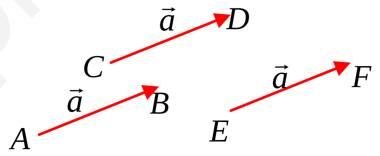
VECTORES EN EL PLANO

1. ESPACIO VECTORIAL

- Un **vector** *fijo* es una pareja *ordenada* de puntos en el plano (*origen* y *extremo*). Si A y B son dichos puntos, representaremos el vector por $\overrightarrow{AB}$. Gráficamente, lo representamos por una flecha que va de A hasta B.
  Llamamos $A \equiv$ *origen* del vector $\overrightarrow{AB}$. $B \equiv$ *extremo*.
  Elementos de un vector fijo son:
  - **Módulo**: Distancia entre A y B, o sea $d(A, B)$. Se designa por $|\overrightarrow{AB}|$. No puede ser negativo: sólo positivo o cero.
  - **Dirección**: La recta que contiene al vector, o cualquier paralela.
  - **Sentido**: La forma en que se recorre el segmento que une A con B: Hay dos posibles, que son de A a B ó al revés.

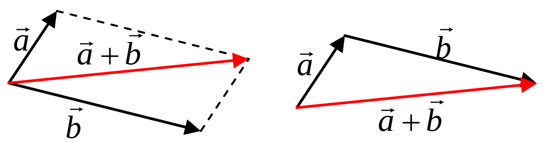
  Dos vectores fijos se dicen **equipolentes** si coinciden en *módulo*, *dirección*, y *sentido*.
  Vector nulo es aquél en el que origen y extremo coinciden. Su módulo es 0 y no tiene dirección ni sentido.
- Identificamos todos los vectores equipolentes entre sí como un único objeto, y le llamamos **vector libre** o, simplemente, **vector**. Trabajaremos *siempre* con vectores libres (*vectores* simplemente).
  Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ del gráfico son el mismo *vector*, pues coinciden en módulo, dirección y sentido. Lo designaremos, entonces, de la misma manera: $\vec{a}$.



  Por tanto:
  - Un vector (libre) dado puede dibujarse con origen en cualquier punto.
  - Un vector (libre) queda determinado de forma única si conocemos su módulo, dirección y sentido.

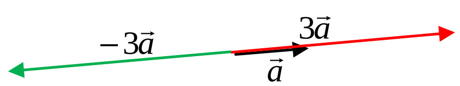
Operaciones con vectores

- La **suma** de vectores se define gráficamente mediante la *regla del paralelogramo* (en gráfico adjunto las dos formas de hacerlo).



- El **producto de un vector** $\vec{v}$ **por un número real** $\boldsymbol{k}$ ($k \neq 0$) es *otro vector*, cuyo <u>módulo</u> es $|k|$ (valor absoluto de k) veces el módulo de $\vec{v}$ (es decir: $|k\,\vec{v}| = |k||\vec{v}|$), su <u>dirección</u> es la misma que la de $\vec{v}$, y su <u>sentido</u> coincide con el de $\vec{v}$ si k es *positivo*, y es opuesto si k es *negativo*. Si $k = 0$, se define $0\cdot\vec{v} = \vec{0}$ (vector nulo).
  Si $k = -1$: $-1\cdot\vec{v} = -\vec{v}$, al cual se le llama **vector opuesto** de $\vec{v}$: tiene igual módulo y dirección, pero sentido *opuesto*.
  A esta operación se la llama, también, *producto externo*.
  Da lo mismo escribir $k\vec{v} = \vec{v}\,k$.

  Por <u>ejemplo</u> (ver gráfico), $3\vec{a}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, y su módulo es el triple de éste último vector.



Análogamente (mismo gráfico), $-3\vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{a}$, sentido opuesto porque multiplicamos por –3 que es negativo, y su módulo es, también, el triple (ya que |–3| = 3) que el de $\vec{a}$.
Cuando hablamos de números reales en combinación con vectores, a los números reales se les denomina, también, **escalares**. De modo que esta operación es, también, el *producto de un vector por un escalar*.
Teorema: Dos vectores no nulos son *proporcionales* (es decir, uno es múltiplo del otro) si, y sólo si tienen la misma dirección.

