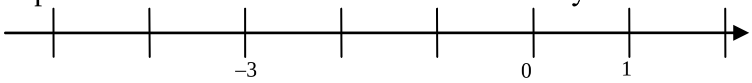
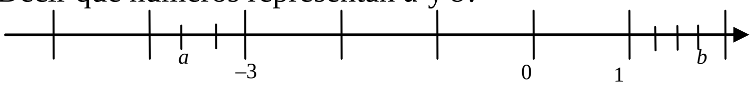
IES Fernando de Herrera **Curso 2012 / 13**
Primer trimestre – 4º ESO **16 de octubre de 2012**
Números reales. Potencias y radicales

NOMBRE: ____

1) a) Representar en una misma recta real: –1’9 y –13/3 *(1 punto)*



b) Decir qué números representan *a* y *b*: *(1 punto)*



2) a) Escribir en forma de intervalo: $\{x \in R \ / \ -1 \leq x < 3\}$ *(0,5 puntos)*

b) Ídem para el conjunto de números comprendidos entre –5 y 0, excluidos ambos. *(0,5 puntos)*

c) Ídem para es $[-3, 0) \cup (-2, 4]$ *(0,5 puntos)*

d) Ídem para es $[-3, 0) \cap (-2, 4]$ *(0,5 puntos)*

3) Expresar en notación científica:
a) $235{,}7 \cdot 10^{-13}$ *(0,5 puntos)*

b) $0{,}0593 \cdot 10^{13}$ *(0,5 puntos)*

c) 9217 *(0,5 puntos)*

d) 0,000000065 *(0,5 puntos)*

4) Simplificar, aplicando propiedades de potencias:

a) $\dfrac{(3^8)^7}{2}\left(\dfrac{3^7}{2^3}\right)^{-6}$ *(1 punto)*

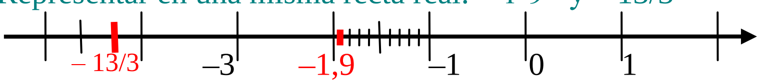
b) $\dfrac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$ *(1 punto)*

5) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias:
a) $2\sqrt{63} - 3\sqrt{28} - 5\sqrt{35}$ *(1 punto)*

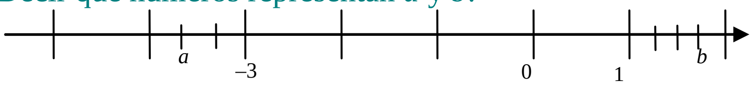
b) Racionalizar: $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) a) Representar en una misma recta real: $-1'9$ y $-13/3$ *(1 punto)*



b) Decir qué números representan *a* y *b*: *(1 punto)*

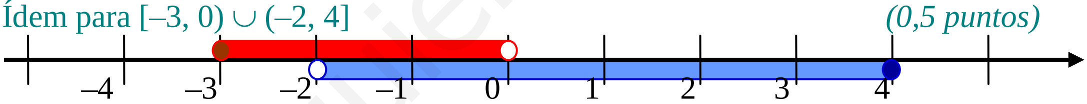


$\boxed{a = -11/3;\ \ b = 7/4}$
El intervalo [– 4, – 3] ha sido dividido en tres partes iguales (mediante dos marcas intermedias), lo que quiere decir que cada parte es un tercio de la unidad. Si empezamos a contar tercios desde 0 hacia el lado negativo de la recta real (hacia la izquierda), llegados a – 3 llevamos – 9/3 = – 3, por lo que dos tercios más hacia la izquierda son – 11/3.
De forma similar, entre 1 y 2 estamos hablando de cuartos de la unidad. 1 = 4/4, por lo que tres marcas más son 7/4.

