NOMBRE: ____

1) Nombrar los principales conjuntos numéricos, explicitando cuáles son sus elementos y las relaciones de inclusión entre ellos (es decir, qué conjunto es subconjunto de cuál), y la intersección de Q con I.
2) Hallar las fracciones generatrices de:
   a) 3,2919191... b) 3,296229622296...
3) a) Representar en la recta real: $-\dfrac{417}{5}$
   b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?

4) Calcular el resultado simplificado de:

$$\frac{5\frac{14}{25}\frac{5}{28}-\frac{64}{384}\frac{70}{35}}{6-\frac{5}{6}}31-29$$

5) a) Calcular: $[-5, 3) \cap (-6, 2]$
   b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, -4 < x \leq 12\}$ y $B = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > 3\}$
6) Escribir en notación científica: a) $43{,}91\cdot 10^{-3}$ b) 0,00004391 c) $4391\cdot 10^{6}$
7) Simplificar: $\dfrac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-19}$
8) Simplificar: $\dfrac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}$ *(1,5 puntos)*
9) Simplificar: $\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Nombrar los principales conjuntos numéricos, explicitando cuáles son sus elementos y las relaciones de inclusión entre ellos (es decir, qué conjunto es subconjunto de cuál), y la intersección de Q con I.

Números naturales: N = {0, 1, 2, 3, ..., 10, 11, ...}
Números enteros: Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ..., 10, 11, ...}
Números racionales: Q = {a/b, siendo a, b $\in$ Z} (números que se pueden expresar como fracción)
Números irracionales: I = {números que no se pueden expresar como fracción}
Números reales: R = Q $\cup$ I
N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ R; I $\subset$ R; además: Q $\cap$ I = $\varnothing$

2) Hallar las fracciones generatrices de:
a) 3,2919191...
$x = 3{,}2919191...$
$$1000x = 3291{,}919191...$$
$$10x = 32{,}919191...$$
$$990x = 3259$$
Por tanto: $\boxed{x = \dfrac{3259}{990}}$

b) 3,296229622296...
Este número tiene infinitas cifras decimales no periódicas $\Rightarrow$ Es irracional $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No se puede expresar como fracción}}$.

3) a) Representar en la recta real: $-\dfrac{417}{5}$

Si dividimos 417 entre 5 nos resulta un dividendo entero igual a 83 con 2 de resto. Esto significa que $-\dfrac{417}{5} = -83-\dfrac{2}{5}$. Así que avanzamos 83 unidades en sentido negativo sobre la recta real y seguimos 2/5 más, esto es, dividimos el trozo entre –84 y –83 en 5 partes iguales (cuatro marcas intermedias) y tomamos la segunda contando de derecha a izquierda (porque avanzamos en sentido negativo, o sea, decreciendo.

b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?

El tramo entre –17 y –16 (que es una unidad) está dividido en 6 partes iguales (mediante 5 marcas intermedias). Nuestro número es la 5ª de estas marcas contando en sentido negativo (decreciente, hacia la izquierda), por lo que se trata de –5/6 más a la izquierda que –16. Luego es:
$$-16-\frac{5}{6} = \boxed{-\frac{101}{6}}$$

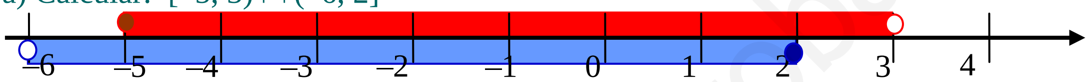
4) Calcular el resultado simplificado de:
$$\frac{5\dfrac{14}{25}\dfrac{5}{28}-\dfrac{64}{384}\dfrac{70}{35}}{6-\dfrac{5}{6}}31-29$$