Espacio Vectorial

Propiedades de la operación *suma de vectores*:

1. Conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. Asociativa: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. Elemento neutro: $\forall\,\vec{a}$, se cumple que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. Elemento opuesto: $\forall\,\vec{a}$ existe un vector, que es su *opuesto*: $-\vec{a}$, tal que: $\forall\,\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (el *elemento neutro*).

Propiedades de la operación *producto externo*. Para cualesquiera escalares λ, μ ∈ R y vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se tiene:

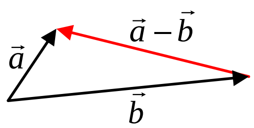
1. Asociativa: $\lambda\,(\mu\,\vec{a})=(\lambda\mu)\,\vec{a}$.
2. Distributiva 1: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
3. Distributiva 2: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.
4. Elemento unidad: $1\,\vec{a}=\vec{a}$ (1 ∈ R).

A un conjunto de vectores en los que se han definido la operación suma de vectores y producto externo sobre el conjunto R, y donde se verifican las 8 propiedades anteriores, se le denomina *espacio vectorial*.

Operación Diferencia de vectores

La **diferencia** de vectores es la suma de un vector con el opuesto de otro: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Gráficamente se puede obtener como se indica en la ilustración adjunta: Para hallar $\vec{a}-\vec{b}$ los ponemos con origen común y dibujamos el vector que va desde el extremo del segundo ($\vec{b}$) al extremo del primero ($\vec{a}$).

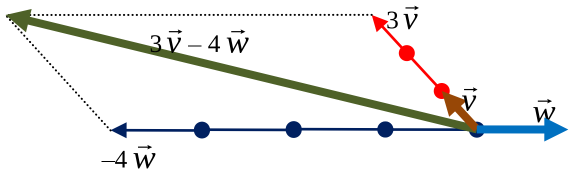


En efecto es así, porque como $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$. Por tanto, aplicando la regla del paralelogramo en su segunda forma, se obtiene el gráfico.

2. COORDENADAS

- **Combinación lineal** de un grupo de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_n$, con *coeficientes* los números reales (*escalares*) k_1, k_2, …, k_n, es el vector resultante de la operación: $k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_n\vec{v}_n$ (nótese que cada sumando es un *producto externo*, que siempre da como resultado un vector, de modo que la combinación lineal es una suma de vectores, por lo que el resultado final es un vector). La combinación lineal es tanto la operación en sí misma: $k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_n\vec{v}_n$, como el vector que resulta.

Si $\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + ... + k_n\vec{v}_n$, es decir, $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, se dice que $\vec{u}$ **depende linealmente** de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$.



En el gráfico se muestra un ejemplo en el que $\vec{u} = 3\vec{v} - 4\vec{w}$, es decir, $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con coeficientes 3 y –4. Dicho de otra forma, $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

El mínimo número de vectores que puede intervenir en una combinación lineal es uno. Al multiplicar dicho vector por un número real: $k\vec{u}$ se obtiene como resultado otro vector $\vec{v} = k\vec{u}$. En este caso, ambos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección. Se dice que $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$.

- Si en un grupo de vectores hay alguno que se puede obtener como combinación lineal del resto (es decir, que *depende linealmente* de ellos), el grupo de vectores se dice **linealmente dependiente**. En caso contrario, el grupo es **linealmente independiente**.

  Si tenemos un conjunto de vectores *linealmente dependiente*, porque uno de ellos se puede expresar como combinación lineal *con coeficientes no nulos* del resto, cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes. Por ejemplo, si sabemos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente dependiente porque $\vec{u} = 3\vec{v} - 4\vec{w}$, podemos despejar $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{w}$. Y también se puede despejar $\vec{w}$.

- <u>El vector nulo no puede formar parte de un conjunto de vectores linealmente independiente</u>. O sea, dicho conjunto sería linealmente dependiente con toda seguridad. (El vector nulo siempre es 0 multiplicado por cada uno de los vectores restantes).

- <u>Dos vectores no nulos que tengan distinta dirección son siempre linealmente independientes</u>. Dos vectores no nulos y paralelos o alineados (o sea, de igual dirección) son siempre linealmente dependientes (uno es múltiplo del otro). Dos vectores, alguno de los cuales es nulo, son siempre linealmente dependientes.

