IES Fernando de Herrera **Curso 2012/13**
Primer Examen 2ª evaluación – 4º ESO **30 de enero de 2013**

NOMBRE ____

1) Resolver: $\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3$ *(1 punto)*
2) Resolver: $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$ *(1,5 puntos)*
3) Resolver: $2\log x + \log x^4 = 6$ *(1 punto)*
4) Resolver: $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{-6}{x^2-1}$ *(1,5 puntos)*
5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 8x-4<15x+8 \\ \dfrac{2x+6}{5}\le\dfrac{6-3x}{4} \end{cases}$ *(1,5 puntos)*
6) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2-2x}{x+3}\ge 0$ *(1,5 puntos)*
7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in R \; / \; |x+3| < 2\}$ *(1 punto)*
8) Resolver: $|4-|2x-1||=3$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3$ *(1 punto)*

El procedimiento pasa por aislar el sumando que contiene a una de las raíces en un miembro, y elevar al cuadrado:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}-3 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{7x+4}-3)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+1=7x+4+9-6\sqrt{7x+4} \Rightarrow 6\sqrt{7x+4}=6x+12 \Rightarrow \sqrt{7x+4}=x+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt{7x+4})^2=(x+2)^2 \Rightarrow 7x+4=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ó \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Este último paso es porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula. Cuando elevamos al cuadrado una ecuación, siempre se pueden introducir soluciones falsas. Las comprobamos:

- $x=0 \Rightarrow \sqrt{0+1}-\sqrt{7\cdot 0+4}=1-2=-1\neq -3$. No es válida.
- $x=3 \Rightarrow \sqrt{3+1}-\sqrt{7\cdot 3+4}=2-5=-3$. Válida.

Solución única: $\boxed{x=3}$.

2) Resolver: $1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1}$ *(1,5 puntos)*

$$1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1} \Rightarrow 1+(3^2)^x=3\cdot 3^x+\frac{3^x}{3} \Rightarrow 1+3^{2x}=3\cdot 3^x+\frac{3^x}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+(3^x)^2=3\cdot 3^x+\dfrac{3^x}{3} \Rightarrow$ Con el *cambio de incógnita* $t=3^x$, queda:

$$1+t^2=3t+\frac{t}{3} \Rightarrow 3+3t^2=9t+t \Rightarrow 3t^2-10t+3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\left\langle \begin{matrix} =1/3 \\ 3 \end{matrix}\right.$$

Deshacemos el cambio:

- Si $t=1/3 \Rightarrow 3^x=1/3 \Rightarrow 3^x=3^{-1} \Rightarrow \boxed{x=-1}$
- Si $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow 3^x=3^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

3) Resolver: $2\log x+\log x^4=6$ *(1 punto)*

$$2\log x+\log x^4=6 \Rightarrow \log x^2+\log x^4=\log 10^6 \Rightarrow \log x^2\cdot x^4=\log 10^6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log x^6=\log 10^6 \Rightarrow x^6=10^6 \Rightarrow x=\pm\sqrt[6]{10^6}=\pm 10.$$

que $\boxed{x=10}$ es válida, porque no hace 0 ni negativo ningún argumento de logaritmo. Pero no ocurre lo mismo con $x=-10$, puesto que en el primer sumando de la ecuación original habría que tomarle logaritmos, y no existe el logaritmo de un número negativo: esta otra solución *no es válida*.

Este tipo de inconvenientes no se suele presentar si se opta por averiguar el valor de $\log x$ en lugar de quitar logaritmos, como hemos hecho antes. Además, las ecuaciones suelen ser más sencillas. Volvamos a resolver la ecuación de esta otra forma:

$$2\log x+\log x^4=6 \Rightarrow 2\log x+4\log x=6 \Rightarrow 6\log x=6 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x=10}$$

que es válida puesto que no anula argumentos de log en la ecuación original.

4) Resolver: $\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{-6}{x^2-1}$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{-6}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-6}{(x-1)(x+1)}$$

Esta igualdad será cierta cuando los numeradores coincidan. Pero para valores que no anulen el denominador, como veremos más adelante:

$$x^2 - x - 3(x + 1) = -6 \Rightarrow x^2 - x - 3x - 3 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{2}{2} = 1 \\ = \frac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

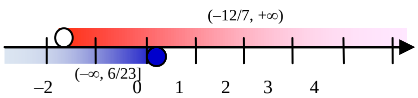
Pero en las ecuaciones donde la x está en el denominador hay que validar las soluciones obtenidas, comprobando que no anulan ningún denominador en la ecuación original. En este caso, $x = 1$ no es válida por tal motivo. Luego la única solución es: $\boxed{x = 3}$.

