1. Propiedades de las funciones

- Una **función**, *f*, es una correspondencia entre dos conjuntos numéricos, *A* y *B*, que asocia a cada elemento de *A*, **dominio** de la función, un único elemento de *B*. La función *f* entre *A* y *B* se simboliza como $f: A \rightarrow B$. Si los conjuntos *A* y *B* están formados por números reales, dicha correspondencia se denomina **función real de variable real.**
- El conjunto de los valores de x que tienen imagen por una función, $f(x)$, se denomina **dominio de la función**. El dominio se designa de la forma **Dom *f*.**
- Una función queda definida por la relación algebraica entre x e y, expresada como $y = f(x)$, donde y es la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes, $f(x)$, se llama **recorrido de la función.**
- Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en un punto $x = a$ si alrededor de a todas sus imágenes están muy próximas a $f(a)$.
- La **monotonía** de una función es la propiedad que estudia el crecimiento y decrecimiento de dicha función.
- Una función $y = f(x)$ se llama **par** si es **simétrica con respecto al eje *Y*,** es decir, si cumple que $f(-x) = f(x)$ para todo valor de x.
- Una función $y = f(x)$ se llama **impar** si es **simétrica con respecto al origen de coordenadas,** esto es, si cumple que $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x.
- Una **función es creciente** en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo donde $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Si se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$, la función es **decreciente.**
- Los valores en los cuales la función cambia su monotonía se denominan **extremos relativos**. Si a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, se denomina **máximo relativo,** y si a la izquierda es decreciente y a la derecha es creciente, se denomina **mínimo relativo.**

1 Señala las correspondencias que sean funciones y determina sus dominios y las ecuaciones que las definen:

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
y	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	1	2	3	4	5	6	7

b)

x	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6

c)

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2 Halla el dominio de las siguientes funciones reales de variable real:

a) $y = 3x + 1$ ***b)*** $y = \sqrt{3x + 1}$ ***c)*** $y = \dfrac{\sqrt{3x + 1}}{x}$ ***d)*** $y = \dfrac{1}{3x + 1}$ ***e)*** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x + 1}}$

1. Propiedades de las funciones

Solucionario

1 Son funciones ***a)*** y ***c)***.

a) Dom $f = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; Rec $f = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $y = -x$

c) Dom $f = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$; Rec $f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $y = x - 10$

2 ***a)*** El dominio son todos los números reales.

b) El dominio son los números reales, x, tales que $3x + 1 \geq 0$, es decir, $x \geq -\frac{1}{3}$.

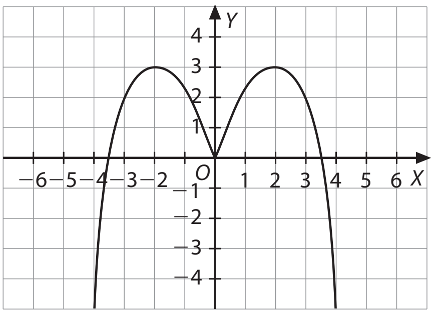
c) El dominio son los números reales, x, tales que $x \geq -\frac{1}{3}$ excluido el 0, que anula el denominador.

d) El dominio son los números reales, x, tales que $3x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -\frac{1}{3}$.

e) El dominio son los números reales, x, tales que $3x + 1 > 0$, es decir, $x > -\frac{1}{3}$.

2. Propiedades de las funciones II

1 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función, así como los máximos, mínimos, simetrías y continuidad:

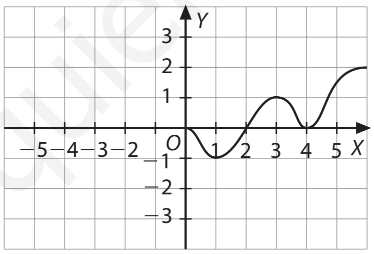


2 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

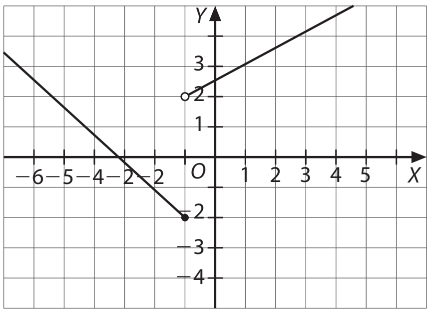
- Su dominio es el intervalo [−2, 8].
- Es constante en el intervalo (−2, 1).
- Es creciente en los intervalos (1, 2) y (4, 5).
- Es decreciente en los intervalos (2, 4) y (5, 8).
- Es continua en su dominio.

