

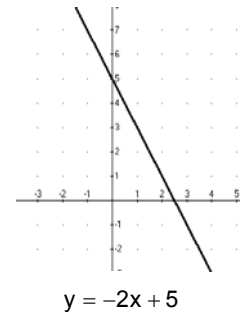
LA RECTA, LA PARÁBOLA Y LA HIPERBOLA

La recta

Una **recta** es una función de la forma $y = mx + n$.

m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen.

La ordenada en el origen nos indica el punto de corte con el eje Y: $(0, n)$



Según el signo de m :

- si $m > 0$ la recta es creciente
- si $m < 0$ la recta es decreciente
- si $m = 0$ la recta es constante y la gráfica es paralela al eje X

Si $n=0$ la recta es de la forma $y = mx$, y la llamaremos **función lineal**. Esta función pasa por el origen de coordenadas.

Si $n \neq 0$ la recta es de la forma $y = mx + n$ y la llamaremos **función afín**.

Dos rectas son paralelas si tiene la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

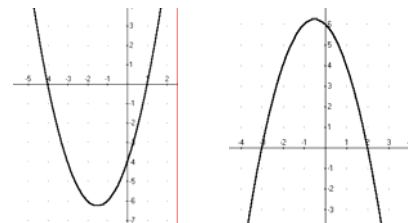
Dos rectas son secantes si tiene distinta pendiente. Para determinar el punto donde se cortan resolveremos el sistema que forman las dos rectas.

La parábola

La función cuadrática o **parábola** es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ tal que $a \neq 0$

La orientación de la parábola depende del signo de a :

- $a > 0$ ramas hacia arriba \rightarrow función cóncava
- $a < 0$ ramas hacia abajo \rightarrow función convexa



El eje de simetría viene dado por la recta $x = \frac{-b}{2a}$

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$g(x) = -x^2 - x + 6$$

El vértice de la parábola tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

La ordenada la determinaremos sustituyendo este valor de x_0 a la función.

Los puntos de corte con el eje de abscisas vienen determinados por las dos soluciones

de la ecuación de segundo grado $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

El punto de corte con el eje de ordenadas viene por el punto $(0, c)$.

Ejercicio 1:

Representa gráficamente la función $f(x) = -2x + 4$

Para dibujar una recta $f(x) = mx + n$ es necesario estudiar la pendiente m que nos dirá si es creciente o decreciente la función.

Determinar el punto de corte con el eje de ordenadas que es $(0, n)$

Determinar dos puntos de la función.

Determinar el punto de corte con el eje de abscisas, $f(x) = 0$. Para ello resolveremos la ecuación $mx + n = 0$

SOLUCIÓN:

La pendiente de la recta es -2 , por tanto la función es decreciente.

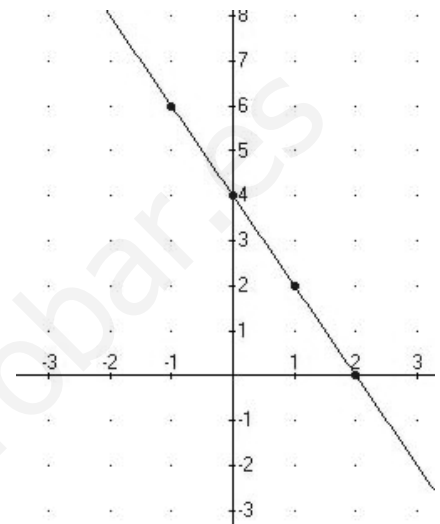
La ordenada en el origen es 4 , por tanto la función corta el eje de ordenadas en el punto $(0, 4)$.

Determinemos dos puntos de la recta

x	f(x)
-1	6
1	2

El punto de corte con el eje de abscisas es:

$f(x) = 0$, $-2x + 4 = 0$, $x = 2$ es decir, el punto $(2, 0)$.



Ejercicio 2:

Sea la función: $y = x^2 - 6x + 5$. Estúdiala y dibújala.

SOLUCIÓN:

Es una parábola con las ramas hacia arriba, porque $a = 1 > 0$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$.

El vértice tiene por abscisa: $x_0 = 3$ y por ordenada: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

Entonces el vértice es el punto $(3, -4)$

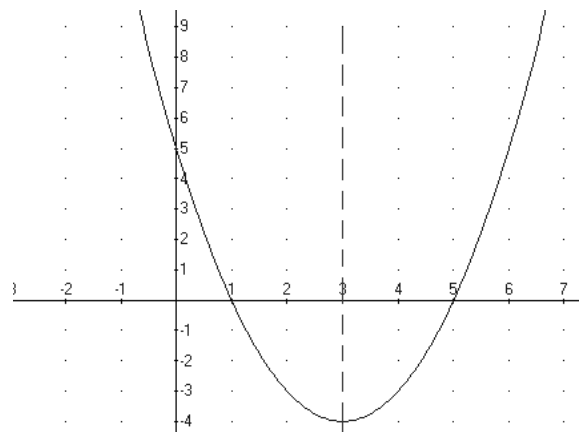
Para determinar los puntos de corte con el eje de abscisas resolvemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Entonces los puntos de corte son: $(5, 0)$ y

$(1, 0)$

El punto de corte con el eje de ordenadas es $(0, 5)$.