- En el plano, <u>dos vectores no nulos y de distinta dirección constituyen una **base**</u>. Si los vectores son perpendiculares entre sí, la base se dice **ortogonal**. Si, además, tienen el mismo módulo y dicho módulo es unitario, la base es **ortonormal**, que será la que siempre usemos: $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. También se la llama **base canónica**.

- **Teorema**: Si tenemos una base cualquiera $B = \{\vec{x}, \vec{y}\}$, <u>todo vector $\vec{v}$ del plano vectorial se puede expresar como combinación lineal de los vectores de dicha base</u>. Y los coeficientes de dicha combinación lineal son <u>únicos</u>, es decir, no hay otros coeficientes que den una combinación lineal cuyo resultado sea dicho $\vec{v}$:

  $$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}, \text{ siendo únicos } a, b$$

  Por tanto, fijada la base B, <u>el vector $\vec{v}$ se identifica con el par (a, b)</u>. A dichos números se les llama **coordenadas** de $\vec{v}$. Por tanto:

  $$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} = (a, b)$$

- La base a la que nos referiremos siempre es la base ortonormal, también llamada *base canónica* $\{\vec{i} = (1, 0),\ \vec{j} = (0, 1)\}$. Son ésas sus coordenadas, puesto que:

  $$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0\,\vec{j} = (1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1\,\vec{j} = (0, 1)$$

<u>Todo vector queda, entonces, identificado por sus coordenadas: una pareja de números reales</u>. Vamos a trabajar, entonces, siempre con coordenadas (referidas a la base ortonormal o canónica).

- Operaciones con coordenadas. Si $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (a', b')$
  - <u>Suma</u>: $\vec{u} + \vec{v} = (a + a', b + b')$; $\vec{u} - \vec{v} = (a - a', b - b')$
  - <u>Producto externo</u>: $k\vec{u} = (ka, kb)$
  - <u>Combinación lineal</u>: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b')$

Saber si dos vectores son linealmente independientes

Según lo ya citado, dos vectores no nulos son *linealmente dependientes* si y sólo si están alineados, lo que se traduce en que uno es múltiplo del otro. En caso contrario, son *linealmente independientes*. Se puede comprobar así:

- Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, supuestos $a' \neq 0$ y $b' \neq 0$ $\Leftrightarrow$ (a, b) y (a', b') son *linealmente dependientes*. Si dicho cociente difiere, son *linealmente independientes*.

  Ej: (–2, 7) y (6, –21): $\dfrac{6}{-2} = \dfrac{-21}{7}$, cociente que vale –3 con lo que (6, –21) = –3(–2, 7).
- Si alguno de los vectores es el *vector nulo*, son *linealmente dependientes*.
  Ej: (–2, 7) y (0, 0): (0, 0) = 0·(–2, 7). Es decir, (0, 0) es múltiplo de (–2, 7), pues se obtiene multiplicándolo por 0.
- Si $a' = 0$ ó $b' = 0$, pero ninguno de los vectores es el nulo, si las dos primeras coordenadas en los dos vectores son nulas, o bien lo son las dos segundas coordenadas, los vectores son *linealmente dependientes*. En caso contrario, son *linealmente independientes*:

  Ej1: (2, 0) y (3, 0): (2, 0) = $\dfrac{2}{3}$(3, 0) $\Rightarrow$ Son *linealmente dependientes*.

  Ej2: (2, 3) y (4, 0). Como se puede escribir el cociente y: $\dfrac{4}{2} \neq \dfrac{0}{3}$ son *lin. indep.*
- Otra forma de ver si son *linealmente dependientes* es ver si con un *mismo valor* de t puede conseguirse que $(a, b) = t(a', b')$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = ta' \\ b = tb' \end{cases}$

  Ej1: (2, 0) y (3, 0). Serán linealmente dependientes si existe t tal que: (2, 0) = t(3, 0) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 = 3t \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3} \\ 0 = 0t, \text{ cierto } \forall t \end{cases}$. Las dos igualdades son ciertas a la vez si $t = 2/3$.