Calcula sus máximos y mínimos relativos.

3 Completa la siguiente gráfica para construir dos funciones, una par y otra impar:



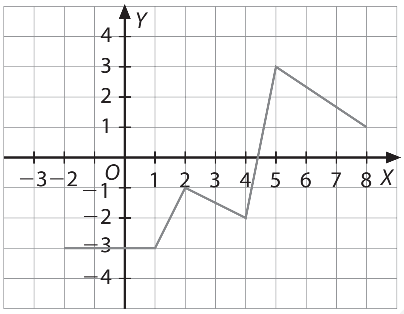
4 Estudia el dominio, el recorrido, la continuidad y la simetría de la función dada correspondiente a esta gráfica.



Solucionario

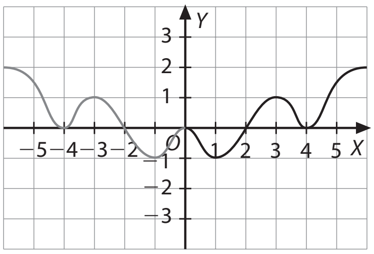
1 Es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$.
Tiene máximos relativos en los puntos $(-2, 3)$ y $(2, 3)$, y mínimos relativos en $(0, 0)$.
Es par, es decir, es simétrica respecto del eje Y.
Es continua en todo su dominio, que son los números reales.

2 Respuesta abierta. La gráfica de una función que cumple esas condiciones es, por ejemplo:

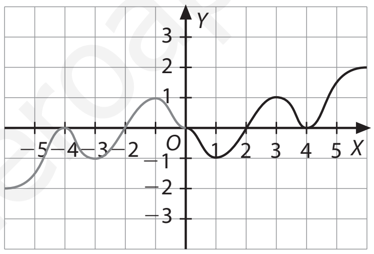


Los máximos relativos son $(2, -1)$ y $(5, 3)$, y el mínimo relativo, $(4, -2)$; sin embargo, las ordenadas de los máximos y mínimos relativos podrían ser otras.

3 **Función par**



Función impar



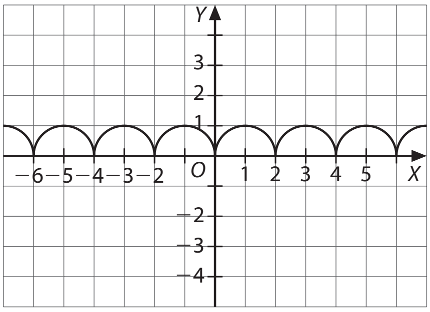
4 Dom $f = \mathbb{R}$. Rec $f = [-2, \infty)$. Continua excepto en $x = -1$. No tiene simetría.

3. Propiedades de las funciones III

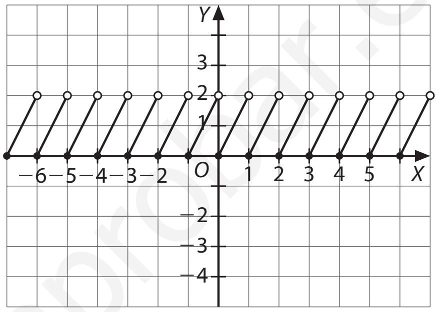
- Una función es **periódica** si existe un número mayor que cero, T, tal que cada T unidades del eje horizontal coinciden las imágenes; es decir: $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T)\dots$
- Decimos que ***x* tiende a** ∞ (se escribe $x \to \infty$) cuando la x puede tomar valores tan grandes como queramos. Análogamente, x puede tender a $-\infty$ ($x \to -\infty$).
- $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = p$ si $f(x) \to p$ cuando $x \to \infty$. Si $f(x) \to p$ cuando $x \to -\infty$, decimos que $f(x)$ posee una asíntota horizontal, $y = p$, cuando x tiende a menos infinito.
- Una función $f(x)$ **tiene asíntota vertical** en $x = a$ si $f(x)$ tiende a infinito o menos infinito cuando x tiende por la izquierda o por la derecha a a.

