NOMBRE ____

1) Resolver: $3\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=5$ *(1,5 puntos)*
2) Resolver: $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$ *(1,5 puntos)*
3) Resolver: $2\log x - \log (x + 24) = 2$ *(1,5 puntos)*
4) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 2(x-4) < \dfrac{1+8x}{3} \\ x^2 + 6x + 5 \geq 0 \end{cases}$ *(1,5 puntos)*
5) Resolver la inecuación $\dfrac{-2x^2-12x-10}{x-2} \geq 0$ *(1,5 puntos)*
6) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in R \;/\; |x + 13| < 2\}$ *(1,5 puntos)*
7) Resolver: $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $3\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=5$ *(1,5 puntos)*

$3\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=5 \;\Rightarrow\;$ Aislamos, en un miembro, una de los sumandos con raíces: $3\sqrt{x+4}=5+\sqrt{3x+1} \Rightarrow$ Elevamos al cuadrado: $(3\sqrt{x+4})^2=(5+\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; 9(x+4)=25+10\sqrt{3x+1}+3x+1 \;\Rightarrow\; 9x+36=26+10\sqrt{3x+1}+3x \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Repetimos el proceso: $9x+36-26-3x=10\sqrt{3x+1} \;\Rightarrow\; 6x+10=10\sqrt{3x+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; 3x+5=5\sqrt{3x+1} \;\Rightarrow (3x+5)^2=(5\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow 9x^2+30x+25=25(3x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9x^2+30x+25=75x+25 \;\Rightarrow\; 9x^2+30x+25-75x-25=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2-45x=0 \;\Rightarrow\; 9x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 9x=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{ó} \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

Se comprueba la validez, sustituyendo en la ecuación original: siempre que en algún paso elevamos al cuadrado los dos miembros de una ecuación, hay que comprobar la validez de las soluciones obtenidas. En este caso, ambas son válidas.

$\boxed{\text{Soluciones: } x=0 \text{ ó } x=5}$.

2) Resolver: $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$ *(1,5 puntos)*

$4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2} \;\Rightarrow\; (2^2)^x + 32 - 3\cdot 2^x\cdot 2^2 = 0 \;\Rightarrow\; 2^{2x} - 12\cdot 2^x + 32 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (2^x)^2 - 12\cdot 2^x + 32 = 0 \;\Rightarrow$ Cambio de incógnita $\boxed{t=2^x}$: $t^2 - 12t + 32 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; t = \frac{12\pm\sqrt{144-128}}{2} = \frac{12\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{12\pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} =4 \\ =8 \end{matrix} \right.$$

Deshacemos el *cambio*. Como $2^x = t$:

- $t = 4 \;\Rightarrow\; 2^x = 4 \;\Rightarrow\; 2^x = 2^2 \;\Rightarrow\; \boxed{x=2}$
- $t = 8 \;\Rightarrow\; 2^x = 8 \;\Rightarrow\; 2^x = 2^3 \;\Rightarrow\; \boxed{x=3}$

No es necesario comprobar la validez (no hemos elevado al cuadrado ni hay logaritmos), salvo que queramos asegurarnos de no haber cometido errores.

3) Resolver: $2\log x - \log(x+24) = 2$ *(1,5 puntos)*

$$2\log x - \log(x+24) = 2 \;\Rightarrow\; \log x^2 - \log(x+24) = 2 \;\Rightarrow\; \log\frac{x^2}{x+24} = \log 100 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{x^2}{x+24} = 100 \Rightarrow x^2 = 100(x+24) \Rightarrow x^2 = 100x + 2400 \Rightarrow x^2 - 100x - 2400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{100\pm\sqrt{10000+9600}}{2} = \frac{100\pm 140}{2} = \left\langle \begin{matrix} =-20 \\ =120 \end{matrix} \right.$$

La primera de las soluciones, al ser sustituida en la ecuación original, provoca que no exista el primer sumando, porque no hay logaritmos de números negativos, por lo que no es válida. La otra, en cambio, sí, porque ni anula ni hace 0 ningún logaritmo de la ecuación de partida. Por tanto: $\boxed{\text{Solución única } x=120}$.

4) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 2(x-4) < \dfrac{1+8x}{3} \\ x^2+6x+5 \ge 0 \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

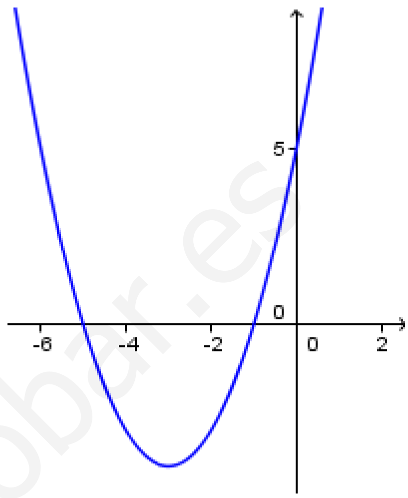
Resolvemos cada inecuación por separado. Para la primera:

$$2(x-4) < (1+8x)/3 \;\Rightarrow\; 6(x-4) < 1+8x \;\Rightarrow\; 6x-24 < 1+8x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6x-8x < 1+24 \;\Rightarrow\; -2x < 25 \;\Rightarrow\; \boxed{x > -25/2}$$

puesto que al pasar *multiplicando o dividiendo* un número *negativo* al otro miembro, cambia el sentido de la desigualdad.

Para resolver la segunda, llamamos $y = x^2 + 6x + 5$. Como la inecuación que tenemos que resolver es: $x^2 + 6x + 5 \geq 0$, y hemos llamado y al primer miembro, lo que queremos es hallar los valores de x que hacen que y sea mayor o igual que 0. Pero $y = x^2 + 6x + 5$ es la ecuación de una parábola *convexa* (porque el coeficiente de x^2 es positivo) que corta al eje OX en:

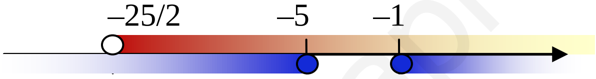


$$y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -5 \\ = -1 \end{array} \right.$$

Esto nos lleva a deducir que su gráfica es similar a la adjunta, por lo que los valores de x que hacen $y \geq 0$ son los que están en: $\boxed{(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)}$.

La solución del sistema son los x que resuelven ambas inecuaciones *a la vez*. Llevamos a un gráfico unos y otros y tomamos los comunes:



Luego la solución es: $\boxed{(-25/2, -5] \cup [-1, +\infty)}$.

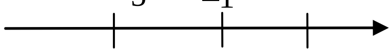
5) Resolver la inecuación $\dfrac{-2x^2 - 12x - 10}{x-2} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
    - $-2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -5 \\ -1 \end{array} \right.$

      Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

      $\boxed{-2x^2 - 12x - 10 = -2(x + 1)(x + 5) \text{ y sus raíces son } -1 \text{ y } -5}$.
    - El denominador ya es irreducible: $\boxed{x - 2, \text{ y su raíz es: } 2}$.
- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x+1)(x+5)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x+1)(x+5)}{x-2} \leq 0}$ porque al pasar *multiplicando* -2, por ser *negativo*, al otro miembro, la desigualdad cambia de sentido.
- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$

$x+5$	–	0	+	...	+	...	+
$x+1$	–	...	–	0	+	...	+
$x-2$	–	...	–	...	–	0	+
$\dfrac{(x+1)(x+5)}{x-2}$	–	0	+	0	–	∄	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	Si	Si	No	No

Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que también los descartamos. De este modo, la solución de la inecuación son los valores de:

$$\boxed{(-\infty, -5] \cup [-1, 2)}$$

6) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in \mathrm{R} \;/\; |x + 13| < 2\}$ *(1,5 puntos)*

Por definición, $|x + 13| < 2 \Leftrightarrow \mathrm{d}(x, -13) < 2$, es decir, los puntos x cuya distancia a -13 es menor que 2. Y eso es, a su vez, la definición de *entorno*. Por tanto:

$$\{x \in \mathrm{R} \;/\; |x + 13| < 2\} = \boxed{\mathrm{E}(-13, 2)}$$

Además, un *entorno* en forma de *intervalo abierto* es así: $\mathrm{E}(a, r) = (a - r, a + r)$. Por tanto:

$$\mathrm{E}(-13, 2) = (-13 - 2, -13 + 2) = \boxed{(-15, -11)}.$$

7) Resolver: $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$ *(1 punto)*

Se trata de una ecuación *bicuadrada*, que podemos resolver con un *cambio de incógnita*: $\boxed{t = x^2}$, con lo que $t^2 = (x^2)^2 = x^4$. Por tanto:

$$2x^4 - 3x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = -5/2 \\ = 4 \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio:

- $t = -5/2 \Rightarrow$ como $x^2 = t$: $x^2 = -5/2$, lo que no puede darse, porque un número al cuadrado siempre es positivo o cero.
- $t = 4 \Rightarrow$ como $x^2 = t$: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$.