Es muy recomendable simplificar lo antes posible. Y esto consiste en dividir un *factor* (no sumando ni parte de sumando, sino un número que esté multiplicando) del numerador y otro del denominador entre un mismo número, sustituyendo cada uno de ellos por el resultado de dicha división (esto es la *propiedad fundamental de las fracciones*). Recordar que no es posible realizar 31 – 29, puesto que 31 no es un sumando, sino *parte* del primer sumando:

$$\frac{5\frac{14}{25}\frac{5}{28}-\frac{64}{384}\frac{70}{35}}{6-\frac{5}{6}}31-29 = \frac{1\frac{1}{5}\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\frac{2}{1}}{\frac{36}{6}-\frac{5}{6}}31-29 = \frac{\frac{1}{1}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{1}}{\frac{31}{6}}31-29 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{31}{6}}31-29 =$$

$$= \frac{\frac{3-2}{6}}{\frac{31}{6}}31-29 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{31}{6}}31-29 = \frac{1\cdot 6}{31\cdot 6}31-29 = \frac{1}{31}31-29 = 1-29 = \boxed{-28}$$

5) a) Calcular: $[-5, 3) \cap (-6, 2]$



A la vista del gráfico, como la intersección de dos conjuntos (y los intervalos lo son), es un nuevo conjunto que contiene los elementos que están en los conjuntos iniciales a la vez, tenemos que: $\boxed{[-5, 3) \cap (-6, 2] = [-5, 2]}$.

b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, -4 < x \le 12\}$ y $B = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > 3\}$

Según las definiciones de intervalo:

$\boxed{A = \{x \in \mathrm{R} \,/\, -4 < x \le 12\} = (-4, 12]}$ (no entra –4 pero sí 12)

$\boxed{B = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)}$ (no entra ni 3 ni +∞, que no es un número)

6) Escribir en notación científica: a) $43{,}91\cdot 10^{-3}$ b) 0,00004391 c) $4391\cdot 10^{6}$

Convertimos el número que está en notación habitual a notación científica y multiplicamos, después, las potencias de 10, en sus casos:

$43{,}91\cdot 10^{-3} = 4{,}391\cdot 10\cdot 10^{-3} = \boxed{4{,}391\cdot 10^{-2}}$

$0{,}00004391 = \boxed{4{,}391\cdot 10^{-5}}$

$4391\cdot 10^{6} = 4{,}391\cdot 10^{3}\cdot 10^{6} = \boxed{4{,}391\cdot 10^{9}}$

7) Simplificar: $\dfrac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-19}$

Cuando un signo – está elevado a un exponente impar, el resultado final de la operación es negativo. Así, aplicando propiedades de potencias:

$$\frac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-19} = \frac{-7^{40}(2\cdot 3\cdot 7)^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{2}{3}\right)^{19} = -\frac{7^{40}\cdot 2^{22}\cdot 3^{22}\cdot 7^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{2^{19}}{3^{19}}\right) =$$

$$= \frac{7^{62}\cdot 2^{2}\cdot 3^{22}}{1}\frac{2^{19}}{3^{19}} = \boxed{7^{62}\cdot 2^{21}\cdot 3^{3}}$$

8) Simplificar: $\dfrac{2a\sqrt[3]{2a^{2}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}$ *(1,5 puntos)*

La expresión final debe estar con el denominador racionalizado, los radicales simplificados, los exponentes positivos y, preferiblemente, sin paréntesis ni exponentes fraccionarios. Así:

$$\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}=\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^3 2a}}}=\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[6]{2a^4}}\frac{\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^5a^2}}=\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^6a^6}}=\frac{2a\sqrt[6]{2^2a^4}\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^6a^6}}=$$

$$=\frac{2a\sqrt[6]{2^7a^6}}{2a}=a\sqrt[6]{2^6 2}=\boxed{2a\sqrt[6]{2}}$$

9) Simplificar: $\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$ *(1,5 puntos)*