2) a) Escribir en forma de intervalo: $\{x \in R \ / -1 \le x < 3\}$ *(0,5 puntos)*
$\boxed{[-1, 3)}$ Son todos los números reales comprendidos entre –1 y 3, incluyendo a –1 pero no a 3.

b) Ídem para el conjunto de números comprendidos entre –5 y 0, excluidos ambos.
$\boxed{(-5, 0)}$ *(0,5 puntos)*

c) Ídem para $[-3, 0) \cup (-2, 4]$ *(0,5 puntos)*



[–3, 0) está dibujado en rojo, mientras que (–2, 4] lo está en azul. La *unión* de ambos intervalos está formada por todos los elementos que pertenezcan a alguno de los dos intervalos (lo que incluye a los que están en ambos a a la vez). Por ello:

$$\boxed{[-3, 0) \cup (-2, 4] = [-3, 4]}$$

d) Ídem para $[-3, 0) \cap (-2, 4]$ *(0,5 puntos)*
Razonando sobre el gráfico anterior, la *intersección* resulta ser la zona común a ambos intervalos. Es decir:

$$\boxed{[-3, 0) \cap (-2, 4] = (-2, 0)}$$

Porque hay que hacer notar que $-2 \notin (-2, 4]$ y que $0 \notin [-3, 0)$.

3) Expresar en notación científica:
a) $235{,}7 \cdot 10^{-13} = 2{,}357 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-13} = \boxed{2{,}357 \cdot 10^{-11}}$ *(0,5 puntos)*

b) $0{,}0593 \cdot 10^{13} = 5{,}93 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{13} = \boxed{5{,}93 \cdot 10^{11}}$ *(0,5 puntos)*

c) $9217 = \boxed{9{,}217 \cdot 10^{3}}$ *(0,5 puntos)*

d) $0{,}000000065 = \boxed{6{,}5 \cdot 10^{-8}}$ *(0,5 puntos)*

4) Simplificar, aplicando propiedades de potencias:

a) $\dfrac{(3^8)^7}{2}\left(\dfrac{3^7}{2^3}\right)^{-6}$ *(1 punto)*

$$\frac{(3^8)^7}{2}\left(\frac{3^7}{2^3}\right)^{-6} = \frac{3^{56}}{2}\left(\frac{2^3}{3^7}\right)^{6} = \frac{3^{56}}{2}\,\frac{(2^3)^6}{(3^7)^6} = \frac{3^{56}}{2}\,\frac{2^{18}}{3^{42}} = 3^{56-42}2^{18-1} = \boxed{3^{14}2^{17}}$$

b) $\dfrac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$ *(1 punto)*

$$\frac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}} = \frac{-(2^2)^{26}(2\cdot 3)^{72}}{12^{36}} = -\frac{2^{52}2^{72}3^{72}}{(2^2 3)^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72}}{(2^2)^{36}3^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72-36}}{2^{72}} =$$
$$= -2^{124-72}3^{36} = \boxed{-2^{52}3^{36}}$$

5) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias:

a) $2\sqrt{63}-3\sqrt{28}-5\sqrt{35}$ *(1 punto)*

$$2\sqrt{63}-3\sqrt{28}-5\sqrt{35} = 2\sqrt{3^2 7}-3\sqrt{2^2 7}-5\sqrt{5\cdot 7} = 2\cdot 3\sqrt{7}-3\cdot 2\sqrt{7}-5\cdot\sqrt{35} =$$
$$= 6\sqrt{7}-6\sqrt{7}-5\sqrt{35} = \boxed{-5\sqrt{35}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

$$\frac{1}{5+\sqrt{2}} = \frac{1}{5+\sqrt{2}}\,\frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{5-\sqrt{2}}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5-\sqrt{2}}{25-2} = \boxed{\frac{5-\sqrt{2}}{23}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2012 / 13**
Primer trimestre – 4º ESO **23 de octubre de 2012**
Números reales. Potencias y radicales

NOMBRE: ____

1) a) Escribir en forma de intervalo: $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 < x \le 1\}$ *(1 punto todo el ejercicio)*

b) Ídem para el conjunto de números comprendidos entre –1 y 0, excluidos ambos.