5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 8x-4 < 15x+8 \\ \frac{2x+6}{5} \le \frac{6-3x}{4} \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

Resolvemos cada inecuación por separado.

- $8x - 4 < 15x + 8 \Rightarrow -4 - 8 < 15x - 8x \Rightarrow -12 < 7x \Rightarrow -\frac{12}{7} < x \Rightarrow$
  $x > -\frac{12}{7}$
  Hemos pasado las x al segundo miembro para que se simplifiquen en un sumando con coeficiente positivo. Además, la penúltima desigualdad leída de derecha a izquierda es exactamente igual a la última desigualdad leída en la forma habitual. Más adelante, representaremos gráficamente la solución obtenida, junto con la de la otra inecuación, para obtener la solución del sistema.
- $\frac{2x+6}{5} \le \frac{6-3x}{4} \Rightarrow$ Pasamos los divisores multiplicando a los miembros contrarios; como ambos son positivos, no cambia el sentido de la desigualdad:
  $4(2x + 6) \le 5(6 - 3x) \Rightarrow 8x + 24 \le 30 - 15x \Rightarrow 8x + 15x \le 30 - 24 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 23x \le 6 \Rightarrow x \le \frac{6}{23}$

Llevamos a un mismo gráfico ambas soluciones:



Y observamos que los valores de x que son soluciones de ambas inecuaciones, es decir, los que verifican ambas condiciones, o sea, los que están en las dos zonas coloreadas a la vez, son los valores de x del intervalo (–12/7,6/23], que está abierto en –12/7, ya que este punto es solución de la segunda inecuación (zona inferior, azul), pero no de la primera (zona superior, rosa), y cerrado en 6/23, pues dicho valor está en ambas zonas. Por tanto, la solución del sistema son los valores del intervalo:

$$\boxed{(-12/7,\ 6/23])}$$

6) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2-2x}{x+3}\ge 0$ *(1,5 puntos)*

- Descomponemos factorialmente y calculamos las raíces de los polinomios del numerador y del denominador:

$$x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0 \iff \begin{cases} x=0 \quad \text{ó} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores es 0. Tenemos la descomposición factorial y las raíces, en los dos últimos pasos.

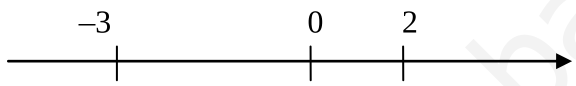
$$x+3=0 \iff x=-3$$

Por consiguiente, la inecuación se transforma en:

$$\frac{x(x-2)}{x+3}\ge 0$$

lo que nos lleva a evaluar el signo de esa expresión.

- Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas:



Evaluamos el signo de la expresión en cada uno de los intervalos resultantes. Para ello, basta con elegir un valor cualquiera de x en cada intervalo, porque el signo será el mismo, en ese intervalo, para cualquier valor de x que elijamos:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$x+3$	–	0	+	…	+	…	+
x	–	…	–	0	+	…	+
$x-2$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x(x-2)}{x+3}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Luego la solución de la inecuación es:

$$\boxed{x\in(-3,0]\cup[2,+\infty)}$$

7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x\in \mathrm{R} \,/\, |x+3|<2\}$ *(1 punto)*
Según una de las definiciones de entorno, ese conjunto es:

$$\boxed{E(-3,2)}=(-3-2,-3+2)=\boxed{(-5,-1)}$$

8) Resolver: $|4-|2x-1||=3$ *(1 punto)*
Según las propiedades del valor absoluto:

$$|4-|2x-1||=3 \iff$$

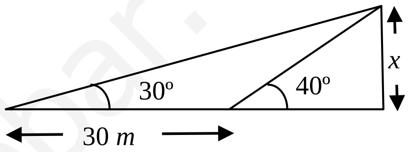
$$\iff \begin{cases} 4-|2x-1|=3 \iff 1=|2x-1| \iff \begin{cases} 2x-1=1 \iff 2x=2 \iff x=1 \\ \text{ó} \\ 2x-1=-1 \iff 2x=0 \iff x=0 \end{cases} \\ \text{ó} \\ 4-|2x-1|=-3 \iff 7=|2x-1| \iff \begin{cases} 2x-1=7 \iff 2x=8 \iff x=4 \\ \text{ó} \\ 2x-1=-7 \iff 2x=-6 \iff x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones posibles: $\boxed{-3,\ 0,\ 1,\ 4}$.