Ejercicio 3:

Determina el punto (o los puntos) de intersección de la parábola $y = -x^2 - 2x + 8$ y la recta $y = -x + 6$.

Los puntos de intersección son las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones. Pueden tener 1, 2 o ninguna solución:

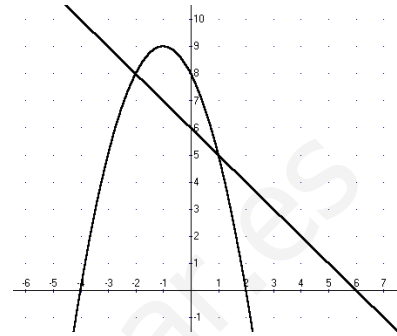
$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 8 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

El resolvemos por igualación de las incógnitas:

$$\begin{cases} -x^2 - 2x + 8 = -x + 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 - x + 2 = 0 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2} \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

El sistema tiene dos soluciones: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

Los puntos de intersección son $A(-2,8)$, $B(1,5)$

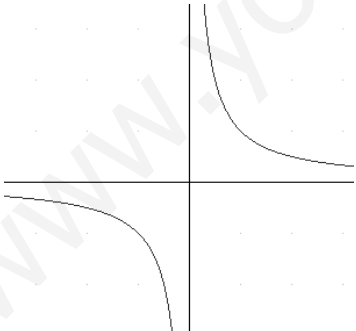
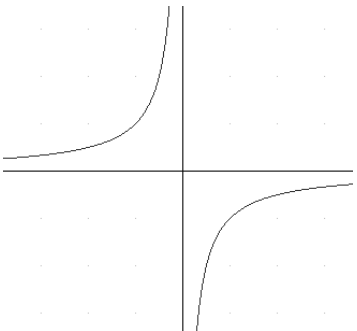


La hipérbola equilátera

Llamamos **función de proporcionalidad inversa** o hipérbola equilátera a la función $y = f(x) = \frac{k}{x}$ tal que k es la razón de proporcionalidad. Notamos que la función cumple $x \cdot y = k$

El dominio de la función es $\mathbb{R} \sim \{0\}$. El recorrido es $\mathbb{R} \sim \{0\}$

Notamos que $f(-x) = -f(x)$. La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Si $k > 0$ la gráfica de la función es de la siguiente forma. La función es decreciente.	Si $k < 0$ la gráfica de la función es de la siguiente forma. La función es creciente.
	

Ejercicio 4:

Determina la relación entre los lados de los rectángulos de área 8cm^2 . Dibuja la gráfica de la función.

Supongamos que los lados son x , y , respectivamente

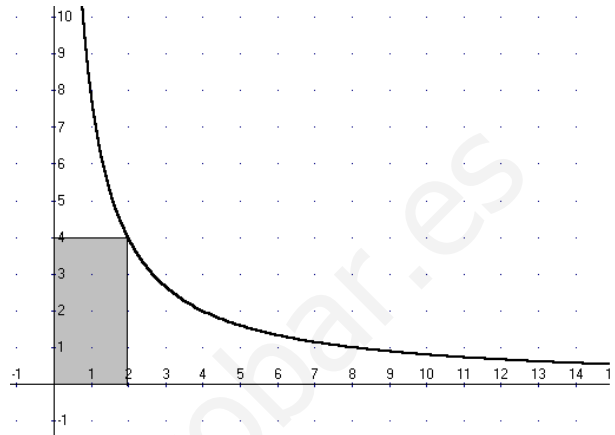
El área del rectángulo es $x \cdot y = 8$.

Esta es la fórmula que relaciona los dos lados.