Usando las propiedades de potencias y radicales, así como igualdades notables, tenemos:

$$\frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}=\frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\frac{2-3\sqrt{3}}{2-3\sqrt{3}}=\frac{\left(2-3\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2^2-2\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}+\left(3\sqrt{3}\right)^2}{4-3^2\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{4-12\sqrt{3}+9\cdot 3}{4-9\cdot 3}=\frac{4-12\sqrt{3}+27}{4-27}=\frac{31-12\sqrt{3}}{-23}=\boxed{-\frac{31-12\sqrt{3}}{23}}$$

NOMBRE: ____

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, dejando el resultado sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

 a) $\dfrac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}}$ *(0,7 puntos)*

 b) $\dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{a}\sqrt[4]{32a^3}}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}}$ *(0,6 puntos)*

 c) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ *(0,7 puntos)*

2) Hallar m para que el resto de la división de $P(x) = mx^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$ entre $x + 2$ sea -3.

3) a) Factorizar los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^4 - 9x^3 - 3x + 9$; $Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$.

 b) Resolver la ecuación: $\dfrac{3x^4-9x^3-3x+9}{2x^3+8x^2+2x-12} = 0$

4) Realizar:

 a) Expresar $\log_8 x$ en función de $\ln x$.

 b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_8 \dfrac{1}{64}$.

 c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

 $A = \dfrac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[5]{z^3}}$

 d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3\log x - \log y + \dfrac{2}{3}\log z - 1$

5) Calcular la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 10000. Para ello, calcular previamente cuál es el primer múltiplo de 59 mayor que 1000 y cuál es el último múltiplo de 59 menor que 10000.

SOLUCIONES

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, dejando el resultado sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

a) $\dfrac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}}$ *(0,7 puntos)*

$$\frac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}} = \frac{-6^{43}3^{-51}}{8^{19}3^{60}} = -\frac{(2\cdot 3)^{43}3^{-51}}{(2^3)^{19}3^{60}} = -\frac{2^{43}\cdot 3^{43}3^{-51}}{2^{57}3^{60}} =$$

$$= -\frac{1}{2^{57-43}3^{60-43+51}} = \boxed{-\frac{1}{2^{14}3^{68}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{a}\sqrt[4]{32a^3}}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}}$ *(0,6 puntos)*

$$\frac{\sqrt{a^3\sqrt{a}\sqrt[4]{32a^3}}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{a^6a}\sqrt[4]{2^5a^3}}}{\sqrt[6]{2^6a^5b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^7}\sqrt[4]{2^5a^3}}{\sqrt[6]{2^6a^5b^3}}\frac{\sqrt[6]{ab^3}}{\sqrt[6]{ab^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^7 2^5 a^3}\sqrt[6]{ab^3}}{\sqrt[6]{2^6a^6b^6}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{2a^{10}}\sqrt[6]{ab^3}}{2ab} = \frac{2a^2\sqrt[4]{2a^2}\sqrt[6]{ab^3}}{2ab} = \frac{a\sqrt[12]{2^3a^6}\sqrt[12]{a^2b^6}}{b} = \frac{a\sqrt[12]{2^3a^6a^2b^6}}{b} =$$

$$= \boxed{\frac{a\sqrt[12]{2^3a^8b^6}}{b}}$$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ *(0,7 puntos)*

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{3^2(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{9.2-3} = \frac{18-6\sqrt{6}+3}{18-3} = \frac{21-6\sqrt{6}}{15} = \frac{3(7-2\sqrt{6})}{15} =$$

$$= \boxed{\frac{7-2\sqrt{6}}{5}}$$

2) Hallar m para que el resto de la división de $P(x) = mx^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$ entre $x + 2$ sea -3.

Según el Teorema del Resto, el resto de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es $P(-2)$. Por tanto:

$$-3 = P(-2) = m(-2)^5 - 2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 1 = -32m - 32 - 24 - 1 = -32m - 57 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32m = 3 - 57 \Rightarrow 32m = -54 \Rightarrow m = -54/32 \Rightarrow \boxed{m = -27/16}$$

3) a) Factorizar los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^4 - 9x^3 - 3x + 9$; $Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$.

