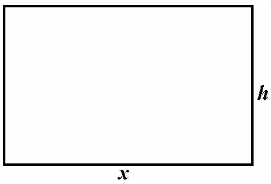
FUNCIONES CUADRÁTICAS Y RACIONALES

1. FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Representemos, en función de la longitud de la base (x), el área (y) de todos los rectángulos de perímetro 12 metros. De ellos, ¿cuáles son las medidas del rectángulo que tiene mayor área?

Consideremos un rectángulo de base x y altura h:



Como el perímetro es 12 metros, se verifica:

$$2x + 2h = 12 \;\Rightarrow\; 2(x + h) = 12 \;\Rightarrow\; x + h = 6 \;\Rightarrow\; h = 6 - x$$

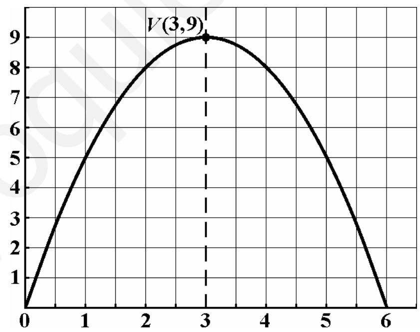
Por tanto, el área de dicho rectángulo es:

$$y = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot h = x \cdot (6 - x) = 6x - x^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 6x - x^2}$$

Formamos una tabla de valores para ver como varía el área, y, a medida que variamos la base x:

Base $\equiv x$	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5	5	5'5
Área $\equiv y = 6x - x^2$	2'75	5	6'75	8	8'75	9	8'75	8	6'75	5	2'75

Dibujamos la gráfica correspondiente y obtenemos:



Por tanto, las medidas del rectángulo que tiene área máxima son $x = 3$ metros de base y $h = 6 - x = 3$ metros de altura, siendo 9 m^2 dicha área.

La función representada anteriormente $y = 6x - x^2$ se llama *función cuadrática* y su gráfica es una *parábola*.

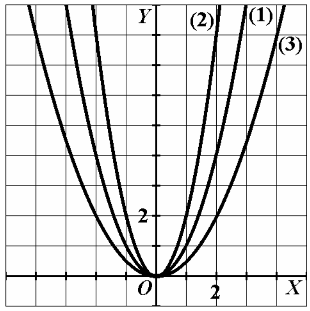
La recta de ecuación $x = 3$ es el *eje de la parábola* (la gráfica es simétrica respecto de esta recta) , y el punto $V\,(3, 9)$ es el *vértice de la parábola*.

> Las ***funciones cuadráticas*** son aquellas cuya expresión es un polinomio de segundo grado, esto es, funciones de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Sus gráficas reciben el nombre de ***parábolas.***

2. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2$.

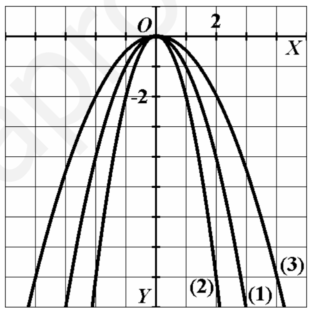
Vamos a representar las funciones (1) $y = x^2$, (2) $y = 2x^2$ y (3) $y = \frac{1}{2}x^2$, que son del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, con $\boldsymbol{a > 0}$.

x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
–3	9	18	4’5
–2	4	8	2
–1	1	2	0’5
0	0	0	0
1	1	2	0’5
2	4	8	2
3	9	18	4’5



Si representamos ahora las funciones opuestas a las anteriores, (1) $y = -x^2$, (2) $y = -2x^2$ y (3) $y = -\frac{1}{2}x^2$, las tablas de valores de estas funciones son las mismas que antes, cambiando el signo a los valores de la variable y.

x	$y = -x^2$	$y = -2x^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2$
–3	–9	–18	–4’5
–2	–4	–8	–2
–1	–1	–2	–0’5
0	0	0	0
1	–1	–2	–0’5
2	–4	–8	–2
3	–9	–18	–4’5



A la vista de las gráficas se deducen las propiedades de estas funciones.

La ***parábola*** de ecuación $\boldsymbol{y = ax^2}$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** es el conjunto de los números reales: **Dom** $\boldsymbol{f} = \mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, la parábola está **abierta hacia arriba.**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$, la parábola está **abierta hacia abajo.**
- La función es **continua.**
- Si $\boldsymbol{|a| > 1}$, la parábola es **más estrecha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$.
  Si $\boldsymbol{|a| < 1}$, la parábola es **más ancha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$.
- Es **simétrica respecto del eje de ordenadas** (simetría par) ya que $\boldsymbol{f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)}$.
  El eje de ordenadas Y (recta de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$) es el ***eje de la parábola.***
- El punto $\boldsymbol{V = (0, 0)}$ es el ***vértice de la parábola.***
  Si $\boldsymbol{a > 0}$, la función tiene un **mínimo absoluto** en su vértice, siendo **Im** $\boldsymbol{f}$ **= [0, + ¥).**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$, la función tiene un **máximo absoluto** en su vértice, siendo **Im** $\boldsymbol{f}$ **= (- ¥, 0].**
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, la función es **decreciente** en **(- ¥, 0)** y **creciente** en **(0, + ¥).**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$, la función es **creciente** en **(- ¥, 0)** y **decreciente** en **(0, + ¥).**