c) Ídem para $[-3, 1) \cup [-2, 4)$

d) Ídem para $[-3, 1) \cap (-2, 4)$

2) Expresar en notación científica: *(2 puntos)*

a) $2975{,}6 \cdot 10^{-910}$

b) $0{,}084 \cdot 10^{130}$

c) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica: $-5{,}13 \cdot 10^{-15}$

d) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica: $-5{,}13 \cdot 10^{15}$

3) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: *(2 puntos)*

a) $\dfrac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}}$

b) $\left(\dfrac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3$

4) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias, y dejando racionalizado el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{\sqrt{3^3}\,\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\,\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[5]{2^2}\,\sqrt[4]{5}}$ *(1 punto)*

b) $\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}}$ *(1 punto)*

c) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

d) $\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}}$ *(0,5 puntos)*

e) $7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *(0,5 puntos)*

5) Calcular sin utilizar la calculadora, con el resultado simplificado: *(1 punto)*

$$\dfrac{\dfrac{81}{243}\,\dfrac{128}{256}+\dfrac{35}{42}}{3-\dfrac{63}{36}}$$

SOLUCIONES

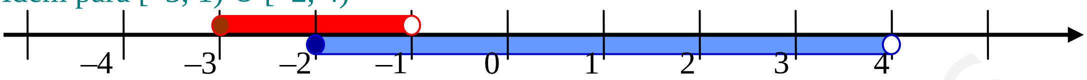
1) a) Escribir en forma de intervalo: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x \leq 1\}$ *(1 punto todo el ejercicio)*

$\boxed{(-3, 1]}$ Son todos los números reales comprendidos entre –3 y 1, excluyendo a –3 e incluyendo a 1.

b) Ídem para el conjunto de números comprendidos entre –1 y 0, excluidos ambos.

$\boxed{(-1, 0)}$.

c) Ídem para $[-3, 1) \cup [-2, 4)$



$[-3, 1)$ está dibujado en rojo, mientras que $[-2, 4)$ lo está en azul. La *unión* de ambos intervalos está formada por todos los elementos que pertenezcan a alguno de los dos intervalos (lo que incluye a los que están en ambos a a la vez). Por ello:

$$\boxed{[-3, 1) \cup [-2, 4) = [-3, 4)}$$

d) Ídem para $[-3, 1) \cap (-2, 4)$

Razonando sobre el gráfico anterior, pero teniendo presente esta vez que –2 no pertenece al segundo de los intervalos, la *intersección* resulta ser la zona común a ambos intervalos. Es decir:

$$\boxed{[-3, 1) \cap (-2, 4) = (-2, 1)}$$

Porque hay que hacer notar que ni – 2 ni – 1 pertenecen a ambos intervalos.

2) Expresar en notación científica: *(2 puntos)*

a) $2975{,}6 \cdot 10^{-910} = 2{,}9756 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-910} = 2{,}9756 \cdot 10^{3-910} = \boxed{2{,}9756 \cdot 10^{-907}}$

b) $0{,}084 \cdot 10^{130} = 8{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{130} = \boxed{8{,}4 \cdot 10^{128}}$

c) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica:

$-5{,}13 \cdot 10^{-15} = \boxed{-0{,}00000000000000513}$

d) Expresar en forma ordinaria el siguiente número escrito en notación científica:

$-5{,}13 \cdot 10^{15} = \boxed{-5130.000.000.000.000}$

3) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: *(2 puntos)*

a) $\dfrac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}}$

$$\frac{6^{43}(-12)^{22}}{-4^{65}} = \frac{(2 \cdot 3)^{43}(12)^{22}}{-(2^2)^{65}} = -\frac{2^{43} \cdot 3^{43}(2^2 3)^{22}}{2^{130}} = -\frac{3^{43} 2^{44} 3^{22}}{2^{130-43}} =$$

$$= -\frac{3^{65} 2^{44}}{2^{87}} = \boxed{-\frac{3^{65}}{2^{43}}}$$

b) $\left(\dfrac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3$

$$\left(\frac{(2+a)^5}{(2+a)^{-2}}\right)^3 = \frac{(2+a)^{5\cdot 3}}{(2+a)^{-2\cdot 3}} = \frac{(2+a)^{15}}{(2+a)^{-6}} = (2+a)^{15-(-6)} = \boxed{(2+a)^{21}}$$