Factorizamos, en primer lugar, $P(x)$:

	3	– 9	0	– 3	9
1		3	– 6	– 6	– 9
	3	– 6	– 6	– 9	0
3		9	9	9	
	3	3	3	0	

Para ello, hemos calculado sus raíces por Ruffini, probando divisores enteros, positivos y negativos, del término independiente 9. Recordar que hay que poner un 0 como coeficiente de x^2. Pero llegados a este punto, no encontramos cómo seguir. Así que intentamos factorizar el polinomio igualándolo a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$3x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow \text{(ambos miembros por 1/3): } x^2 + x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

que no tiene solución, puesto que no existe la raíz de un número negativo. Por tanto:

$$\boxed{P(x) = 3x^4 - 9x^3 - 3x + 9 = (x-1)(x-3)(3x^2+3x+3)}$$

A continuación, procedemos con $Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$

	2	8	2	– 12
1		2	10	12
	2	10	12	0
– 2		– 4	– 12	
	2	6	0	
– 3		– 6		
	2	0		

De donde: $\boxed{Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12 = 2(x-1)(x+2)(x+3)}$

b) Resolver la ecuación: $\dfrac{3x^4 - 9x^3 - 3x + 9}{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12} = 0$

$$\frac{3x^4 - 9x^3 - 3x + 9}{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-1)(x-3)(3x^2+3x+3)}{2(x-1)(x+2)(x+3)} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{(x-3)(3x^2+3x+3)}{2(x+2)(x+3)} = 0, \text{ si } x \neq 1,\; x \neq -2,\; x \neq -3$$

porque dichos valores de x anulan el denominador de la ecuación original. Y una fracción se anula cuando y solamente cuando lo hace el numerador pero no el denominador. Así:

$$(x-3)(3x^2+3x+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ 3x^2 + 3x + 3 = 0, \text{sin solución} \end{cases}$$

Luego la única solución es $\boxed{x = 3}$, que es válida porque no anula el denominador de la ecuación original.

4) Realizar:

a) Expresar $\log_8 x$ en función de $\ln x$.

Aplicando la fórmula de cambio de base de logaritmos: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, resulta:

$$\log_8 x = \frac{\log_e x}{\log_e 8} = \boxed{\frac{\ln x}{\ln 8}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_8 \dfrac{1}{64}$.

Llamamos $\log_8(1/64) = x$. El resultado del logaritmo es el exponente, según la definición de logaritmos, lo que significa que:

$$8^x = \frac{1}{64} \iff 8^x = \frac{1}{8^2} \iff 8^x = 8^{-2} \iff \boxed{x = -2}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$A = \dfrac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[5]{z^3}}$

$$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[5]{z^3}} \Rightarrow \log A = \log \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[5]{z^3}} = \log 10x^5\sqrt{y} - \log \sqrt[5]{z^3} =$$

$$= \log 10 + \log x^5 + \log \sqrt{y} - \frac{1}{5}\log z^3 = \boxed{1 + 5\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{3}{5}\log z}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3\log x - \log y + \dfrac{2}{3}\log z - 1$

$$\log A = \log x^3 + \frac{1}{3}2\log z - \log 10 - \log y =$$

$$= \log x^3 + \frac{1}{3}\log z^2 - (\log 10 + \log y) = \log x^3 + \log \sqrt[3]{z^2} - \log 10y =$$

$$= \log\left(x^3\sqrt[3]{z^2}\right) - \log 10y = \log \frac{x^3\sqrt[3]{z^2}}{10y} \Rightarrow \boxed{A = \frac{x^3\sqrt[3]{z^2}}{10y}}$$

5) Calcular la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 10000. Para ello, calcular previamente cuál es el primer múltiplo de 59 mayor que 1000 y cuál es el último múltiplo de 59 menor que 10000.