EJERCICIOS

1. Observa las ecuaciones de las siguientes funciones.

   a) $y = 3x^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2$ c) $y = -4x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

   a) ¿Qué parábolas están abiertas hacia arriba? ¿Y hacia abajo?
   b) ¿Qué parábolas son más anchas que $y = x^2$? ¿Y más estrechas?
   c) Representa sobre unos mismos ejes dichas parábolas, así como las parábolas de ecuación $y = x^2$ e $y = -x^2$.

2. Expresa el área de un triángulo equilátero en función de su lado. ¿Qué tipo de función se obtiene? Represéntala gráficamente.

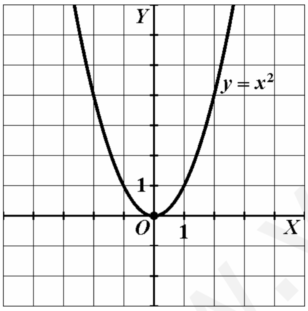
3. TRASLACIÓN DE PARÁBOLAS.

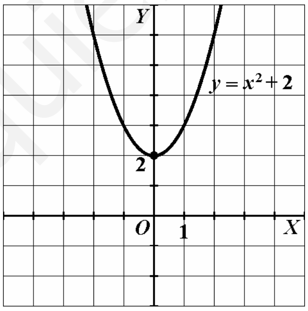
Las parábolas de ecuación $y = ax^2$ son las más sencillas. A partir de estas parábolas se obtienen otras por traslación.

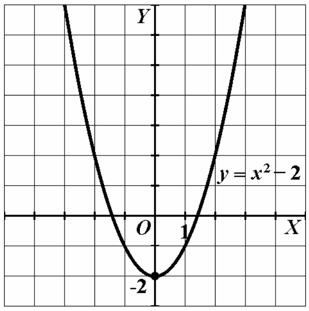
- **Traslación vertical: $y = ax^2 + p$**

Observa que las tablas de $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$ se obtienen a partir de la tabla de $y = x^2$, sumando y restando 2 unidades respectivamente.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = x^2 + 2$	18	11	6	3	2	3	6	11	18
$y = x^2 - 2$	14	7	2	–1	–2	–1	2	7	14





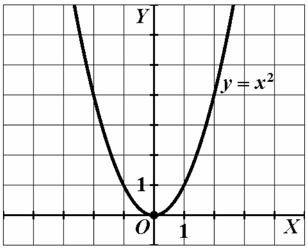


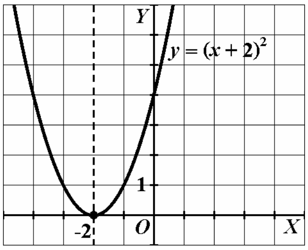
> Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + p}$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto $\boldsymbol{V = (0, p)}$. Se obtienen trasladando verticalmente $\boldsymbol{p}$ unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = ax^2}$.
>
> - Si $\boldsymbol{p > 0}$, la traslación vertical es **hacia arriba.**
> - Si $\boldsymbol{p < 0}$, la traslación vertical es **hacia abajo.**

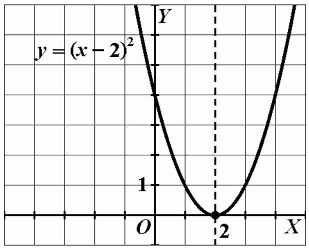
- **Traslación horizontal: $y = a(x + h)^2$**

Observemos ahora las tablas y gráficas de las funciones $y = (x + 2)^2$ e $y = (x - 2)^2$.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x + 2)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$y = (x - 2)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1	4







Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $y = a(x + h)^2$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto $V = (-h, 0)$. Se obtienen trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = ax^2$.

- Si $h > 0$, la traslación horizontal es **hacia la izquierda.**
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es **hacia la derecha.**

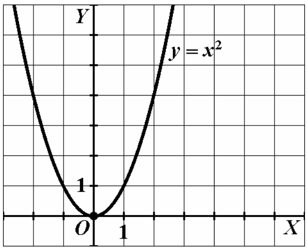
- **Traslación oblicua:** $y = a(x + h)^2 + p$

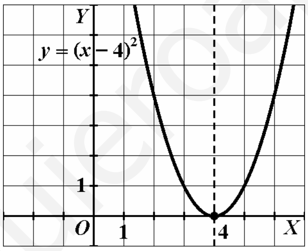
  Vamos a obtener la gráfica de la función cuadrática $y = (x - 4)^2 + 3$ partiendo de la gráfica de $y = x^2$. Para ello, realizamos sucesivamente una traslación horizontal y una traslación vertical.