4) Simplificar, aplicando propiedades de radicales y potencias, y dejando racionalizado el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{\sqrt{3^3}\,\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\,\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[5]{2^2}\,\sqrt[4]{5}}$ *(1 punto)*

$$\frac{\sqrt{3^3}\,\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\,\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[5]{2^2}\,\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{3^2 3}\,\sqrt[4]{5^4 5}}{\sqrt{3}\,\sqrt[5]{2^{3+2}}\,\sqrt[4]{5}} = \frac{3\sqrt{3}\,5\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}\,\sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[4]{5}} = \frac{3\cdot 5}{2} = \boxed{\frac{15}{2}}$$

b) $\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{9x^3}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{3^2x^3}}\,\frac{\sqrt[5]{3^3x^2}}{\sqrt[5]{3^3x^2}} = \frac{3\,\sqrt[2\cdot 5]{x^5}\,\sqrt[5\cdot 2]{3^6x^4}}{\sqrt[5]{3^5x^5}} = \frac{3\sqrt[10]{3^6x^9}}{3x} = \boxed{\frac{\sqrt[10]{3^6x^9}}{x}}$$

c) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2\sqrt{2}}\,\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-2^2(\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-4\cdot 2} =$$
$$= \boxed{9+6\sqrt{2}}$$

d) $\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}}$ *(0,5 puntos)*

$$\sqrt{3\sqrt[3]{18a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 3^2 2a^2}} = \boxed{\sqrt[6]{3^5 2a^2}}$$

e) $7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *(0,5 puntos)*

$$7\sqrt{18}+6\sqrt{45}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = 7\sqrt{3^2 2}+6\sqrt{3^2 5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} =$$
$$= 7\cdot 3\sqrt{2}+6\cdot 3\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = 21\sqrt{2}+18\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5} = \boxed{19\sqrt{2}+17\sqrt{5}}$$

5) Calcular sin utilizar la calculadora, con el resultado simplificado: *(1 punto)*

$$\frac{\frac{81}{243}\,\frac{128}{256}+\frac{35}{42}}{3-\frac{63}{36}}$$

$$\frac{\frac{81}{243}\,\frac{128}{256}+\frac{35}{42}}{3-\frac{63}{36}} = \frac{\frac{3^4}{3^5}\,\frac{2^7}{2^8}+\frac{5}{6}}{3-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{\frac{12}{4}-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{6}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2012/13**
Global 1ª evaluación – 4º ESO **28 de noviembre de 2012**

NOMBRE ____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{(-12)^{25}(-3)^4}{(-4)^{19}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*
   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}}$
   c) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$
   d) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$
2) ¿Cuánto suman los 1000 primeros números pares (2 + 4 + 6 + ...)? *(1 punto)*
3) ¿Cuánto suman las 30 primeras potencias de 2 (es decir: $2^1 + 2^2 + ... + 2^{30}$)? Para este ejercicio, no se puede usar la calculadora, a menos que se encuentre una fórmula que simplifique el proceso. *(1 punto)*
4) Realizar: *(2 puntos)*
   a) Expresar $\log_2 x$ en función de $\ln x$.
   b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_3 243$.
   c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:
   $$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$
   d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3 \log x - \log y + \dfrac{2}{3}\log z + 1$
5) a) Para $P(x) = x^4 + mx^3 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.
   b) Indicar, como consecuencia de lo anterior, aplicando el Teorema del Resto, un polinomio $Q(x)$ de grado 1 entre el que sea divisible $P(x)$.
   c) Efectuar dicha división, e indicar dividendo, divisor, cociente y resto.
   d) Por último, realizar la prueba correspondiente a la división efectuada. *(2 puntos)*
6) Factorizar $P(x) = 8x^3 - 18x^2 + 7x + 3$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{(-12)^{25}(-3)^4}{(-4)^{19}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*