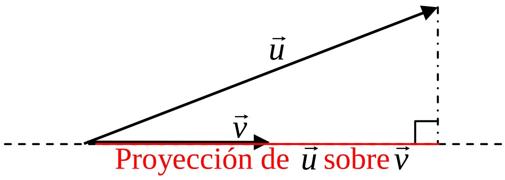
  Ej2: (2, 3) y (4, 0). Como: (2, 3) = t(4, 0) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 = 4t \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ 3 = 0t, \text{ imposible} \end{cases}$. No hay un mismo valor de t que haga ciertas las dos igualdades a la vez $\Rightarrow$ Son *lin. indep.*

  Ej3: (2, 3) y (4, 5). Como: (2, 3) = t(4, 5) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 = 4t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ 3 = 5t \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{5} \end{cases}$. No hay un mismo valor de t que haga ciertas las dos igualdades a la vez $\Rightarrow$ Son *lin. independientes*.

Ej 4: (2, 3) y (4, 6). Como: (2, 3) = t(4, 6) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ 3 = 6t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ son *linealmente dependientes*, puesto que (2, 3) = $\frac{1}{2}$(4, 6).

3. PRODUCTO ESCALAR

- **Definición**: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, siendo α el ángulo entre ambos vectores (da igual el ángulo del primer vector al segundo, o a la inversa). Si alguno de los dos vectores es nulo, el producto escalar vale 0. Observar que *el resultado del producto escalar es un número real* (o sea, un *escalar*).
- **Propiedades**:
  1) $\boxed{\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2}$. El primer miembro significa el producto escalar del vector por sí mismo; el segundo miembro es el cuadrado de un número real (el módulo del vector). Esta fórmula sirve para resolver problemas en los que se relacionan productos escalares y módulos, pidiéndonos hallar unos u otros.
  2) $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$, fórmula que se obtiene despejando en la definición y que sirve para hallar el ángulo que forman dos vectores. De los dos resultados posibles (α y 360 – α), se toma el menor.
  3) Dados dos vectores *no nulos*, $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$. Este teorema es indispensable como condición de perpendicularidad.
  4) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\text{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$



  5) Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
  6) Asociativa: $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$.
     Observar que en estas expresiones hay productos escalares, productos externos y un producto de números reales.
  7) Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
  8) Dada una base ortonormal $B = \{\vec{i}\,,\ \vec{j}\,\}$, se tiene: el producto escalar de cada uno de los vectores de la base ortonormal por sí mismo, vale 1; el producto de uno de ellos por cualquiera de los otros dos, vale 0.
  9) Expresión analítica del producto escalar respecto de una base ortonormal (canónica):
     Ésta es la manera habitual de calcular el producto escalar de dos vectores conocidas sus coordenadas. Si las coordenadas de dos vectores respecto de la base ortonormal son Si $\vec{u} = (a,b)$ y $\vec{v} = (a',b')$, se tiene:
     $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot a' + b\cdot b'}$$
     Ésta es una fórmula fundamental, puesto que siempre trabajaremos con bases ortonormales.
     Aplicando esto a la propiedad 1, se tiene:
     $|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} \ \Rightarrow\ \boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{a^2+b^2}}$, siendo $\vec{u} = (a,b)$.
     Ésta es la manera de calcular el módulo de un vector a partir de sus coordenadas.

Todas estas propiedades son importantes. Pero, en especial, las 1, 2, 3 y 9.

4. PLANOS AFÍN Y EUCLÍDEO

- **Definición**

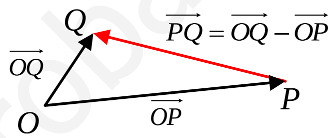
El plano afín son los puntos coexistiendo junto al espacio vectorial V_2 de los vectores del plano, con un ***sistema de referencia*** (un punto fijo O del plano y una base, que siempre consideramos la base canónica). Se identifican las coordenadas de los puntos con las de sus vectores de posición (ver definición un poco más adelante).
El plano euclídeo o métrico es lo mismo, pero disponiendo del producto escalar, con lo que se puede hablar de ángulos, perpendicularidad, distancias y áreas. Normalmente trabajamos en el plano euclídeo, con todas las herramientas a nuestro alcance.