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

1) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$
2) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4}+5\cdot 3^x-3^{x+1}=163$
3) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1}$
4) Resolver: $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$
5) Resolver la inecuación $\frac{x^2-3x}{x+2}\geq 0$ *(1,5 puntos)*
6) Hallar x en base al gráfico adjunto.



7) Sin calculadora, siendo $\cot \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.
8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: tg (–275º) y cos 7770º
9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$ *(1,5 puntos)*

1 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) a) Simplificar al máximo: $\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$

b) Racionalizar: $\frac{3}{4-3\sqrt{3}}$

2 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) Hallar la suma de 10 términos de 1, x, x^2, ...

3 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación**) a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2 - 102x + 331x - 238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2 - 102x + 331x - 238 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

SOLUCIONES

1) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

Aislamos el sumando que contiene la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1 \Rightarrow \sqrt{x^2-6x+2}=1-2x \Rightarrow (\sqrt{x^2-6x+2})^2=(1-2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-6x+2=1-4x+4x^2 \Rightarrow 0=4x^2-4x+1-x^2+6x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=3x^2+2x-1 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm4}{6}=\left\langle\begin{array}{l}=\frac{-6}{6}=-1\\ =\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Como siempre que elevamos al cuadrado, hay que comprobar la validez de las soluciones, sustituyendo en la ecuación original:

- $\boxed{x=-1}$: $-2+\sqrt{1+6+2}=-2+3=1$: válida
- $\boxed{x=1/3}$: Sustituimos y realizamos la operación con la calculadora, y resulta ser igualmente válida.

2) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $3^{x-4}+5\cdot3^x-3^{x+1}=163$

Buscamos que aparezca repetidamente la misma base con el mismo exponente, conteniendo a la incógnita:

$$3^{x-4}+5\cdot3^x-3^{x+1}=163 \Rightarrow \frac{3^x}{3^4}+5\cdot3^x-3^x3=163$$

Hacemos el *cambio de incógnita* $t=3^x$:

$$\frac{t}{81}+5t-3t=163 \Rightarrow \frac{t+405t-243t}{81}=163 \Rightarrow 163t=163\cdot81 \Rightarrow t=81$$

Deshacemos el *cambio*:

$$3^x=81 \Rightarrow 3^x=3^4 \Rightarrow \boxed{x=4}.$$

3) **(No para quienes tengan suspendida la 1ª evaluación)** Resolver la ecuación siguiente: $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1}$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)+2(x+1)}{x^2-1}=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow x^2-x+2x+2=8 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=\frac{-6}{2}=-3\\ =\frac{4}{2}=2\end{array}\right.$$

Como ninguna de las dos anula ningún denominador en la ecuación original, ambas son válidas: $\boxed{x=-3 \text{ ó } x=2}$.

4) Resolver: $\log x^2-\log 3=\log x+\log 5$

Sabemos que suelen ser más fáciles las ecuaciones si, en lugar de quitar logaritmos y calculamos el valor de x, averiguamos directamente el valor de $\log x$. Así:

$\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5 \Rightarrow 2\log x - \log x = \log 3 + \log 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x = \log 3\cdot 5 \Rightarrow \log x = \log 15 \Rightarrow \boxed{x = 15}$.

La solución obtenida es válida porque no hace negativo ni cero ningún argumento de logaritmos en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2 - 3x}{x+2} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador por separado:

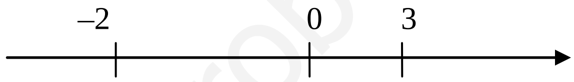
- $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0 \text{ ó } x = 3}$. La factorización es $x(x-3)$.
- $x + 2 = 0 \Rightarrow \underline{x = -2}$. La factorización es $x + 2$.