Para todos estos ejercicios, simplemente aplicamos propiedades de potencias y de raíces, recogidas en las *fórmulas fundamentales* publicadas en nuestra web, y las *operaciones con radicales*, que también están en la web.

$$\frac{(-12)^{25}(-3)^4}{(-4)^{19}(-9)^{30}} = \frac{-12^{25}\,3^4}{-4^{19}\,9^{30}} = \frac{12^{25}\,3^4}{4^{19}\,9^{30}} = \frac{(3\cdot 2^2)^{25}\,3^4}{(2^2)^{19}\,(3^2)^{30}} = \frac{3^{25}(2^2)^{25}\,3^4}{2^{38}\,3^{60}} =$$

$$= \frac{2^{50}}{2^{38}\,3^{60-25-4}} = \boxed{\frac{2^{12}}{3^{31}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^6a^2}}{a\sqrt{a^2a}} = \frac{a^2\sqrt[3]{a^2}}{aa\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}\sqrt[6]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[6]{a^7}}{a} =$$

$$= \frac{a\sqrt[6]{a}}{a} = \boxed{\sqrt[6]{a}}$$

c) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3a}} = \sqrt[12]{a^4} = \boxed{\sqrt[3]{a}}$$

d) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$

$$\frac{3}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2\sqrt{2}}\,\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-2^2(\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-4\cdot 2} =$$

$$= \frac{9+6\sqrt{2}}{9-8} = \boxed{9+6\sqrt{2}}$$

En este problema hay que advertir de varias circunstancias. En primer lugar, el método estándar para conseguir racionalizar un denominador en el que aparecen dos sumandos con raíces cuadradas en ellos consiste en multiplicar numerador y denominador por el conjugado de dicho denominador.

En segundo lugar, en el resultado final, similar a algunos intermedios, no podemos efectuar 9 + 6, porque el segundo sumando no es 6, sino $6\sqrt{2}$.

En tercer lugar, no podríamos simplificar los 3 del enunciado, y otros similares de los distintos pasos, porque *en una división no se pueden simplificar sumandos ni parte de sumandos, sino sólo factores*.

2) ¿Cuánto suman los 1000 primeros números pares (2 + 4 + 6 + ...)? *(1 punto)*

Tenemos que efectuar 2 + 4 + 6 + 8 + ... Se trata de la suma de 1000 términos es progresión aritmética, donde el primer término es $a_1 = 2$ y la diferencia, $d = 2$. Así, el último término es:

$$a_{1000} = a_1 + (1000-1)d = 2 + 999\cdot 2 = 2000$$

La suma solicitada es, entonces:

$$s_{1000} = \frac{a_1 + a_{1000}}{2}1000 = \frac{2+2000}{2}1000 = \frac{2002}{2}1000 = 1001\cdot 1000 = \boxed{1.001.000}$$

3) ¿Cuánto suman las 30 primeras potencias de 2 (es decir: 21 + 22 + ... + 230)? Para este ejercicio, no se puede usar la calculadora, a menos que se encuentre una fórmula que simplifique el proceso. *(1 punto)*
Aquí nos encontramos frente a una suma de 30 términos en progresión geométrica, con $a_1 = 2$, $r = 2$. Por tanto:

$$s_{30} = \frac{a_1(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{2(2^{30}-1)}{2-1} = \boxed{2.147.483.646}$$

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Expresar $\log_2 x$ en función de $\ln x$.
Simplemente, aplicamos la fórmula de cambio de base en logaritmos:

$$\boxed{\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_3 243$.

$$\log_3 243 = x \iff 3^x = 243 \iff 3^x = 3^5 \iff \boxed{x = 5}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$

$$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} \Rightarrow \log A = \log \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} = \log 10x^5\sqrt{y} - \log \sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log 10 + \log x^5 + \log \sqrt{y} - \frac{1}{3}\log z^2 = \boxed{1 + 5\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3\log x - \log y + \frac{2}{3}\log z + 1$

$$\log A = \log x^3 + \frac{1}{3} 2\log z + \log 10 - \log y = \log 10 + \log x^3 + \frac{1}{3}\log z^2 - \log y =$$

$$= \log 10x^3 + \log \sqrt[3]{z^2} - \log y = \log \frac{10x^3\sqrt[3]{z^2}}{y} \Rightarrow \boxed{A = \frac{10x^3\sqrt[3]{z^2}}{y}}$$