- **Vector de posición**

Si $P(x, y) \Rightarrow$ Su vector de posición es el que une el origen del sistema de referencia O con el punto P. Como se ha dicho, P y su vector de posición se identifican y tienen las mismas coordenadas: $\overrightarrow{OP} = (x, y)$

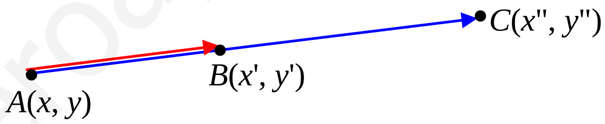
- **Coordenadas del vector que une dos puntos**

$P(x, y);\quad Q(x', y') \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PQ} = (x'-x, y'-y)$



- **Comprobar si tres puntos *distintos* están alineados**

$A(x, y)$, $B(x', y')$, $C(x'', y'')$ están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB} = (x'-x, y'-y)$ y $\overrightarrow{AC} = (x''-x, y''-y)$ tienen la misma dirección. Esto es, si son proporcionales. Luego la condición es:

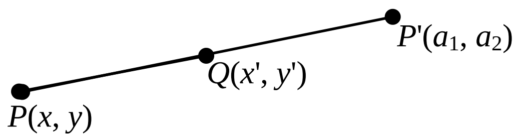


- Si se puede conseguir que los denominadores sean no nulos: $\dfrac{x''-x}{x'-x} = \dfrac{y''-y}{y'-y}$
- En caso contrario (no puede conseguirse que los denominadores sean no nulos ni poniendo el cociente al revés), siempre están alineados.

- **Punto medio de un segmento**

$A(x, y), B(x', y') \;\Rightarrow\; M\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$

- **Simétrico de un punto respecto de otro**

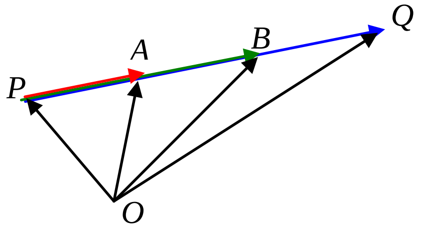


Conocidos $P(x, y)$ y $Q(x', y')$, para hallar las coordenadas de P' consideramos que Q es el punto medio del segmento PP'. Por tanto se despejan a_1, a_2 y en:

$$\frac{x+a_1}{2} = x' \qquad \frac{y+a_2}{2} = y'$$

- **Dividir un segmento en varios iguales**

Por ejemplo, para dividir el segmento PQ en 3 partes iguales, hallamos las coordenadas de los puntos que causan la división: A y B. Es lo mismo que calcular las coordenadas de sus vectores de posición:



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + +\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$$

- **Módulo de un vector** (Plano euclídeo)

Se calcula por medio del producto escalar. Si $\vec{u} = (x, y)$:

$$|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Hallar un vector normal (perpendicular) a uno dado** (Plano euclídeo)

Si $\vec{u} = (x, y)$, un vector perpendicular a éste sería $\vec{v} = (-y, x)$. Si bien, hay infinitos vectores que son perpendiculares (cualquiera que sea proporcional a $\vec{v}$).
En efecto, $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x, y)(-y, x) = x(-y) + yx = -xy + xy = 0$. Como su producto escalar es 0, los vectores son *ortogonales* (perpendiculares).

- **Vector unitario en la dirección de uno dado**

Un vector unitario es aquel que tiene módulo 1. Un vector en la dirección de un vector dado $\vec{u}$ tiene que ser múltiplo de él. Pues bien, el vector que tiene la misma dirección que $\vec{u}$ pero con módulo 1 es:

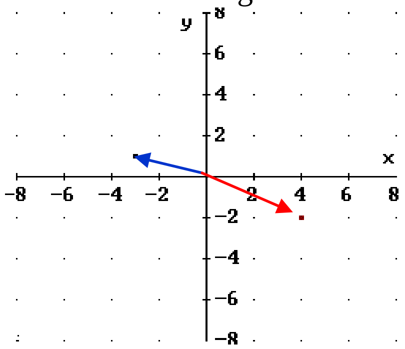
$$\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

El opuesto dicho vector, $-\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$, también tiene módulo 1 y mantiene la misma dirección que $\vec{u}$.
Si queremos un vector de módulo 2, por ejemplo, en la misma dirección que el dado, haremos esto y multiplicaremos el vector unitario por 2. Lo mismo para 3 o cualquier otro módulo.