Es decir, tiene *dos soluciones*.

IES Fernando de Herrera **Curso 2013/14**
Examen Global 2ª evaluación – 4º ESO **5 de marzo de 2014**

NOMBRE: ____

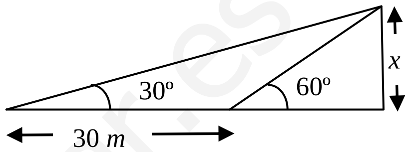
1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

1) Resolver: $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 17 \\ \log x - \log y = 9 \end{cases}$ *(1 punto)*

2) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2 - 2x}{x+3} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

3) Sin calculadora, siendo tg $\alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α, simplificando los resultados (denominadores racionalizados). A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1,5 puntos)*

4) Hallar x en base al gráfico adjunto, sin calculadora y simplificando el resultado. *(1 punto)*



5) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)**

Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{5-x}{2} < 3(x-2) \\ -x^2 - 4x - 3 < 0 \end{cases}$ *(2 puntos)*

6) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)** Resolver la ecuación siguiente: $9 - 3\sqrt{x-5} = \sqrt{x}$ *(1,5 puntos)*

7) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)** Resolver la ecuación siguiente: $4^x - 6 \cdot 2^x = -8$ *(1,5 puntos)*

8) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** *(1,5 puntos)*

a) Simplificar al máximo: $\dfrac{\sqrt[4]{81x^9}}{x\sqrt{x^3}}$

b) Racionalizar: $\dfrac{3+3\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}}$

9) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** *(2 puntos)*

a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora):

$$P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12.$$

b) Resolver la ecuación: $4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

c) Hallar a para que al dividir $P(x) = ax^5 + 2x^2 - 3x$ entre $x + 2$ resulte 3 de resto.

10) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** Resolver: *(1,5 puntos)*

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

SOLUCIONES

1) Resolver: $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 17 \\ \log x - \log y = 9 \end{cases}$ *(1 punto)*

En el caso de ecuaciones logarítmicas, si es posible no quitar logaritmos nos quedan ecuaciones más fáciles. En este caso, es posible proceder de esta forma. Así, llamando $a = \log x$, $b = \log y$, el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 2a - 3b = 17 \\ a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 17 \\ -2a + 2b = -18 \end{cases}$$

$$\text{Sumando}: -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

Sustituyendo en la 2ª ec: $a - 1 = 9 \Rightarrow a = 10$

Deshacemos el cambio:

- $a = 10 \Rightarrow \log x = 10 \Rightarrow x = 10^{10}$
- $b = 1 \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10^1 = 10$.

Como ninguna de ellas hace 0 ni negativo ningún argumento de log en el sistema original, la solución es válida: $\boxed{x = 10^{10} \text{ con } y = 10}$.

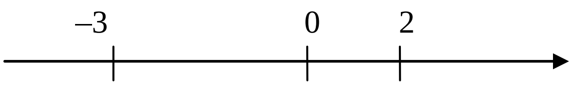
2) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2 - 2x}{x+3} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

Factorización de los polinomios y cálculo de sus raíces:

- Raíces del numerador: $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$. Factorizado: $x(x-2)$.
- Raíces del denominador: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$. Factorizado: $x + 3$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados:

$$\frac{x(x-2)}{x+3} \geq 0$$

División de R en intervalos mediante las raíces:



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	0	+	…	+	…	+
$x - 0$	–	…	–	0	+	…	+
$x - 2$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x(x-2)}{x+3}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Luego la solución son los puntos de: $\boxed{(-3, 0] \cup [2, +\infty)}$.

3) Sin calculadora, siendo tg $\alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α, simplificando los resultados (denominadores racionalizados). A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. *(1,5 puntos)*

Como $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, estamos en el segundo o en el tercer cuadrante. Pero además la tangente es negativa, por lo que el cuadrante en el que trabajamos sólo puede ser el segundo.

- $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+(-2)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 5 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

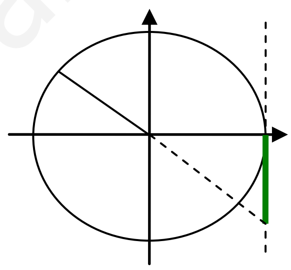
  $\boxed{\cos\alpha =} -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ donde hemos tomado el resultado negativo de la raíz porque en el segundo cuadrante el coseno es negativo.