1 A partir de las siguientes gráficas de funciones determina si son periódicas y en caso afirmativo indica su periodo:

a)

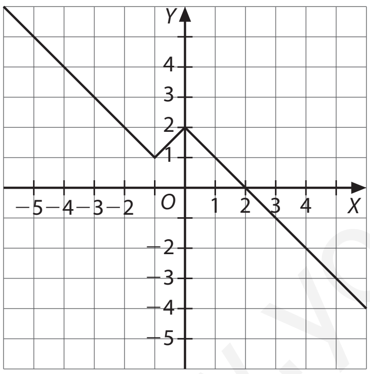


b)

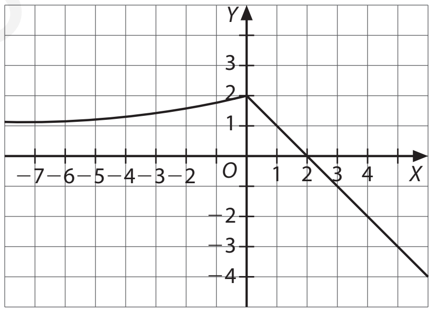


2 A partir de estas gráficas de funciones determina si tienen asíntotas y extremos relativos.

a)



b)



3 Dibuja gráficas de funciones que cumplan:

a) Continua en $\mathbb{R}$, con un mínimo en $x = -2$

b) Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y dos verticales en $x = 1$ y $x = -2$.

c) Continua en $\mathbb{R}$, con un máximo y un mínimo relativo.

3. Propiedades de las funciones III

Solucionario

1 ***a)*** Periódica, de periodo 2.

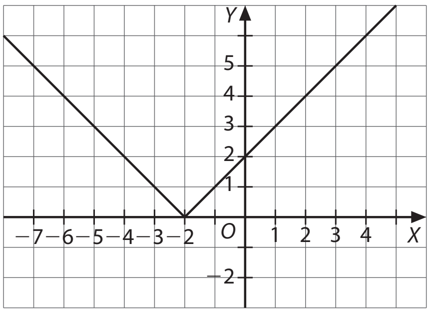
b) Periódica, de periodo 1.

2 ***a)*** Sin asíntotas. Tiene un mínimo relativo en $x = -1$ puesto que en el punto $(-1, 1)$ cambia de decreciente a creciente y un máximo relativo en $x = 0$, puesto que en el punto $(0, 2)$ pasa de creciente a decreciente siendo la función continua en $\mathbb{R}$.

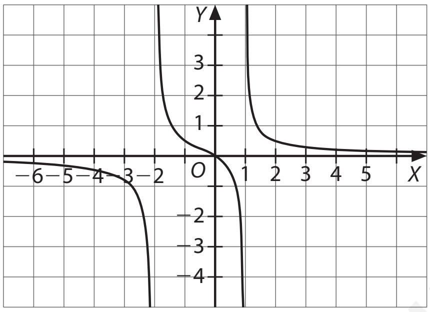
b) Tiene una asíntota horizontal, $y = 1$ puesto que $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 1$. Tiene un máximo relativo en $x = 0$ puesto que en el punto $(0, 2)$ pasa de creciente a decreciente siendo la función continua en $\mathbb{R}$

3 Respuesta abierta. Estos son ejemplos de gráficas de funciones que cumplen las condiciones.

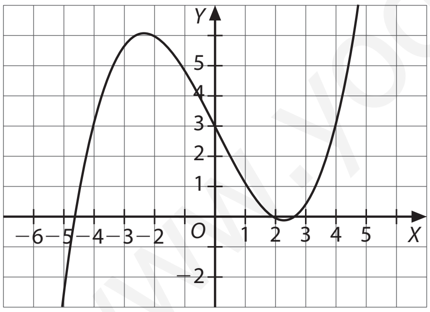
a)



b)

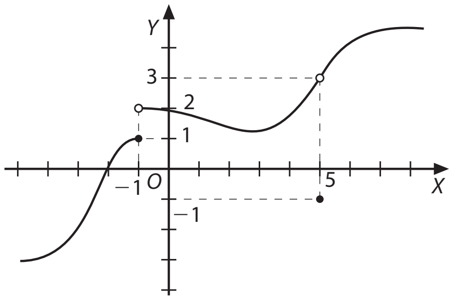


c)