En primer lugar, calcularemos cuáles son el primer y el último número de la serie.
Dividimos: 1000/59 = 16,95. Luego el primer múltiplo de 59 mayor de 1000 es 17·59 = 1003.
Dividimos: 10000/59 = 169,49. Por lo que el último múltiplo de 59 menor que 10000 es: 169·59 = 9971.

A continuación, tenemos en cuenta que estamos trabajando con una *progresión aritmética*, puesto que, entre la secuencia de múltiplos de 59, cada número es el anterior más 59. De este modo, podemos calcular de cuántos números consta la serie:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 9971 = 1003 + (n-1)59 = 1003 + 59n - 59 = 944 + 59n$$

Como sólo hemos cambiado el segundo miembro de la igualdad, evitamos tener que copiarla completa repetidamente, escribiendo signos "⇒" a cada paso: nos limitamos a escribir que el segundo miembro es igual a la expresión siguiente, de forma que el primer miembro sigue siendo la cabecera de la cadena de igualdades. Despejamos:

$$9971 - 944 = 59n \Rightarrow 9027 = 59n \Rightarrow n = 9027/59 = 153$$

Por tanto, la suma de los 153 términos vale:

$$s_{153} = \frac{a_1 + a_{153}}{2}153 = \frac{1003 + 9971}{2}153 = \boxed{839.511}$$

NOMBRE: ____

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

a) $\dfrac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}}$ *(0,7 puntos)*

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}$ *(0,6 puntos)*

c) $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$ *(0,7 puntos)*

2) a) Factorizar los siguientes polinomios: *(1 punto)*

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4; \quad Q(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

b) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x^4+4x^3-2x-4}{2x^2-5x+3} = 0$ *(1 punto)*

3) Hallar el valor de a para que la división del polinomio $P(x) = ax^4 - 2x^3 - 3x + 2$ entre $x + 2$ tenga como resto -8. *(2 puntos)*

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Expresar $\ln x$ en función de $\log_8 x$.

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_8 \dfrac{1}{512}$.

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{x^3\sqrt{2y}}{10\sqrt[5]{z^2}}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = \dfrac{2}{3}\log x - \log y + 2\log z - 3$

5) ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último, 448 y su suma, 889? *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:

a) $\dfrac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}}$ *(0,7 puntos)*

Si el exponente es impar, positivo o negativo, el resultado de una potencia de base negativa es, también, negativo. Pero si el exponente es par, el resultado de la potencia será positivo. Por otra parte, un *exponente negativo* se convierte en positivo cambiando la potencia completa de un lado a otro de la fracción siempre que dicha potencia sea factor (esté multiplicando). Así:

$$\frac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}}=\frac{-6^{51}}{4^{22}(-8)^{13}}=\frac{-6^{51}}{4^{22}(-8^{13})}=\frac{-6^{51}}{-4^{22}8^{13}}=\frac{6^{51}}{4^{22}8^{13}}=$$

Para poder unificar las potencias, intentamos hacer coincidir las bases:

$$=\frac{6^{51}}{4^{22}8^{13}}=\frac{(2\cdot 3)^{51}}{(2^2)^{22}(2^3)^{13}}=\frac{2^{51}3^{51}}{2^{44}2^{39}}=\frac{3^{51}}{2^{44+39-51}}=\boxed{\frac{3^{51}}{2^{32}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}$ *(0,6 puntos)*

Para introducir un factor en un radical, se multiplica el exponente del factor por el índice del radical. Y la raíz de una raíz (sin nada entre ellas) es otra raíz con el índice resultante de multiplicar los índices originales. Y para racionalizar el denominador, multiplicamos por una raíz del mismo índice con los mismos factores elevados a exponentes tales que, al sumarlos con los de partida, resulten potencias con exponentes múltiplos del índice:

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^2 2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2a^3}}}{\sqrt[5]{2a^3}}=\frac{\sqrt[6]{2a^3}}{\sqrt[5]{2a^3}}=\frac{\sqrt[6]{2a^3}}{\sqrt[5]{2a^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4a^2}}{\sqrt[5]{2^4a^2}}=\frac{\sqrt[6]{2a^3}\sqrt[5]{2^4a^2}}{\sqrt[5]{2^5a^5}}=$$

para multiplicar dos radicales, necesitamos que tengan el mismo índice. Para ello, multiplicamos índice y exponentes por un mismo número:

$$=\frac{\sqrt[30]{2^5a^{15}}\sqrt[30]{2^{24}a^{12}}}{2a}=\frac{\sqrt[30]{2^5a^{15}2^{24}a^{12}}}{2a}=\boxed{\frac{\sqrt[30]{2^{29}a^{27}}}{2a}}$$

c) $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$ *(0,7 puntos)*

Para racionalizar un denominador que contenga raíces cuadradas en una suma o resta, multiplicamos y dividimos por el *conjugado* del denominador:

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}\cdot\frac{2-2\sqrt{3}}{2-2\sqrt{3}}=\frac{(2-2\sqrt{3})^2}{2^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{2^2-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2}{4-2^2(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{4-8\sqrt{3}+4\cdot 3}{4-4\cdot 3}=\frac{4-8\sqrt{3}+12}{4-12}=\frac{16-8\sqrt{3}}{-8}=-\frac{16-8\sqrt{3}}{8}=\frac{-(16-8\sqrt{3})}{8}=$$

$$=\frac{8\sqrt{3}-16}{8}=\frac{8(\sqrt{3}-2)}{8}=\boxed{\sqrt{3}-2}$$

2) a) Factorizar los siguientes polinomios: *(1 punto)*

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4; \quad Q(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

- Factorizamos $P(x)$ por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 2 & 4 & 0 & -2 & -4 \\
1 & & 2 & 6 & 6 & 4 \\
\hline
 & 2 & 6 & 6 & 4 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & -4 & -4 & \\
\hline
 & 2 & 2 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Llegados a este punto, no encontramos cómo seguir. Así que intentamos factorizar el polinomio igualándolo a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$2x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ (Multiplicando ambos miembros por 1/2): $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

que no tiene solución, puesto que no existe la raíz de un número negativo. Por tanto, como no conocemos las 4 raíces posibles del polinomio de grado 4, no es aplicable el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, por lo que la factorización es la que hemos obtenido por *Ruffini*:

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4 = \boxed{(x-1)(x+2)(2x^2+2x+2)}$$

- Factorizamos $Q(x)$. Como es de grado 2, en lugar de probar por Ruffini, lo igualamos a cero y averiguamos sus raíces:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{4}{4} = 1 \\ = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Como conocemos las 2 raíces del polinomio, que es de grado 2, aplicamos el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 3 = \boxed{2(x-1)(x-3/2)}$$

c) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} = 0$ *(1 punto)*

Los dos polinomios los tenemos descompuestos, por lo que podemos simplificar la ecuación:

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)(2x^2+2x+2)}{2(x-1)(x-3/2)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{2(x-1)(x-3/2)} = 0, \text{ si } x \neq 1,\ x \neq 3/2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-3/2)} = 0, \text{ si } x \neq 1,\ x \neq 3/2$$

Como el denominador no se puede anular nunca, no habría que especificar que tiene que ser $x \neq 3/2$, porque ya se ve que hace 0 el denominador; pero hemos de señalar que tiene que ser $x \neq 1$, porque se ha perdido en la simplificación.
Una fracción se hace 0 si y solamente si lo hace el numerador, pero no el denominador. De modo que la solución de esta ecuación son los valores que anulen

el numerador, pero, de ellos, hay que descartar los que también anulen el denominador. En este caso, al haber hecho la simplificación, ya han sido descartados los que anulan también el denominador, pero recordamos la teoría general. Así, la solución la obtendremos de:

$$(x+2)(x^2+x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \\ x^2+x+1=0, \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Lo que se ha resuelto teniendo en cuenta que un producto vale 0 si, y sólo si, alguno de los factores se anula.