La inecuación queda así:

$$\frac{x(x-3)}{x+2} \geq 0$$

Eso significa que hay que encontrar los valores de x que hacen que la expresión del primer miembro sea positiva o nula.

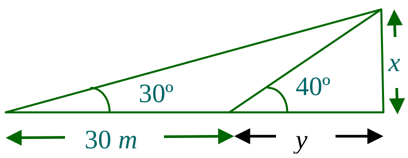
Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas y creamos el siguiente cuadro. En cada uno de los intervalos resultantes, cualquier valor de x que elijamos producirá el mismo signo para cada uno de los factores que participan en la inecuación y, por tanto, en la expresión cuyo signo evaluamos:



	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 2$	–	0	+	…	+	…	+
x	–	…	–	0	+	…	+
$x - 3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x(x-3)}{x+2}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto, la solución son los elementos de: $\boxed{(-2, 0] \cup [3, +\infty)}$

6) Hallar x en base al gráfico adjunto.



Llamando y a la base del triángulo rectángulo más pequeño de la derecha, se tiene, si nos fijamos en dicho triángulo y en el triángulo total (ambos son rectángulos):

$$\begin{cases} \text{tg}\,40^\circ = \dfrac{x}{y} \\ \text{tg}\,30^\circ = \dfrac{x}{30+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y\,\text{tg}\,40^\circ \\ x = (30+y)\,\text{tg}\,30^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{Igualamos:}$$

$$\Rightarrow y\,\text{tg}40^\circ = (30 + y)\text{tg}\,30^\circ \Rightarrow y\,\text{tg}40^\circ = 30\,\text{tg}\,30^\circ + y\,\text{tg}\,30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\,\text{tg}\,40^\circ - y\,\text{tg}\,30^\circ = 30\,\text{tg}\,30^\circ \Rightarrow y(\text{tg}\,40^\circ - \text{tg}\,30^\circ) = 30\,\text{tg}\,30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{30\,\text{tg}\,30^\circ}{\text{tg}\,40^\circ - \text{tg}\,30^\circ}$$

De donde: $x = y\,\text{tg}\,40^\circ = \dfrac{30\,\text{tg}\,30^\circ}{\text{tg}\,40^\circ - \text{tg}\,30^\circ}\text{tg}\,40^\circ = \boxed{\dfrac{30\,\text{tg}\,30^\circ\,\text{tg}\,40^\circ}{\text{tg}\,40^\circ - \text{tg}\,30^\circ} \approx 55{,}52\ m}$

7) Sin calculadora, siendo cotg α = – 2, 90º < α < 270º, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.
Como la cotangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

- $\boxed{\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\text{cotg } \alpha} = -\dfrac{1}{2}}$
- $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$, negativo por ser del segundo cuadrante.
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cos\alpha = \dfrac{-1}{2}\dfrac{-2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}}$
- $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-2/\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$
- $\boxed{\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}/5} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}}$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que tg α = –1/2), que α = – 26,57º. Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -26{,}57º + 180º = 153{,}43º = 153º\ 26'\ 5{,}82''}$

8) Expresar en función de un ángulo del primer cuadrante: tg (–275º) y cos 7770º

- tg (–275º) = tg (–275º + 360º) = $\boxed{\text{tg } 85º}$, pues al dar una vuelta completa estamos en la misma posición inicial sobre la circunferencia.
- cos 7770º = cos 210º = – cos (210º – 180º) = $\boxed{-\cos 30º}$ ya que es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210º es el resto de dividir 7770º entre 360º (son 21 vueltas completas más dicho resto).

9) Demostrar la veracidad de la siguiente identidad: $\dfrac{\text{cosec}\,\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha} = \text{sen}\,\alpha$ *(1,5 puntos)*

$$\boxed{\frac{\text{cosec}\,\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}\,\alpha}$$

1 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** a) Simplificar al máximo: $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}}$

$$\frac{\sqrt[4]{a^9}}{a\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^8 a}}{a\sqrt{a^2 a}} = \frac{a^2\sqrt[4]{a}}{a\cdot a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a^2}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{3}{4-3\sqrt{3}}$

$$\frac{3}{4-3\sqrt{3}} = \frac{3}{4-3\sqrt{3}}\frac{4+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \frac{3(4+3\sqrt{3})}{4^2-(3\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-3^2(\sqrt{3})^2} = \frac{12+9\sqrt{3}}{16-27} =$$
$$= \boxed{-\frac{12+9\sqrt{3}}{11}}$$

2 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** Hallar la suma de 10 términos de 1, x, x^2, ...