4. Propiedades de las funciones IV

1 A partir de la siguiente gráfica:



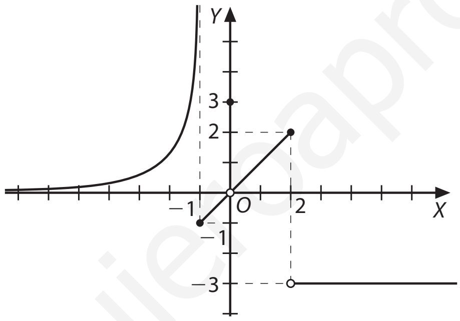
a) Determina su dominio.

b) Halla los límites laterales en $x = -1$.

c) Halla los límites laterales en $x = 5$. ¿Qué te indican esos resultados?

d) Estudia su continuidad.

2 A partir de la siguiente gráfica:



a) Determina su dominio y su recorrido.

b) Halla los límites laterales en $x = -1$.

c) Calcula los límites laterales en $x = 0$. ¿Qué te indican esos resultados?

d) Halla los límites laterales en $x = 2$.

e) Estudia su continuidad.

f) ¿Tiene asíntotas?

3 Halla el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{9}{x^2}} - 1$.

4 Escribe una función con cada una de las siguientes características:

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

b) Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

5 Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ -x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente.

b) Determina su dominio y su recorrido.

c) Estudia su continuidad.

4. Propiedades de las funciones IV

Solucionario

1 ***a)*** Dom $f = \mathbb{R}$

b) Por la izquierda: $x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to 1$. Por la derecha: $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to 2$.

c) Por la izquierda: $x \to 5^- \Rightarrow f(x) \to 3$. Por la derecha: $x \to 5^+ \Rightarrow f(x) \to 3$. El límite es 3. Representa el valor esperado de la función en $x = 5$, pero en vez de ser 3 es -1.

d) Continua en su dominio salvo en $x = -1$ y $x = 5$.

2 ***a)*** Dom $f = \mathbb{R}$. Rec $f = \{-3 \cup [-1, 0) \cup (0, +\infty)\}$.

b) Por la izquierda: $x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$. Por la derecha: $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to -1$.

c) Por la izquierda: $x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to 0$. Por la derecha: $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0$. El límite es 0. Representa el valor esperado de la función en $x = 0$ pero en vez de ser 0 es 3.

d) Por la izquierda: $x \to 2^- \Rightarrow f(x) \to 2$. Por la derecha: $x \to 2^+ \Rightarrow f(x) \to -3$.

e) Continua en su dominio salvo en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

f) Asíntota horizontal: $y = 0$. Asíntota vertical: $x = -1$.

3 Se factoriza el radicando: $\dfrac{-(x+3)\cdot(x-3)}{x^2}$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0) \cup (0, 3)$	$(3, \infty)$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$-$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{-(x+3)\cdot(x-3)}{x^2}$	$-$	$+$	$-$

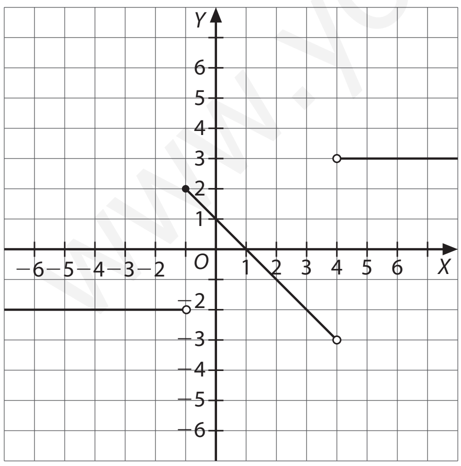
Dom $f = [-3, 0) \cup (0, 3]$

Cuando $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$, además $f(3) = 0$. Como la función solo toma valores positivos y es continua en su dominio, entonces Rec $f = [0, +\infty)$.

4 Respuesta abierta. Estas son unas de las muchas funciones que cumplen las condiciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x+2}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-1}$

5 ***a)***



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$, Rec $f = \{3 \cup (-3, 2]\}$.

c) Continua en su dominio salvo en $x = -1$.