5) a) Para $P(x) = x^4 + mx^3 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(2 puntos)*
Tener una raíz en $x = -1$ significa, por definición, que $P(x) = 0$ en $x = -1$:

$$P(-1) = (-1)^4 + m(-1)^3 + 1 = 1 - m + 1 = -m + 2 = 0 \iff \boxed{m = 2}$$

Consecuentemente, $P(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

b) Indicar, como consecuencia de lo anterior, aplicando el Teorema del Resto, un polinomio $Q(x)$ de grado 1 entre el que sea divisible $P(x)$.
Por el Teorema del Resto, si $P(-1) = 0$, entonces $P(x)$ es divisible entre $x - (-1) = x + 1$. Por tanto, $\boxed{Q(x) = x + 1}$.

c) Efectuar dicha división, e indicar dividendo, divisor, cociente y resto.
Efectuamos la división por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & & -1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Dividendo:	$P(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
divisor:	$Q(x) = x + 1$
Cociente:	$C(x) = x^3 + x^2 – x + 1$
Resto:	$R = 0$

d) Por último, realizar la prueba correspondiente a la división efectuada.

$$Q(x)\cdot C(x) + R = (x + 1)(x^3 + x^2 – x + 1) + 0 = x^4 + x^3 – x^2 + x + x^3 + x^2 – x + 1 =$$
$$= \boxed{x^4 + 2x^3 + 1}$$

6) Factorizar $P(x) = 8x^3 – 18x^2 + 7x + 3$ *(2 puntos)*

Comenzamos probando divisores positivos y negativos del término independiente 3:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 8 & -18 & 7 & 3 \\
1 & & 8 & -10 & -3 \\
\hline
 & 8 & -10 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

No encontramos fácilmente un divisor exacto, por lo que probamos a encontrar las raíces del polinomio $8x^2 – 10x – 3$ igualándolo a 0 y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$8x^2 – 10x – 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{10-14}{16} = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{10+14}{16} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Conocemos las dos raíces de este polinomio de segundo grado. Por el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios: $8x^2 – 10x – 3 = 8(x + 1/4)(x – 3/2)$. La factorización del polinomio de partida es, pues:

$$\boxed{8x^3 – 18x^2 + 7x + 3 = 8(x – 1)(x + 1/4)(x – 3/2)}$$

NOMBRE ____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{(-12)^{29}(-3)^4}{(-4)^{21}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*
   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a\sqrt{a^3}}$
   c) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$
   d) $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$
2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 0.71$; $a_2 = 0.0071$; $a_3 = 0.000071$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 0.01 para obtener el que le sigue. Se pide:
   a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuánto suman los infinitos términos de esta sucesión? *(0,5 puntos)*
   c) ¿Podría decir una consecuencia relativa al resultado? *(0,5 puntos)*
3) En una progresión aritmética se tiene: $a_1 = 300$ y $a_{43} = 930$. Hallar d. *(1,5 puntos)*
4) Realizar: *(2 puntos)*
   a) Relacionar $\log_3 x$ con $\ln x$.
   b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular x sabiendo que $\log_x 125 = 3$.
   c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:
   $$A = \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$
   d) Quitar logaritmos en: $\log A = 4\log x - \dfrac{2}{3}\log z + 2 + \dfrac{1}{2}\log y$
5) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*
6) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{(-12)^{29}(-3)^4}{(-4)^{21}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*