Por tanto, la solución final es $\boxed{x=-2}$.

3) Hallar el valor de a para que la división del polinomio $P(x) = ax^4 - 2x^3 - 3x + 2$ entre $x + 2$ tenga como resto –8. *(2 puntos)*

Por el *Teorema del Resto*, el resto de dividir $P(x)$ entre $x-(-2)$ es igual a $P(-2)$. Por tanto, debe ocurrir:

$$P(-2)=-8 \ \Leftrightarrow \ a(-2)^4-2(-2)^3-3(-2)+2=-8 \ \Leftrightarrow \ 16a-2(-8)+6+2=-8 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ 16a+16+8=-8 \ \Leftrightarrow \ 16a+24=-8 \ \Leftrightarrow \ 16a=-8-24 \ \Leftrightarrow \ \boxed{a=-2}$$

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Expresar $\ln x$ en función de $\log_8 x$.

Aplicando la fórmula de cambio de base de logaritmos: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, resulta:

$$\ln x = \boxed{\frac{\log_8 x}{\log_8 e}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_8 \dfrac{1}{512}$.

Llamamos $\log_8(1/512) = x$. El resultado del logaritmo es el exponente, según la definición de logaritmos, lo que significa que:

$$8^x = \frac{1}{512} \ \Leftrightarrow \ (2^3)^x = \frac{1}{2^9} \ \Leftrightarrow \ 2^{3x} = 2^{-9} \ \Leftrightarrow \ 3x=-9 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x=-3}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{x^3\sqrt{2y}}{10\sqrt[5]{z^2}}$$

$$A = \frac{x^3\sqrt{2y}}{10\sqrt[5]{z^2}} \ \Rightarrow \ \log A = \log \frac{x^3\sqrt{2y}}{10\sqrt[5]{z^2}} = \log\ x^3\sqrt{2y} - \log\ 10\sqrt[5]{z^2} =$$

$$= \log x^3 + \log \sqrt{2y} - (\log 10 + \log \sqrt[5]{z^2}) = 3\log x + \frac{1}{2}\log 2y - 1 - \frac{1}{5}\log z^2 =$$

$$= 3\log x + \frac{1}{2}(\log 2 + \log y) - 1 - \frac{2}{5}\log z =$$

$$= 3\log x + \frac{\log 2 + \log y}{2} - 1 - \frac{2}{5}\log z = \boxed{\frac{30\log x + 5\log 2 + 5\log y - 10 - 4\log z}{10}}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = \frac{2}{3}\log x - \log y + 2\log z - 3$

$$\log A = \frac{2}{3}\log x - \log y + 2\log z - 3 = \frac{1}{3}\log x^2 + 2\log z - \log y - 3 =$$

$$= \log\sqrt[3]{x^2} + \log z^2 - (\log y + 3) = \log z^2\sqrt[3]{x^2} - (\log y + \log 10^3) =$$

$$= \log z^2\sqrt[3]{x^2} - \log 10^3 y = \log\frac{z^2\sqrt[3]{x^2}}{10^3 y} \Rightarrow \boxed{A = \frac{z^2\sqrt[3]{x^2}}{10^3 y}}$$

5) ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último, 448 y su suma, 889? *(2 puntos)*

Sabemos que $a_1 = 7$, $a_n = 448$, $s_n = 889$.

La fórmula de la suma de n términos de una p. geométrica es:

$$s_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Sustituyendo nuestros datos:

$$889 = \frac{448r - 7}{r - 1} \Rightarrow 889r - 889 = 448r - 7 \Rightarrow 889r - 448r = 889 - 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 441r = 882 \Rightarrow r = 2$$

Nos piden n. Como la fórmula del término general es: $a_n = a_1 r^{n-1}$, se tiene:

$$448 = 7\cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{448}{7} = 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = n - 1 \Rightarrow \boxed{n = 7}$$