FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1. Polinomios

Un **monomio** es el producto de un número real por una o más letras que pueden estar elevadas a exponentes que sean números naturales. La *suma de los exponentes de las letras* es el **grado** del monomio. A las letras se las llama **indeterminadas** (no como en las ecuaciones, donde se llaman *incógnitas*).

Así:

- $2x^4$ es un monomio de grado 4 y coeficiente 2.
- $-5x$ es un monomio de grado 1 y coeficiente -5.
- x^2y es un monomio de grado 3 y coeficiente 1.
- 7 es un monomio de grado 0 y coeficiente 7.
- $2x^{-3}$ no es un monomio, porque el exponente de la indeterminada x no es un número natural.

Un **polinomio** es una suma de monomios. El **grado** del polinomio es el del monomio de mayor grado de cuantos lo componen.

Así:

- $2x^3 + 5$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada x.
- 7 es un polinomio de grado 0 en la indeterminada x (o en la que nos parezca).
- $3x^2y - 6xy + 1$ es un polinomio de grado 3 en las indeterminadas x e y.

Un polinomio se dice **ordenado** si sus *términos* (sumandos, monomios) están escritos de forma que sus grados sean decrecientes; en caso de empate porque haya más de una indeterminada, los *términos* implicados se ordenan en orden decreciente de grado según una de las indeterminadas. Al término que no contiene ninguna indeterminada se le denomina **término independiente**. Si no aparece, es porque vale 0.

Valor numérico de un polinomio es el resultado de sustituir las indeterminadas por números concretos y efectuar las operaciones. Ejemplo: $P(x, y) = -3x^2y + xy^2 - 2x$. Se trata de un polinomio en las indeterminadas x e y, su grado es 3 y está ordenado. El polinomio es: $-3x^2y + xy^2 - 2x$, es decir, $P(x, y)$ (lo que se lee "*P de x y*") es un *nombre* que damos al polinomio para evitar tener que escribirlo completo cuando nos referimos al mismo. Su *valor numérico* para $x = -2$, $y = -1$ consiste en sustituir dichas indeterminadas por los valores indicados. Por tanto, podemos referirnos a dicho *valor numérico* por $P(-2, -1)$. Y vale:

$$P(-2, -1) = -3(-2)^2(-1) + (-2)(-1)^2 - 2(-2) = 12 - 2 + 4 = 14$$

Si tenemos que calcular los valores numéricos de un mismo polinomio para diferentes valores de las indeterminadas usando la calculadora, conviene usar las memorias de la misma. Así, en el ejemplo que nos ocupa, guardamos -2 en la memoria X y -1 en la Y; introducimos la fórmula del polinomio y pulsamos igual:

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{(-)}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X}}$

$\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{Y}}$

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{(-)}$ 3 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{Y}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{Y}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{=}$

Si tenemos que repetir el cálculo ahora para $x = -4$, $y = 2$, haríamos:

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{(-)}$ 4 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X}}$

2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{Y}}$

$\boxed{\uparrow}$ $\boxed{\uparrow}$ $\boxed{=}$

Obteniendo -104 como resultado. Y lo mismo para otros valores de las indeterminadas.

Observar que, a diferencia de las ecuaciones, los polinomios no contienen ningún signo =.

A partir de ahora, nos limitaremos a polinomios con una única indeterminada x.

Si igualamos a cero un polinomio, nos resulta una ecuación. A las soluciones de dicha ecuación se las llama **raíces** del polinomio.

2. Descomposición factorial de polinomios en una indeterminada

El **Teorema de descomposición factorial de polinomios** sirve para descomponer un polinomio en factores irreducibles, es decir, en polinomios que ya no se puedan descomponer en producto de otros polinomios de grado más pequeño.
Dice lo siguiente: Sea $P(x)$ un polinomio de grado n en la indeterminada x. Si A es el coeficiente del *término* o *monomio* de mayor grado, y conocemos sus n raíces: a_1, a_2, …, a_n, entonces podemos escribirlo como:

$$P(x) = A(x - a_1)\cdot(x - a_2)\cdot \ \dots \ \cdot(x - a_n)$$

Ejemplos

1) Descomponer factorialmente $3x^2 + 5x - 2$.

Igualamos a 0 el polinomio y resolvemos la ecuación resultante:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-5-7}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \\ = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Por tanto, $\boxed{3x^2 + 5x - 2 = 3[x - (-2)]\left(x - \frac{1}{3}\right) = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)}$

Escrito de esta forma, se ve que – 2 y 1/3 son las raíces del polinomio.
Aquí está finalizado el problema. Pero si nos entretenemos en efectuar el producto del segundo miembro, comprobaremos que obtenemos el polinomio inicial (para multiplicar un paréntesis de varios sumandos por otro con, también, varios sumandos, multiplicamos cada sumando del primer paréntesis por todos y cada uno de los sumandos del segundo paréntesis):

$$3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + 2x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{6x}{3} - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + \frac{5x}{3} - \frac{2}{3}\right) =$$
$$= 3x^2 + 5x - 2.$$

Y observar que *omitiendo el coeficiente del término de mayor grado 3, no obtendríamos el polinomio inicial*.