- $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathrm{sen}\ \alpha =} \mathrm{tg}\ \alpha \cos\ \alpha = -2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \boxed{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

- $\boxed{\mathrm{cotg}\ \alpha =} \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

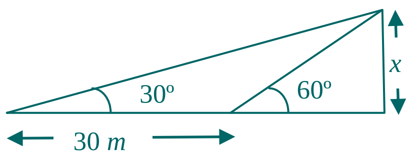
- $\boxed{\sec\ \alpha =} \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \boxed{-\sqrt{5}}$

- $\boxed{\mathrm{cosec}\ \alpha =} \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$



Por último, tg α = –2 $\Rightarrow$ según la calculadora, α = –63,435º. Pero como estamos en el segundo cuadrante, el valor verdadero es: $\boxed{\alpha =}$ –63,435º + 180º = 116,565º = $\boxed{116º\ 33'\ 54.1''}$

4) Hallar x en base al gráfico adjunto, sin calculadora y simplificando el resultado. *(1 punto)*



Llamando y a la base del triángulo rectángulo más pequeño de la derecha, se tiene, si nos fijamos en dicho triángulo y en el triángulo total (ambos son rectángulos):

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,60º = \dfrac{x}{y} \\ \mathrm{tg}\,30º = \dfrac{x}{30+y} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y\,\mathrm{tg}\,60º \\ x = (30+y)\,\mathrm{tg}\,30º \end{array}\right. \Rightarrow \text{Igualamos:}$$

$\Rightarrow y$ tg 60º = (30 + y) tg 30º $\Rightarrow$ y tg 60º = 30 tg 30º + y tg 30º $\Rightarrow$

$\Rightarrow y$ tg 60º – y tg 30º = 30 tg 30º $\Rightarrow$ y(tg 60º – tg 30º) = 30 tg 30º $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{30\,\mathrm{tg}\,30º}{\mathrm{tg}\,60º - \mathrm{tg}\,30º}$$

De donde: $x = y\ \mathrm{tg}\ 60º = \dfrac{30\,\mathrm{tg}\,30º}{\mathrm{tg}\,60º - \mathrm{tg}\,30º}\mathrm{tg}\ 60º = \dfrac{30\,\mathrm{tg}\,30º\,\mathrm{tg}\,60º}{\mathrm{tg}\,60º - \mathrm{tg}\,30º} = \dfrac{30\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}} =$

$$= \frac{30\dfrac{3}{3}}{\dfrac{3\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{30}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{15\cdot 3}{1\sqrt{3}} = \frac{45}{\sqrt{3}} = \frac{45}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{3} = \boxed{15\sqrt{3}\ m \approx 25{,}98\ m}$$

5) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5-x}{2} < 3(x-2) \\ -x^2-4x-3<0 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

Resolvemos cada inecuación por separado. Para la primera:

$$\frac{5-x}{2} < 3(x-2) \;\Rightarrow\; 5-x<6(x-2) \;\Rightarrow\; 5-x<6x-12 \;\Rightarrow\; -x-6x<-12-5 \;\Rightarrow$$

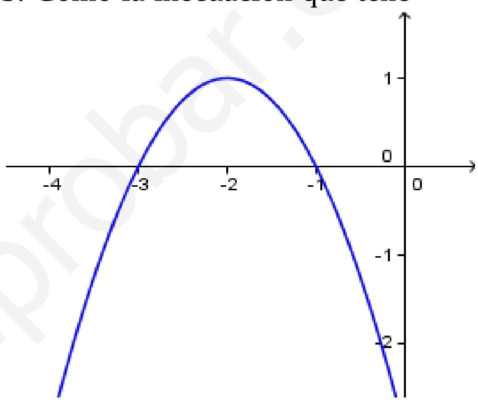
$$\Rightarrow\; -7x<-17 \;\Rightarrow\; x>\frac{-17}{-7} \;\Rightarrow\; \boxed{x>\frac{17}{7}}$$

puesto que al pasar *multiplicando o dividiendo* un número *negativo* al otro miembro, cambia el sentido de la desigualdad.

