500 cierra en 1878.21, indicando si sería fiable la predicción. *(1 punto)*

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^{\ 2}}(x - \bar{x}) \Rightarrow \text{Sustituyendo y simplificando: } \boxed{y = 13.27–14.447.83}$$

Para $x = 1878.21 \Rightarrow \boxed{y = 10476.79}$

Los datos de la tabla son del 9 al 16 de mayo de 2014. El 7 de mayo, el SP&500 cerró en 1878.21 y el Ibex-35 en 10413.80.

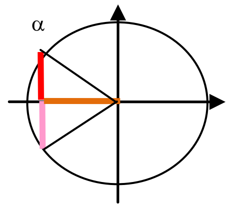
7) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 2ª evaluación)* Sin calculadora, y siendo $\cos\alpha = -1/2$, con $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*

Como $\cos\alpha < 0$ y $180^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in$ III cuadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1/4} - 1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{\text{cotg } \alpha} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{\sec \alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \boxed{-2}$ $\boxed{\text{cosec } \alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$



$\cos \alpha = -1/2 \Rightarrow$ Según la calculadora, $\alpha = 120^{\circ}$. Pero al ser del III cuadrante, hemos de buscar el ángulo que tiene el mismo valor del coseno, en dicho cuadrante (en naranja, en el gráfico). Desde $\alpha = 120^{\circ}$ hasta 180° van $180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$. Si esa misma abertura la sumamos a 180° nos da el ángulo que buscamos: $\boxed{\alpha} = 180^{\circ} + 60^{\circ} = \boxed{240^{\circ}}$.

8) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 2ª evaluación)* Resolver las ecuaciones:

a) $\log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2$ *(1 punto)*

$\log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2 \Rightarrow \log_3 (x+4)(x-4) = \log_3 3^2 \Rightarrow x^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Pero $x = -5$ no es válido porque, sustituido en la ecuación original, hace negativo el argumento de $\log_3 (x-4)$. No ocurre así con $\boxed{x = 5}$, por lo que es la única solución válida.

b) $25^x + 5^x = 30$ *(1 punto)*

$25^x + 5^x = 30 \Rightarrow (5^2)^x + 5^x - 30 = 0 \Rightarrow 5^{2x} + 5^x - 30 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^x)^2 + 5^x - 30 = 0 \Rightarrow$ Llamando $t = 5^x$: $t^2 + t - 30 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-12}{2} = -6 \\ = \dfrac{10}{2} = 5 \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio:

- $t = -6 \Rightarrow 5^x = -6$, que no es posible, pues $5^x > 0 \ \forall x$
- $t = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$.

7) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 2ª evaluación)* Siendo $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$, se pide:

a) Calcular su dominio. *(0,5 puntos)*

Como no se puede dividir entre 0, y es la única dificultad con la que nos topamos al calcular imágenes, hay que excluir del dominio los valores de x que anulen el denominador:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \boxed{D(f) = R - \{-2, 2\}}$

b) Calcular sus intersecciones con los ejes de coordenadas. *(0,5 puntos)*

- $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0}{-4} = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{3x}{x^2 - 4} \Rightarrow$ Un cociente se anula si lo hace el numerador, comprobando que las soluciones obtenidas no anulen, además, al denominador: $3x = 0 \Rightarrow x = 0/3 = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.

c) Averiguar si es par, impar o ninguna de las dos cosas. *(0,5 puntos)*

$$f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-3x}{x^2 - 4} = -\frac{3x}{x^2 - 4} = -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Es Impar}}.$$

8) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 2ª evaluación)* Dados los puntos $A(1, 10)$, $B(-3, -8)$ y $C(5, 16)$:

a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une B y C. *(0,5 ptos)*

$$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-8+16}{2}\right) = \boxed{(1,\ 4)}$$

b) Hallar el simétrico de B respecto de C. *(0,5 puntos)*

Si llamamos $B'(a, b)$ al simétrico buscado, C será el punto medio del segmento que une B con B'. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{-3+a}{2} = 5 \Rightarrow -3+a = 10 \Rightarrow a = 13 \\ \dfrac{-8+b}{2} = 16 \Rightarrow -8+b = 32 \Rightarrow b = 40 \end{cases}$$

Luego el punto que buscamos es $\boxed{B'(13, 40)}$.

c) ¿Están alineados A, B y C? *(0,5 puntos)*

Lo estarán si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, con lo que tendrán la misma direccion:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, -8) - (1, 10) = (-4, -18)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5, 16) - (1, 10) = (4, 6)$

Serán proporcionales si dividiendo sus coordenadas se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{-4}{4} \neq \frac{-18}{6} \quad \Rightarrow \text{ no lo son } \Rightarrow \boxed{\text{No están alineados}}.$$

Otra forma de hacerlo sería hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos y comprobando si el tercero verifica dicha ecuación. En caso afirmativo, los tres forman parte de la misma recta y, de lo contrario, no están alineados.