2) Descomponer factorialmente $2x - 1$.

Este polinomio es irreducible, porque es de grado 1: los polinomios de grado 1 no se pueden reducir. Sin embargo, aplicando el teorema:

$$2x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ 2x = 1 \ \Rightarrow \ x = ½. \text{ Por lo que: } \boxed{2x - 1 = 2(x - ½)}.$$

Escrito de esta forma, se ve que ½ es la raíz del polinomio.
Observar que extrayendo 2 factor común en el polinomio inicial hubiéramos obtenido el mismo resultado.

3) Descomponer factorialmente $3x^2 + 6x + 3$.

Calculemos sus raíces:

$$3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{6} = \frac{-6 \pm 0}{6} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-6-0}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \\ \dfrac{-6+0}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{array} \right.$$

Con lo que tenemos que: $\boxed{3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)(x + 1)}$. Observar que la ecuación de segundo grado tiene una única solución pero es *doble*, es decir, se obtiene *dos veces* y, por tanto, es como si tuviera dos raíces. Y esto es esencial para la aplicación del Teorema de Descomposición Factorial.

3. Regla de Ruffini

Cuando el polinomio es de grado 2 es muy fácil encontrar las raíces, pues basta igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante. Pero para polinomios de grado superior podemos usar la regla de Ruffini. La regla de Ruffini ya nos proporciona el polinomio factorizado cuando el resto de la división sea 0.

Ruffini es una regla para dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x - a$. Y no sirve si el polinomio divisor no tiene esta forma. Consiste en lo siguiente:

- En una primera fila, escribimos *los coeficientes* (sólo los coeficientes, sin las x) del polinomio dividendo en orden de grado decreciente; si falta el término de algún grado, se escribe 0 en su lugar.
- El a se escribe en la segunda fila, en la columna de la izquierda, separado.
- En la tercera fila obtendremos los coeficientes del polinomio cociente y el resto. El polinomio cociente es de un grado menos que el polinomio dividendo.
- El proceso consiste en: bajamos el primer número de la primera fila a la tercera fila, tal como está. Lo multiplicamos por a y el resultado lo ponemos bajo el segundo número. Sumamos y repetimos el proceso hasta el final.
- El último número de la tercera fila es el resto de la división.

Mostramos, a continuación, dos ejemplos, en los que aplicamos que *Dividendo es igual a divisor por cociente más resto*:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Dividendo: $D = x^2 - 5x + 6$
Divisor: $d = x - 2$
Cociente: $C = x - 3$
Resto: $R = 0$
$D = d \cdot C + R \Rightarrow$
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) + 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Dividendo: $D = x^2 - 4$
Divisor: $d = x - 2$
Cociente: $C = x + 2$
Resto: $R = 0$
$D = d \cdot C + R \Rightarrow$
$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) + 0$

En estos dos ejemplos la división ha sido *exacta*, porque hemos obtenido 0 como resto. Observar que ello nos proporciona los polinomios factorizados (sumar 0 podemos omitirlo). Y una cuestión de notación: En lugar de usar D para designar al dividendo, deberíamos haber escrito D(x), puesto que el dividendo es un polinomio en la indeterminada x. Igual para d(x), C(x) y R(x), si bien el resto no necesita especificar ninguna indeterminada.

En general, para descomponer en factores un polinomio cualquiera, intentamos buscar un a adecuado (o sea, dividimos entre $x - a$) para que el resto sea 0 y obtener una factorización del polinomio. Para ello *probamos* valores. Pero no cualquier valor, sino sólo divisores positivos y negativos del término independiente del polinomio que queremos factorizar.

4. El Teorema de Descomposición Factorial frente a la Regla de Ruffini

Supongamos que tenemos un polinomio $P(x)$ de grado n. Y supongamos que *conocemos las n raíces* del polinomio, obtenidas por el método que sea. En este caso, la factorización completa nos la proporciona el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*: Será el *coeficiente del término de mayor grado* multiplicado por los factores de la forma $x - a$ correspondientes a *cada una* de las raíces a.

Pero si la descomposición la obtenemos aplicando Ruffini, es decir, aplicando dicha Regla nos ha resultado un resto 0, utilizaremos los resultados de dicha división: $P(x) = d(x)\cdot C(x)$ (recordar que el resto ha sido 0). Y aquí *no hay que preocuparse de poner el coeficiente del término de mayor grado, porque no hemos aplicado el Teorema de Descomposición Factorial*.