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$, $r = x$. Por tanto:

$$s_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = \boxed{\frac{x^{10}-1}{x-1}}$$

Aunque damos este resultado final, se podría dividir por Ruffini, resultando una expresión polinómica.

3 bis) **(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)** a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora): $9x^2 – 102x + 331x – 238$. b) Resolver la ecuación: $9x^2 – 102x + 331x – 238 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

Mediante Ruffini:

	9	–102	331	– 238
1		9	– 93	238
	9	– 93	238	$\boxed{0}$

Como no encontramos más valores, hallamos las posibles raíces restantes resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$9x^2 – 93x + 238 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{93 \pm \sqrt{8649-8568}}{18} = \frac{93 \pm 9}{18} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{84}{18} = \frac{14}{3} \\ = \frac{102}{18} = \frac{17}{3} \end{array} \right.$$

Luego: $\boxed{9x^3 – 102x^2 + 331x – 238 = 9(x – 1)(x – 14/3)(x – 17/3)}$

Según lo anterior, las raíces son: $\boxed{1, 14/3, 17/3}$.

NOMBRE: ____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}$ *(0,5 puntos)*
   b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ *(0,5 puntos)*
2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:
   a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,1 punto)*
   b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. *(0,9 puntos)*
3) Calcular 37^2. *(0 puntos)*
   a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x – 2$ sea $– 45$, siendo $P(x) = mx^3 – 13x^2 – 48x + 55$ *(0,5 puntos)*
   b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 – 13x^2 – 48x + 55$ *(0,5 puntos)*
4) Resolver las ecuaciones:
   a) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{x-2}{x+3}$ *(1 punto)*
   b) $5 \log x = 3 + \log \dfrac{x^3}{10}$ *(1 punto)*
   c) $5^{2x} – 30\cdot 5^x + 125 = 0$ *(1 punto)*
   d) $2\sqrt{2x+3}=3+\sqrt{3x}$ *(1 punto)*
5) Resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x^2-4x}\geq 0$ *(1 punto)*
6) Contestar las siguientes cuestiones:
   a) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg}\alpha = – 2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*
   b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\operatorname{sen} 1650^\circ$. *(0,5 puntos)*
   c) Convertir a radianes 150º, expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}=\frac{\sqrt{x^5}}{x^2\sqrt[3]{x^3x}}=\frac{\sqrt{x^4x}}{x^2x\sqrt[3]{x}}=\frac{x^2\sqrt{x}}{x^3\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt[3]{x^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x^3}\sqrt[6]{x^4}}{x\,x}=\frac{\sqrt[6]{x^7}}{x^2}=\frac{x\sqrt[6]{x}}{x^2}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{x}}{x}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{3-4\sqrt{15}+4\cdot 5}{3-4\cdot 5}=$$

$$=\frac{23-4\sqrt{15}}{-17}=\boxed{\frac{4\sqrt{15}-23}{17}}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1=7$; $a_2=14$; $a_3=28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,1 punto)*

Es una progresión geométrica, con $a_1=7$ y $r=2$.

b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. *(0,9 puntos)*

$$s_{12}=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{7(2^{12}-1)}{2-1}=\boxed{28665}$$

3) Calcular 37^2. *(0 puntos)*

$$\boxed{37^2=1369}$$

a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x-2$ sea -45, siendo $P(x)=mx^3-13x^2-48x+55$ *(0,5 puntos)*

Según el Teorema del Resto, el resto de la citada división es:

$$P(2)=-45 \iff 8m-13\cdot 4-48\cdot 2+55=-45 \iff 8m-93=-45 \iff$$

$$\iff 8m=93-45 \iff m=\frac{48}{8} \iff \boxed{m=6}$$

b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x)=6x^3-13x^2-48x+55$ *(0,5 puntos)*

Intentamos, inicialmente, Ruffini:

	6	– 13	– 48	55
1		6	– 7	– 55
	6	– 7	– 55	0

Como no encontramos cómo continuar, resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado para averiguar si tiene más raíces:

$$6x^2-7x-55=0 \iff x=\frac{7\pm\sqrt{49+1320}}{12}=\frac{7\pm 37}{12}=\left\langle\begin{array}{l}=\dfrac{-30}{12}=-\dfrac{5}{2}\\[2mm] =\dfrac{44}{12}=\dfrac{11}{3}\end{array}\right.$$

Luego $\boxed{P(x) = 6(x-1)(x+5/2)(x-11/3)}$

4) Resolver las ecuaciones:

a) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{x-2}{x+3}$ *(1 punto)*

$$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 + 12x \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-2}{2} = -1 \\ = \frac{-12}{2} = -6 \end{array} \right.$$

Ambas soluciones son válidas, puesto que no anulan los denominadores iniciales: $\boxed{x = -1 \text{ ó } x = -6}$.

b) $5 \log x = 3 + \log \dfrac{x^3}{10}$ *(1 punto)*

$$5 \log x = 2 + \log \frac{x^3}{10} \Leftrightarrow 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \log x = 2 + 3 \log x - 1 \Leftrightarrow 5 \log x - 3 \log x = 1 \Leftrightarrow 2 \log x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 1/2 \Leftrightarrow x = 10^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{10}}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones: $x = \pm\sqrt{10}$, pero $-\sqrt{10}$ no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ *(1 punto)*

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando $\boxed{t = 5^x}$:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900-500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{50}{2} = 25 \end{array} \right.$$

- Si $t = 5 \Rightarrow$ Como $t = 5^x$, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
- Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ *(1 punto)*

$$2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x} \Rightarrow (2\sqrt{2x+3})^2 = (3+\sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$4(2x+3) = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow 8x + 12 = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow$$

$$8x + 12 - 9 - 3x = 6\sqrt{3x} \Rightarrow 5x + 3 = 6\sqrt{3x} \Rightarrow (5x+3)^2 = (6\sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$25x^2 + 30x + 9 = 36 \cdot 3x \Rightarrow 25x^2 - 78x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{78 \pm \sqrt{6084-900}}{50} =$$

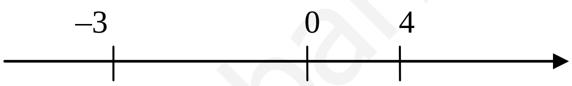
$$= \frac{78 \pm 72}{50} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{78-72}{50} = \frac{3}{25} \\ \frac{78+72}{50} = 3 \end{array} \right.$$

Ambas son válidas, como puede comprobarse sustituyendo en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ *(1 punto)*

- Raíces del numerador: $x + 3 = 0 \Rightarrow$ $\underline{x = -3}$. Factorizado: $\underline{x+3}$.
- Raíces del denominador: $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow$ $\underline{x = 0 \text{ ó } x = 4}$. Factorizado: $\underline{x(x-4)}$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados: $\frac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$

  División de R en intervalos mediante las raíces:



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x+3$	–	0	+	…	+	…	+
$x-0$	–	…	–	0	+	…	+
$x-4$	–	…	–	…	–	0	+
$\frac{x-3}{x(x-4)}$	–	0	+	∄	–	∄	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución son los puntos de: $\boxed{[-3, 0) \cup (4, +\infty)}$.

6) Contestar las siguientes cuestiones:

a) Sin calculadora, siendo tg α = – 2, 90º < α < 270º, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

- $\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{1}{2}}$
- $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$, negativo por ser del segundo cuadrante.
- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha = -2\frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$
- $\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}}$

- $\boxed{\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}/5} = \dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

  Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que tg $\alpha = -2$), que $\alpha = -63{,}43^\circ$.
  Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -63{,}43^\circ + 180^\circ = 116{,}57^\circ = 116^\circ\, 33'\, 54''}$

b) Hallar sin calculadora el valor exacto de sen 1650º. *(0,5 puntos)*
sen 1650º = sen 210º = – sen (210º – 180º) = – sen 30º = $\boxed{-1/2}$ ya que ésa es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210º es el resto de dividir 1650º entre 360º (son 4 vueltas completas más dicho resto).

c) Convertir a radianes 150º, expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π. *(0,5 puntos)*
Usamos una simple regla de 3:

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{150^\circ} \Rightarrow x = \frac{150\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{6}\text{ rad}}$$