5. EJEMPLOS DE PROBLEMAS

1) Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (4, -2)$ calculamos:

a) **Dibujarlos** en un sistema de referencia, haciendo coincidir los orígenes de los vectores con el origen del sistema de referencia:



b) **Suma**: $\vec{a} + \vec{b}$ = (–3, 1) + (4, –2) = (–3 + 4, 1 –2) = (1, –1)

c) **Diferencia**: $\vec{a} - \vec{b}$ = (–3, 1) – (4, –2) = (–3 – 4, 1 –(–2)) = (–7, 3)

d) **Producto externo**: $3\vec{a}$ = 3(–3, 1) = (–9, 3)

e) **Producto externo**: $-4\vec{b}$ = –4 (4, –2) = (–16, 8)

f) **Combinación lineal** de coeficientes 2 y –5:

$2\vec{a} - 5\vec{b}$ = 2(–3, 1) –5(4, –2) = (–6, 2) + (–20, 10) = (–26, 12)

g) ¿Son **linealmente independientes**?: Dividimos sus coordenadas: $\frac{4}{-3} \neq \frac{-2}{1}$, por lo que, en efecto, son linealmente independientes, lo que significa que tienen distinta dirección.

h) ¿Forman una **base**?: Sí, puesto que en el plano, dos vectores no nulos linealmente independientes siempre forman una base.

i) **Módulos** respectivos: $|\vec{a}| = |(-3, 1)| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$|\vec{b}| = |(4, -2)| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

j) Supuesto un sistema de referencia, puntos de los que son **vectores de posición**:

$A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (-3, 1)$ y $B = \overrightarrow{OB} = \vec{b} = (4, -2)$

k) **Punto medio** de *A* y *B*: $M = \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

l) **Simétrico** de *A* respecto de *B*:

Llamando *P*(*x*, *y*) a dicho punto, *B* sería el punto medio entre *A* y *P*. Por tanto:

$$\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 4 \Rightarrow -3+x = 8 \Rightarrow x = 8+3 = 11 \\ \frac{1+y}{2} = -2 \Rightarrow 1+y = -4 \Rightarrow y = -4-1 = -5 \end{cases}$$

De donde: $P(11, -5)$

m) **Producto escalar** de $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = (–3, 1) · (4, –2) = –3·4 + 1(–2) = –12–2 = –14

n) **Ángulo** que forman: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-14}{\sqrt{10}\sqrt{20}}$ de donde, usando la calculadora: $\alpha = 171{,}87^{\circ}$.

o) **Vector que va desde *A* hasta *B***:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ = (4, –2) – (–3, 1) = (4+3, –2–1) = (7, –3)

p) **¿Están alineados los puntos *A*, *B* y *C*(11, –5)?**:

Hallamos
$\overrightarrow{AB}$ =(7, –3) (se calculó antes), y:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ = (11, –5) – (–3, 1) = (14, –6).
Como estos dos vectores son proporcionales, ya que el segundo es el doble que el primero, o bien:

$$\frac{14}{7} = \frac{-6}{-3}$$

son proporcionales, es decir, tienen la misma dirección y el punto A es común a ambos. Por tanto, los tres puntos están alineados.

q) Decir algún **vector que sea perpendicular a** $\vec{a}$, y comprobar que lo es.
$\vec{a}$ = (–3, 1) $\Rightarrow$ Invirtiendo el orden de sus coordenadas y cambiando el signo de una de ellas, obtenemos un vector perpendicular. Por ejemplo: $\vec{n}$ = (1, 3).
Comprobemos que estos dos vectores son perpendiculares. La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea cero. Y, en efecto:

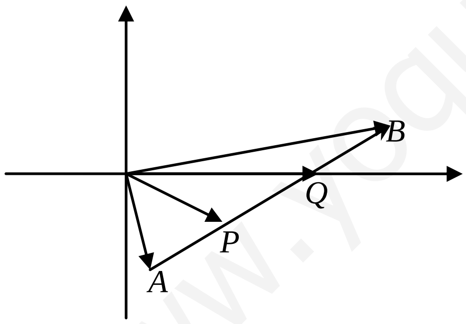
$$\vec{a}\cdot\vec{n} = (-3, 1)\cdot(1, 3) = -3\cdot 1 + 1\cdot 3 = -3 + 3 = 0$$