Ejemplos

4) Factorizar: $3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$.

Los candidatos posibles para a son todos los divisores positivos y negativos de 18: ±1, ±2, ±3, ±6, ±18. Comenzamos probando el más fácil: 1.

	3	12	3	–18
1		3	15	18
	3	15	18	0

Nos ha servido, porque hemos obtenido resto 0. Hasta aquí, aplicando que *Dividendo = Divisor · Cociente + Resto*, tenemos la siguiente factorización (puesto que el resto es 0):

$$3x^3 + 12x^2 + 3x - 18 = (x - 1)(3x^2 + 15x + 18)$$

Pero vamos a continuar factorizando éste último. Lo habitual es hacerlo en un solo paso, por lo que vamos a escribirlo como sigue. Probamos primero 1, el mismo que teníamos, porque puede volver a salir. *Si probamos un número y no nos sirve, tampoco nos servirá en pasos sucesivos*. Esta vez, desarrollamos el proceso hasta el final:

	3	12	3	–18
1		3	15	18
	3	15	18	0
–2		–6	–18	
	3	9	0	
–3		–9		
	3	0		

Luego la factorización obtenida es: $(x - 1)(x-(-2))(x-(-3))\cdot 3$. El último 3 es lo que queda en la última fila. Es decir:

$$\boxed{3x^3 + 12x^2 + 3x - 18 = 3(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Observar que cuando hemos llegado al final, donde ya hemos conseguido las 3 raíces que puede tener este polinomio de tercer grado, Ruffini nos ha proporcionado la factorización de acuerdo al *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, con el coeficiente del término de mayor grado (3) multiplicando.

5) Factorizar: $x^3 - 3x^2 + 4$.

De forma similar, podemos probar ±1, ±2 y ±4. (Si no nos saliera con ninguno de ellos, no quiere decir que el polinomio sea irreducible: puede que tenga raíces fraccionarias o irracionales, pero no las encontraríamos por Ruffini y habría que emplear otros métodos).

Disponemos los coeficientes de acuerdo a lo que nos dicta el método de Ruffini:

	1	–3	0	4
–1		–1	4	–4
	1	–4	4	0
2		2	–4	
	1	–2	0	
2		2		
	1	0		

Por lo que: $\boxed{x^3 - 3x^2 + 4 = 1\cdot(x+1)(x-2)(x-2)}$.

Importante: Los valores a que se obtienen por Ruffini de esta forma, son las raíces del polinomio. Así, este último polinomio tiene como raíces –1 y 2, ésta última raíz doble. El del problema anterior, tiene como raíces 1, –2 y –3.

Otra observación es que, llegados por Ruffini a un polinomio de grado 2, si no encontramos raíces *probando*, podemos igualar el polinomio a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante, porque puede que tenga raíces fraccionarias o irracionales y por eso no las encontramos.

6) Factorizar: $3x^3 + 2x^2 + 1$.

Importante: Si no conocemos las n raíces del polinomio, no es aplicable el Teorema de Descomposición Factorial. En este caso, valdrá la descomposición que encontremos vía Ruffini. Esto va a suceder en este caso. Probamos por Ruffini:

	3	2	0	1
– 1		– 3	1	– 1
	3	– 1	1	0

No encontramos más raíces (probamos 1 y – 1, que son los divisores positivos y negativos del término independiente 1). Así que buscamos las raíces que nos faltan igualando el polinomio cociente a cero:

$$3x^2 - x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6}$$

Esta ecuación no tiene solución, puesto que el radicando es negativo. Por tanto, este polinomio de segundo grado es irreducible. La mejor factorización posible es, entonces:

$$\boxed{3x^3 + 2x^2 + 1 = (x+1)(\,3x^2 - x + 1)}$$

5. Teorema del Resto

Dice lo siguiente:
"El resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ vale $P(a)$"

Y una consecuencia del mismo es:

"*a* es un *cero* o una *raíz* del polinomio (es decir, $P(a) = 0$) $\Leftrightarrow$ $P(x)$ es divisible entre $x - a$"

Como consecuencia de este Teorema, y de todo lo que ya sabemos, se tiene:

"*a* es solución de la ecuación $P(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$ $\Leftrightarrow$ *a* es un *cero* del polinomio $\Leftrightarrow$ *a* es una *raíz* del polinomio $\Leftrightarrow$ $P(x)$ es divisible entre $x - a$"

Esto nos permite resolver, sin hacer la división, problemas como el siguiente:

7) Hallar el valor de m para que $x^3 - mx^2 + 4$ sea divisible entre $x + 2$.
Según el T. del Resto, eso equivale a decir que -2 es un *cero* o *raíz* del polinomio.
Por tanto:

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 - m(-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -8 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow -4 = 4m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{m = -1}.$$