Para resolver la segunda, llamamos $y = -x^2 - 4x - 3$. Como la inecuación que tenemos que resolver es: $-x^2 - 4x - 3 < 0$, y hemos llamado y al primer miembro, lo que queremos es hallar los valores de x que hacen que y sea menor estrictamente que 0. Pero $y = -x^2 - 4x - 3$ es la ecuación de una parábola *cóncava* (porque el coeficiente de x^2 es negativo) que corta al eje OX en:

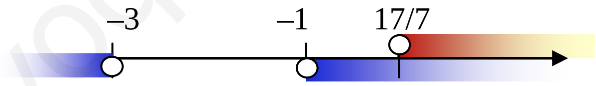
$$y=0 \;\Rightarrow\; 0=-x^2-4x-3 \;\Rightarrow\; x^2+4x+3=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases} =-3 \\ =-1 \end{cases}$$



Esto nos lleva a deducir que su gráfica es similar a la adjunta, por lo que los valores de x que hacen $y<0$ son los que están en: $\boxed{(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)}$.

La solución del sistema son los x que resuelven ambas inecuaciones *a la vez*. Llevamos a un gráfico unos y otros y tomamos los comunes:



Luego la solución es: $\boxed{(17/7, +\infty)}$.

6) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)** Resolver la ecuación siguiente: $9-3\sqrt{x-5}=\sqrt{x}$ *(1,5 puntos)*

$$9-3\sqrt{x-5}=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; (9-3\sqrt{x-5})^2=(\sqrt{x})^2 \;\Rightarrow\; 81-54\sqrt{x-5}+9(x-5)=x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 81+9x-45-x=54\sqrt{x-5} \;\Rightarrow\; 36+8x=54\sqrt{x-5} \;\Rightarrow\; 18+4x=27\sqrt{x-5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (18+4x)^2=(27\sqrt{x-5})^2 \;\Rightarrow\; 324+144x+16x^2=729(x-5) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 16x^2+144x+324=729x-3645 \;\Rightarrow\; 16x^2+144x+324-729x+3645=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 16x^2-585x+3969=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{585\pm\sqrt{585^2-254016}}{32}=\frac{585\pm 297}{32}=\begin{cases} =9 \\ =\dfrac{441}{16} \end{cases}$$

Comprobando ambas en la ecuación original, se llega a que la segunda no es válida. Por tanto, la única solución válida es $\boxed{x=9}$.

7) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *aprobada*)** Resolver la ecuación siguiente: $4^x - 6\cdot 2^x = -8$ *(1,5 puntos)*

$$4^x - 6\cdot 2^x = -8 \Rightarrow (2^2)^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6\cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow$$

porque $(2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$. Llamando $t = 2^x$:

$$\Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =2 \\ =4 \end{array}\right.$$

Deshacemos el *cambio*:

- $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$.
- $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$.

8) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** *(1,5 puntos)*

a) Simplificar al máximo: $\dfrac{\sqrt[4]{81x^9}}{x\sqrt{x^3}}$

$$\frac{\sqrt[4]{81x^9}}{x\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{81x^9}}{x\sqrt{x^3}}\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{81x^9}\,\sqrt[4]{x^2}}{x\sqrt{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{81x^{11}}}{x\cdot x^2} = \frac{\sqrt[4]{3^4x^8x^3}}{x^3} = \frac{3x^2\sqrt[4]{x^3}}{x^3} = \boxed{\frac{3\sqrt[4]{x^3}}{x}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{3+3\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}}$

$$\frac{3+3\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}} = \frac{(3+3\sqrt{2})(3+3\sqrt{2})}{(3-3\sqrt{2})(3+3\sqrt{2})} = \frac{(3+3\sqrt{2})^2}{3^2-(3\sqrt{2})^2} = \frac{9+18\sqrt{2}+9\cdot 2}{9-9\cdot 2} = \frac{27+18\sqrt{2}}{9-18} =$$

$$= \frac{27+18\sqrt{2}}{-9} = -\frac{9(3+2\sqrt{2})}{9} = \boxed{-3-2\sqrt{2}}$$

9) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** *(2 puntos)*

a) Factorizar el polinomio siguiente (sin usar calculadora):

$$P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12.$$

Por Ruffini:

	4	–18	26	– 12
1		4	– 14	12
	4	– 14	12	0

Resolvemos $4x^2 - 14x + 12 = 0$: $x = \dfrac{14\pm\sqrt{196-192}}{8} = \dfrac{14\pm 2}{8} = \left\langle \begin{array}{l} =3/2 \\ =2 \end{array}\right.$

Por tanto: $\boxed{P(x) = 4(x-1)(x-3/2)(x-2)}$, ya que hemos empleado el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, puesto que conocemos *las tres* raíces del polinomio de grado 3, por lo que procedemos a escribir factores del tipo (x – *raíz*) y los multiplicamos por el coeficiente del término de mayor grado.