O bien: $y = \frac{8}{x}$

Para representar la función construimos una tabla:

x	y
0'5	16
1	8
2	4
2'5	3'2
3	8/3
4	2
5	1'6
8	1
10	0'8



La función es una hipérbola equilátera de constante $k = 8$

Ejercicio 5:

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

La función es una hipérbola equilátera. La constante de proporcionalidad es $k = -2$

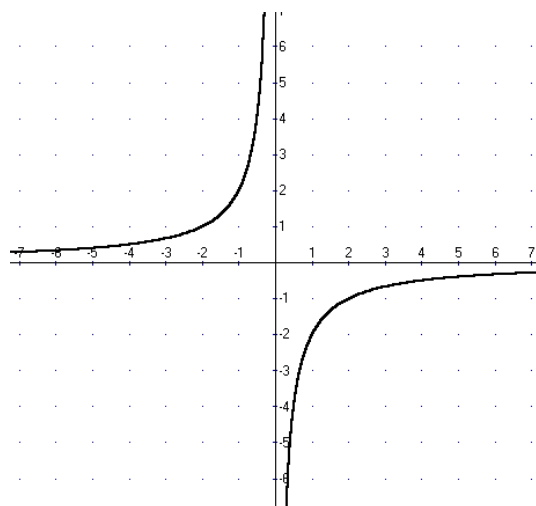
El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Es una función creciente.

Para dibujarla construiremos una tabla de valores:

x	y	$x \cdot y$
-4	0.5	-2
-2	1	-2
-1	2	-2
-0.5	4	-2
0.5	-4	-2
1	-2	-2
2	-1	-2
4	-0.5	-2
8	-0.25	-2



Ejercicios propuestos:

1. Completa la tabla :

Función	Tipo	Pendiente	Ordenada en el origen	Crecimiento o decrecimiento
$y = -3x$				
$y = x + 4$	afín			creciente
$y = -5$				constante
$y = -x + 10$				
$y = \frac{1}{3}x$	lineal			
$y =$		6	-3	

2. Dibuja las gráficas siguientes:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -3x + 4$

c) $y = 5 - x$

d) $4(y - x) = 3(1 - x)$

e) $y = 20(x - 2)$

f) $3x - y = -1$

3. Determina las ecuaciones de las rectas:

a) La recta que pasa por $(-1, 3)$ y $(2, -3)$. Dibújala.

b) La recta que pasa por $(0, 6)$ y es paralela a la recta $y = 2x - 3$.

c) La recta que pasa por $(1, 3)$ y $(2, 5)$.

d) La recta que tiene pendiente -1 y pasa por $(2, -1)$.

e) La recta que pasa por el origen y es paralela a $y = -3x + 5$.

f) La recta que pasa por $(0, -5)$ y tiene pendiente $\frac{-1}{2}$

g) La recta que pasa por $(0, 2)$ y por $(-1, 0)$.

4. En las siguientes rectas determina la pendiente y calcula la ecuación de una paralela que pase por $(1, 1)$.

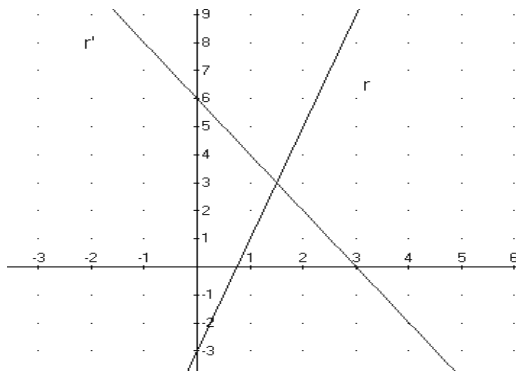
a) $y = 3x$

b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -x + 1$

d) $y = x - 1$

5. Calcula las ecuaciones de las rectas r y r' de la figura:

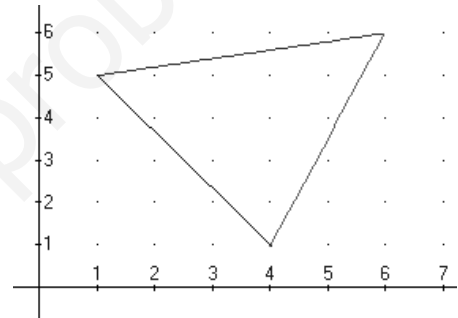


6. Determina la recta r que pasa por los puntos $A(2,-1), B(3,4)$ y la recta s que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $C(1,1)$. Dibújalas.

Determina el punto donde se cortan las rectas.

7. Determina el punto de intersección de las rectas $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = -2x + 5$. Dibújalas.

8. Calcula las ecuaciones de las rectas que determinan los lados del triángulo y después comprueba que los vértices son las soluciones de los sistemas que determinen estas rectas dos a dos.



9. En una línea de autobús, el billete cuesta 1'50 €, más 0'20 € por cada kilómetro de trayecto. Escribe la función que relaciona el número de kilómetros recorridos y el precio del viaje.

Representala.

¿Cuántos kilómetros podemos recorrer en esta línea con 6'50 €.