2) Si A(3, –1) (un punto) y $\overrightarrow{AB}$ = (3, –4), ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?
Solución: Llamando $B(x, y)$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow (3, -4) = (x, y) - (3, -1) \Rightarrow (3, -4) = (x-3, y+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = x-3 \Rightarrow 3+3 = x \Rightarrow 6 = x \\ -4 = y+1 \Rightarrow -4-1 = y \Rightarrow -5 = y \end{cases} \Rightarrow B(6, -5).$$

3) Dados los puntos A(2, –4) y B(11, 2), hallar los puntos que dividen al segmento que los une en 3 partes iguales.



Sean P y Q dichos puntos. En primer lugar, calculamos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (11, 2) - (2, -4) = (9, 6)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, -4) + \frac{1}{3}(9, 6) =$$
$$= (2, -4) + (3, 2) = (5, -2)$$

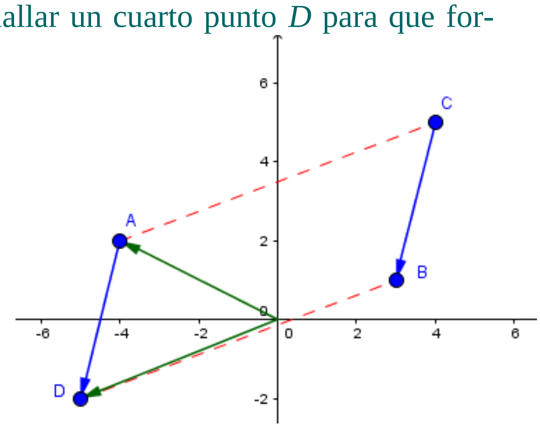
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (2, -4) + \frac{2}{3}(9, 6) =$$
$$= (2, -4) + (6, 4) = (8, 0)$$

Luego los puntos son: $\boxed{P(5, -2) \text{ y } Q(8, 0)}$.

4) Dados los puntos A(–4, 2), B(3, 1), C(4, 5), hallar un cuarto punto D para que formen, entre los cuatro, un paralelogramo.
Hay tres posibilidades:

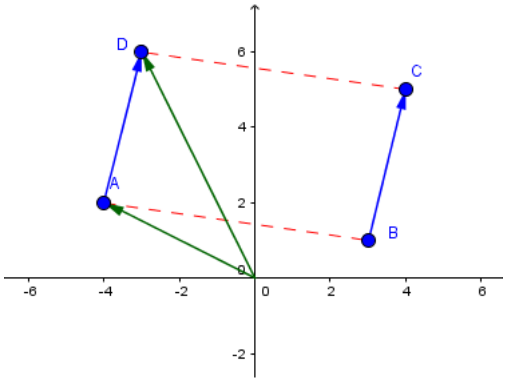
- Si D está entre A y B, como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, se tiene:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) =$$
$$= (-4, 2) + (3, 1) - (4, 5) = (-5, -2)$$



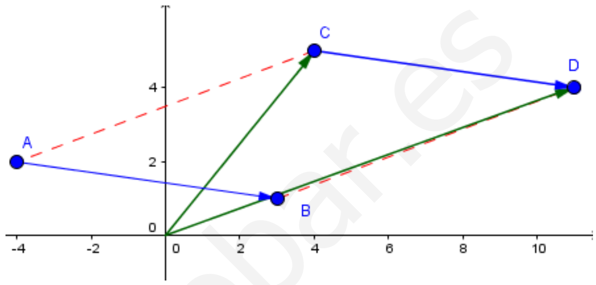
- Si D está entre A y C:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) =$$
$$= (-4,\ 2) + (4,\ 5) - (3,\ 1) = (-3,\ 6)$$



- Si D está entre B y C:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} =$$
$$= \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$
$$= (4,\ 5) + (3,\ 1) - (-4,\ 2) = (11,\ 4)$$



5) Dar un vector unitario con la misma dirección que $\vec{a} = (-4,\ 3)$

Hay dos posibilidades:

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Como quiera que $|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$, los vectores que cumplen la condición solicitada son:

$$\boxed{\frac{1}{5}(-4,\ 3) = \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{-\frac{1}{5}(-4,\ 3) = \left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)}$$