b) Resolver la ecuación: $4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 = 0$ (utilizar los cálculos del apartado anterior)

$$4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x-3/2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

Un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula. Como 4 no puede ser nulo para ningún valor de x, nos quedan las siguientes posibilidades:

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$
- $x - 3/2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 3/2}$
- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$

que son las tres soluciones de la ecuación (son las raíces del polinomio).

c) Hallar a para que al dividir $P(x) = ax^5 + 2x^2 - 3x$ entre $x + 2$ resulte 3 de resto.
Según el *Teorema del Resto*, debe ser $P(-2) = 3$:

$$-32a + 8 + 6 = 3 \Leftrightarrow -32a = 3 - 14 \Leftrightarrow -32a = -11 \Leftrightarrow \boxed{a =} \frac{-11}{-32} = \boxed{\frac{11}{32}}$$

10) **(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación *pendiente*)** Resolver: *(1,5 puntos)*

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

Poniendo el mismo denominador:

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3}{x^2-1} + \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+x^2+x+2x+2}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+5-(x^2-x)}{x^2-1} = 0$$

Una fracción se anula si lo hace el numerador, comprobando que las soluciones obtenidas no anulen el denominador:

$$x^2 + 3x + 5 - x^2 + x = 0 \Rightarrow 4x + 5 = 0 \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow \boxed{x = -5/4}$$

que es válida porque no anula el denominador de la ecuación original (sólo lo hacen -1 ó 1).

IES Fernando de Herrera **Curso 2013/14**
Recuperación 1ª y 2ª evaluación – 4º ESO **21 de marzo de 2014**

NOMBRE: ____

Nota: Los distintos problemas suman 11 puntos, pero, si se obtiene más de 10, se truncará la puntuación a dicho valor, nota legal máxima.

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

 a) $\dfrac{\sqrt[5]{x^{16}}}{x^2\,\sqrt[3]{x^2}}$ *(0,5 puntos)*

 b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$ *(0,5 puntos)*

2) Escribir el término general de una progresión geométrica de razón 1/2 cuyo primer término es 4. Hallar la suma de sus 50 primeros términos y la suma de los infinitos términos posibles de la misma. *(1 punto)*

3) a) Factorizar: $P(x) = -2x^3 - 2x^2 + 4$ *(0,5 puntos)*

 b) Resolver la ecuación: $\dfrac{x^2-3x+2}{-2x^3-2x^2+4}=0$ *(0,5 puntos)*

 c) Hallar a para que $Q(x) = ax^3 - 2x^2 + 4$ de -2 de resto al ser dividido entre $x + 2$. *(0,5 puntos)*

4) Resolver la inecuación $-2x^3 - 2x^2 + 4 > 0$ *(1 punto)*

5) Resolver las ecuaciones:

 a) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=2+\dfrac{x}{x-2}$ *(1 punto)*

 b) $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1 punto)*

 c) $\log x + \log(5 + x) = 2 + \log 3$ *(1 punto)*

 d) $\sqrt{x+2\sqrt{5+x}}=8$ *(1 punto)*

 e) $x^4 - 3x^2 + 1 = 5$ *(1 punto)*

6) Siendo $\operatorname{cotg}\alpha = -3$, con $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar, sin calculadora, el resto de las razones trigonométricas de α. A continuación, con la calculadora, dar el valor de α en grados, minutos y segundos. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x^{16}}}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt[5]{x^{16}}}{x^2\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[5]{x^{15}x}\,\sqrt[3]{x}}{x^2\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x}}=\frac{x^3\sqrt[5]{x}\,\sqrt[3]{x}}{x^2\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x^3\sqrt[15]{x^3}\,\sqrt[15]{x^5}}{x^2x}=\frac{x^3\sqrt[15]{x^8}}{x^3}=\boxed{\sqrt[15]{x^8}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}\,\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2}{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}2\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2}{3-2^2(\sqrt{7})^2}=\frac{3-4\sqrt{21}+4\cdot 7}{3-4\cdot 7}=\frac{31-4\sqrt{21}}{-25}=$$

Un signo – no debe quedar en el denominador:

$$=\frac{-(31-4\sqrt{21})}{25}=\boxed{\frac{-31+4\sqrt{21}}{25}}$$

2) Escribir el término general de una progresión geométrica de razón 1/2 cuyo primer término es 4. Hallar la suma de sus 50 primeros términos y la suma de los infinitos términos posibles de la misma. *(1 punto)*