10. Una compañía telefónica cobra 12 € por el alquiler del teléfono al mes y 0'12 € por cada paso de conversación. Calcula lo que se gastó una familia si ha consumido los pasos siguientes : 17 pasos en la primera semana del mes, 24 en la segunda, 15 en la tercera y 34 a la cuarta. Calcula el gasto de cada semana y del mes. Determina una función que represente lo que gastó en telefónica en el mes.

11. Dibuja las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 - 6x + 10$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = -x^2 - 4x - 2$

d) $y = x^2 - 4$

e) $y = -2x^2 - x + 6$

f) $y = x^2 + 2x + 2$

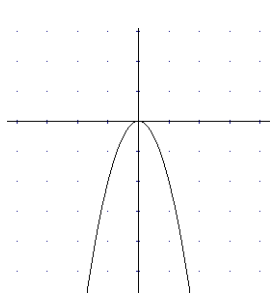
12. Identifica las siguientes funciones:

$$f(x) = -x^2$$

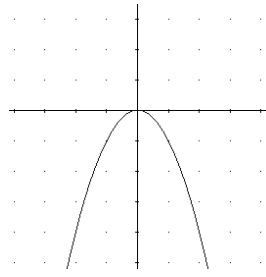
$$g(x) = -x^2 + 3$$

$$m(x) = -x^2 - 3$$

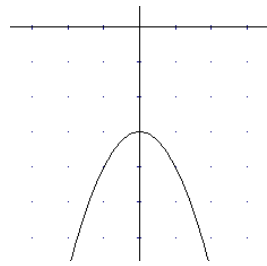
$$n(x) = -2x^2$$



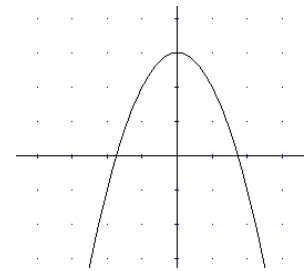
a)



b)



c)



d)

13. Sea la función $f(x) = x^2 + mx + m$. Determina m sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(-2, 7)$.

14. Sea la función $f(x) = x^2 + mx + n$. Determina m y n sabiendo que la gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$, $(-3, 4)$.

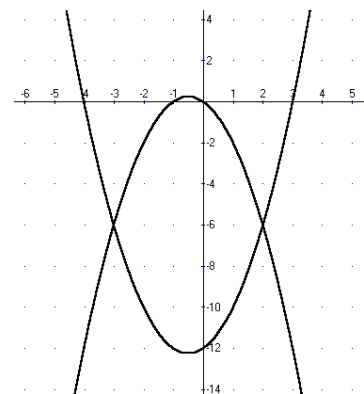
15. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determina a , b , c sabiendo que la gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 2)$.

16. Determina el punto (o los puntos) de intersección de la parábola $y = x^2 + 2x$ y la recta $y = 2x + 1$.

17. Determina el punto (o los puntos) de intersección de la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y la recta $y = 3x + 3$. Dibújalas

18. Determina el punto (o los puntos) de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 8$ y la recta $y = -x + 7$.

19. Determina el punto o los puntos de intersección de las parábolas:



20. Determina el punto o los puntos de intersección de las parábolas $y = x^2 + x$, $y = -x^2 - x + 12$. Dibújalas.

21. Determina el punto o los puntos de intersección de las parábolas $y = 3x^2 - 3$, $y = x^2 - 6x + 5$. Dibújalas.

22. Determina una función que calcule el producto de dos números que suman 32. ¿Qué tipo de función es?. Dibújala.

23. En el lanzamiento de una piedra al aire la altura de la piedra recorre la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ donde t es el tiempo en segundos, y $f(t)$ es la altura en metros. Calcula en qué segundo alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura. ¿En qué segundo cae a tierra?. Representa la función.

24. Representa las funciones:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

d) $r(x) = \frac{-1}{x}$

g) $x \cdot y = 4$

b) $g(x) = \frac{3}{x}$

e) $s(x) = \frac{-4}{x}$

h) $x \cdot y = -6$

c) $h(x) = \frac{0'5}{x}$

f) $t(x) = \frac{-0'25}{x}$

i) $x \cdot y = 2'5$

25. Determina la relación entre los lados de los rectángulos de área 60cm^2 . Dibuja la gráfica de la función.

26. Para realizar un trabajo se necesita trabajar durante 90 horas. Si son 3 trabajadores para hacer el trabajo cada uno tiene que trabajar 30h. Completa la tabla siguiente:

Número trabajadores	Horas que dedica cada trabajador
1	
3	30
5	
10	
15	
20	
30	
50	
60	
90	
180	
x	

Representa gráficamente la función que relacione las horas que trabajará cada uno de ellos en función del número de trabajadores.