$$\frac{(-12)^{29}(-3)^4}{(-4)^{21}(-9)^{30}}=\frac{-12^{29}\,3^4}{-4^{21}\,9^{30}}=\frac{12^{29}\,3^4}{4^{21}\,9^{30}}=\frac{(3\cdot 2^2)^{29}\,3^4}{(2^2)^{21}\,(3^2)^{30}}=\frac{3^{29}(2^2)^{29}\,3^4}{2^{42}\,3^{60}}=$$
$$=\frac{2^{58}}{2^{42}\,3^{60-29-4}}=\boxed{\frac{2^{16}}{3^{27}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a\sqrt{a^3}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a\sqrt{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{a^6a}}{a\sqrt{a^2a}}=\frac{a^2\sqrt[3]{a}}{aa\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}\;\sqrt{a}}{\sqrt{a}\;\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}\,\sqrt[6]{a^3}}{a}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}}$$

c) $\sqrt[5]{a\,\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt[5]{a\,\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3a}}=\sqrt[15]{a^4}$$

d) $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2}{4-2\sqrt{3}}\,\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{2(4+2\sqrt{3})}{4^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16-2^2(\sqrt{3})^2}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16-4\cdot 3}=$$
$$=\frac{4(2+\sqrt{3})}{4}=\boxed{2+\sqrt{3}}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 0.71$; $a_2 = 0.0071$; $a_3 = 0.000071$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 0.01 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,5 puntos)*
Es una *progresión geométrica* con $a_1 = 0.71$ y razón $r = 0.01$

b) ¿Cuánto suman los infinitos términos de esta sucesión? *(0,5 puntos)*
La suma de infinitos términos de una progresión geométrica de razón positiva menor que 1 es:

$$s=\frac{a_1}{1-r}=\frac{0.71}{1-0.01}=\frac{0.71}{0.99}=\boxed{\frac{71}{99}}$$

c) ¿Podría decir una consecuencia relativa al resultado? *(0,5 puntos)*
Tenemos la *fracción generatriz* de $\boxed{0.717171... = 71/99}$

3) En una progresión aritmética se tiene: $a_1 = 300$ y $a_{43} =930$. Hallar d. *(1,5 puntos)*

$$a_n = a_1 + (n-1)d \;\Rightarrow\; a_{43} = a_1 + (43-1)d \;\Rightarrow\; 930 = 300 + 42d \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \boxed{d = (930-300)/42 = 15}$$

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Relacionar $\log_3 x$ con $\ln x$.

$$\text{Como } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Rightarrow \boxed{\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular x sabiendo que $\log_x 125 = 3$.

$$\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$

$$\log A = \log \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} = \log(100x^4\sqrt{y}) - \log\sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log 100 + \log x^4 + \log\sqrt{y} - \frac{1}{3}\log z^2 =$$

$$= \boxed{2 + 4\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = 4\log x - \frac{2}{3}\log z + 2 + \frac{1}{2}\log y$

$$\log A = 4\log x - \frac{2}{3}\log z + 2 + \frac{1}{2}\log y = 4\log x + 2 + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z =$$

$$= \log x^4 + \log 100 + \log\sqrt{y} - \log\sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log(x^4 100\sqrt{y}) - \log\sqrt[3]{z^2} = \log\frac{x^4 100\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{x^4 100\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}}$$

5) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*

Según el Teorema del Resto, el resto de dividir $P(x)$ entre $x + 2$ es $P(-2)$. Como este resto debe valer 0 para que la división sea exacta:

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow 2(-8) - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow -16 + 2 = 2m \Leftrightarrow -14 = 2m \Leftrightarrow \boxed{m = -7}$$

Por lo que $\boxed{P(x) = 2x^3 - 7x + 2}$

6) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$ *(2 puntos)*

$24^2 = 576$. Probando, por Ruffini:

	27	21	– 11	– 5
– 1		– 27	6	– 5
	27	– 6	– 5	0

No encontramos cómo seguir, pero al tener un polinomio de segundo grado, para encontrar sus raíces podemos optar por igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$27x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+540}}{54} = \frac{6 \pm \sqrt{576}}{54} = \frac{6 \pm 24}{54} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-18}{54} = -\frac{1}{3} \\ = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} \end{array} \right.$$

Como consecuencia, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios:

$$\boxed{P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5 = 27(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{5}{9})}$$