- Usando que $a_n = a_1\, r^{n-1}$: $\boxed{a_n =} 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^2\dfrac{1^{n-1}}{2^{n-1}}=2^2\dfrac{1}{2^{n-1}}=2^{2-n+1}=\boxed{2^{3-n}}$
- Como $a_{50}=2^{3-50}=2^{-47}$ $\Rightarrow$ $\boxed{s_{50}=}\dfrac{a_{50}r-a_1}{r-1}=\dfrac{2^{-47}\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{\frac{1}{2^{47}}\frac{1}{2}-4}{-\frac{1}{2}}=$

$$=-2\left(\frac{1}{2^{48}}-4\right)=-2\frac{1-4\cdot 2^{48}}{2^{48}}=-\frac{1-2^{50}}{2^{47}}=\frac{2^{50}-1}{2^{47}}=\boxed{7{,}9999999999999992894}$$

- Ya que $0<r<1 \Rightarrow \boxed{s_\infty =}\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{4}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=\boxed{8}$

Con una calculadora con menos precisión, obtendremos que s_{50} = 8, pero es una aproximación, como vemos en el resultado que proporcionamos.

3) a) Factorizar: $P(x) = -2x^3 - 2x^2 + 4$ *(0,5 puntos)*

Según Ruffini:

	–2	–2	0	4
1		–2	–4	–4
	–2	–4	–4	0

El polinomio cociente es de segundo grado, y como no vemos fácilmente la próxima raíz para continuar factorizando por Ruffini, igualamos a cero dicho polinomio a fin de encontrar sus raíces:

$$-2x^2 - 4x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

que no tiene solución. Es decir, no tiene raíces reales. Por tanto, la factorización obtenida es la que nos dio Ruffini (no es aplicable el *Teorema de Descomposición Factorial*, porque no conocemos 3 raíces y tenemos un polinomio de grado 3):

$$\boxed{P(x) = (x-1)(-2x^2 - 4x - 4) = -2(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

b) Resolver la ecuación: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{-2x^3 - 2x^2 + 4} = 0$ *(0,5 puntos)*

Como $x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \langle\begin{smallmatrix}=1\\=2\end{smallmatrix}$, se tiene que:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Por tanto:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^3 - 2x^2 + 4} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-2)}{-2(x^2 + 2x + 2)} = 0$$

con $x \neq 1$ (lo que tenemos que indicar porque el denominador nunca se puede anular y, al hacer la simplificación de $x - 1$, perdemos dicha información).
Una fracción se anula si y sólo si se anula el numerador, comprobando que las soluciones obtenidas no anulen, también el denominador. Así, la solución de esta ecuación estará en:

$$x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 2}$$

que es válida, porque no anula el denominador.

c) Hallar a para que $Q(x) = ax^3 - 2x^2 + 4$ de -2 de resto al ser dividido entre $x + 2$. *(0,5 puntos)*
Según el *Teorema del Resto*, el resto de dividir $Q(x)$ entre $x + 2$ es $Q(-2)$. Luego buscamos a tal que:

$$Q(-2) = -2 \;\Leftrightarrow\; -8a - 8 + 4 = -2 \;\Leftrightarrow\; -4 + 2 = 8a \;\Leftrightarrow\; -2 = 8a \;\Leftrightarrow\; a = -2/8 \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \boxed{a = -1/4}$$

4) Resolver la inecuación $-2x^3 - 2x^2 + 4 > 0$ *(1 punto)*
Usando la factorización obtenida en el problema anterior:

$$-2x^3 - 2x^2 + 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; -2(x-1)(x^2 + 2x + 2) > 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x^2 + 2x + 2) < 0$$

Como no es posible factorizar más, la única raíz es $x = 1$. Dividiendo $\mathbb{R}$ mediante ella en intervalos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x - 1$	–	0	+
$x^2 + 2x + 2$	+	…	+
$\dfrac{x(x-2)}{x+3}$	–	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No

Lo que nos lleva a concluir que las soluciones son los puntos del intervalo $\boxed{(1, +\infty)}$.

5) Resolver las ecuaciones:

a) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=2+\dfrac{x}{x-2}$ *(1 punto)*

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=2+\frac{x}{x-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{[2(x-2)+x](x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

lo que, siempre que se tenga en cuenta que $x \neq -2,\ 2$, que son los valores que anulan el denominador, equivale a:

$$x^2 - 4x + 4 - (x^2 + 4x + 4) = (2x - 4 + x)(x + 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x - 4 = (3x - 4)(x + 2) \Leftrightarrow -8x = 3x^2 + 6x - 4x - 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 8 + 8x \Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{6} =$$
$$\frac{-10\pm 14}{6} = \left\langle \begin{array}{l} =-4 \\ =2/3 \end{array}\right.$$

Ambas son válidas, porque no anulan los denominadores de la ecuación original (no son –2 ni 2). Las soluciones son, pues: $\boxed{x = -4 \text{ ó } x = 2/3}$.

b) $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1 punto)*

$2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8 \Leftrightarrow 2^{2x}\cdot 2 = 17\cdot 2^x - 8 \Leftrightarrow (2^x)^2\cdot 2 = 17\cdot 2^x - 8$

Haciendo el *cambio de incógnita* $t = 2^x$:

$$2t^2 = 17t - 8 \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{4} = \frac{17\pm 15}{4} = \left\langle \begin{array}{l} =1/2 \\ \ \ 8 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el *cambio*:

- $t = 1/2 \Rightarrow 2^x = 1/2 \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$
- $t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$.

c) $\log x + \log(5 + x) = 2 + \log 3$ *(1 punto)*

$$\log x + \log(5 + x) = 2 + \log 3 \Rightarrow \log x(5 + x) = \log 10^2 + \log 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log x(5 + x) = \log 300 \Rightarrow 5x + x^2 = 300 \Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{2} = \frac{-5\pm 35}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =-20 \\ =15 \end{array}\right.$$

La primera de las soluciones no es válida, porque anula argumentos de logaritmos en la ecuación original, lo que no es posible, ya que sólo existen logaritmos de números estrictamente positivos. Por tanto, la única solución es $\boxed{x = 15}$.

d) $\sqrt{x}+2\sqrt{5+x}=8$ *(1 punto)*

$$\sqrt{x}+2\sqrt{5+x}=8 \Rightarrow (2\sqrt{5+x})^2=(8-\sqrt{x})^2 \Rightarrow 4(5 + x) = 64 + x - 16\sqrt{x} \Rightarrow$$
$$20 + 4x = 64 + x - 16\sqrt{x} \Rightarrow 16\sqrt{x} = 44 - 3x \Rightarrow \text{Elevando al cuadrado: } 256x = 1936 - 264x + 9x^2 \Rightarrow 0 = 9x^2 - 520x + 1936 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{520\pm 448}{18} = \left\langle \begin{array}{l} =4 \\ =448/9 \end{array}\right.$$

Es obligatorio comprobar la validez de las soluciones obtenidas si elevamos al cuadrado los dos miembros en algún paso, lo que hemos hecho dos veces. Haciéndolo, llegamos a la conclusión de que la única solución válida es $\boxed{x = 4}$.

e) $x^4 - 3x^2 + 1 = 5$ *(1 punto)*

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \textit{Cambio } t = x^2\text{: } t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{3} = \frac{3\pm 5}{2} = \langle\begin{matrix} = -1 \\ 4 \end{matrix}$$

Deshaciendo el *cambio*:

- $t = -1 \Rightarrow x^2 = -1$, que no tiene solución en R.
- $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$.

Luego la ecuación tiene las dos soluciones señaladas: -2 y 2.

6) Siendo cotg α = –3, con 90º < α < 270º, hallar, sin calculadora, el resto de las razones trigonométricas de α. A continuación, con la calculadora, dar el valor de α en grados, minutos y segundos. *(1,5 puntos)*

La cotangente es negativa en el II cuadrante, y positiva en el III. Luego el ángulo es del segundo cuadrante, lo que habrá que tener en cuenta a la hora de los signos de las razones.

- $\boxed{\text{tg}\ \alpha =} \dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$
- $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{10} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha =}$ $-\sqrt{\dfrac{9}{10}} = \boxed{-\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\ \alpha =} \cos\alpha\ \text{tg}\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\,\dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}$
- $\boxed{\text{cosec}\ \alpha =} \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \boxed{\sqrt{10}}$
- $\boxed{\sec\alpha =} \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-3/\sqrt{10}} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$
- Como tg α = –1/3 ⇒ según la calculadora, α = – 18,43º. Pero no es del IV, sino del II cuadrante, así que: α = –18,43º + 180º = $\boxed{161^\circ\ 33'\ 54{,}1''}$.