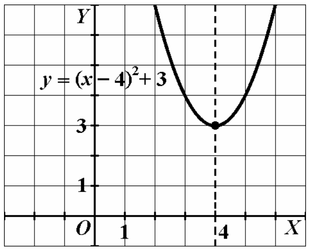
  Trasladamos horizontalmente la parábola $y = x^2$ cuatro unidades a la derecha, obteniendo la parábola $y = (x - 4)^2$.

  Trasladamos ahora esta última tres unidades verticalmente hacia arriba, y obtenemos la parábola $y = (x - 4)^2 + 3$.

  Por consiguiente, la gráfica de $y = (x - 4)^2 + 3$ es igual que la gráfica de la parábola $y = x^2$, pero con su vértice en el punto de coordenadas (4, 3).







Las ***funciones cuadráticas*** del tipo $y = a(x + h)^2 + p$ son ***parábolas*** cuyo ***vértice*** es el punto de coordenadas $V = (-h, p)$. Se obtienen trasladando verticalmente p unidades y horizontalmente h unidades la gráfica de $y = ax^2$.

El sentido de las traslaciones horizontales y verticales dependen del signo de p y h respectivamente.

<u>**Atención:**</u> Las anteriores reglas sobre traslaciones se cumplen también para la gráfica de cualquier función $y = f(x)$. En general, $y = f(x) + p$ es una ***traslación vertical*** e $y = f(x + h)$ una ***traslación horizontal*** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

EJERCICIOS

3. Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas.
   a) $y = 3(x - 1)^2 + 4$ b) $y = -4(x + 7)^2 - 1$ c) $y = 6(x - 12)^2 + 14$
4. A partir de la gráfica de la función $y = x^2$, obtén las gráficas de las siguientes funciones, explicando en cada caso cómo lo haces.
   a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x - 3)^2$ d) $y = (x + 1)^2$ e) $y = (x - 2)^2 + 3$ f) $y = (x + 2)^2 - 1$
5. Dibuja en una cuadrícula la gráfica de la función $y = 2x^2$ y a partir de ella obtén las siguientes gráficas.
   a) $y = 2x^2 - 3$ b) $y = 2(x + 3)^2$ c) $y = 2(x - 1)^2 + 1$ d) $y = 2(x + 1)^2 + 3$

4. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE ECUACIÓN $y = ax^2 + bx + c$.

Vamos a estudiar la función cuadrática completa cuya ecuación es de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ con $\boldsymbol{a}$ ¹ **0.**

- Estas funciones se pueden representar mediante traslaciones sin más que expresarlas de la forma $\boldsymbol{y = a(x + h)^2 + p}$.

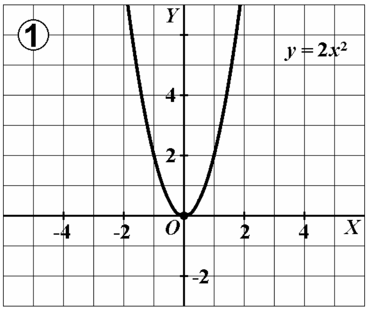
<u>Ejemplo.</u> Representa gráficamente la parábola de ecuación $y = 2x^2 - 8x + 7$.

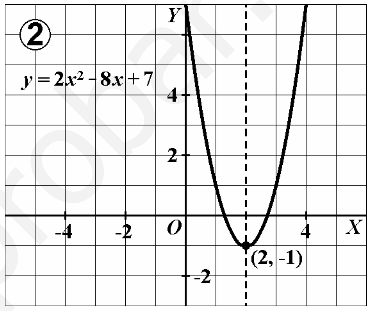
Sacamos factor común el término de x^2: $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x^2 - 4x) + 7$

Desarrollamos el cuadrado de una diferencia: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2(x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$

Ajustamos los términos: $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x - 2)^2 - 1$

Así, la gráfica de $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x - 2)^2 - 1$ es la parábola obtenida al trasladar la función $y = 2x^2$ de modo de su vértice sea el punto $(2, -1)$.





EJERCICIOS

6. Representa las siguientes parábolas, expresándolas previamente en la forma $y = a(x + h)^2 + p$.
   a) $y = x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = 3x^2 - 6x + 7$

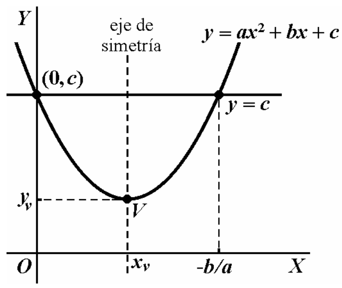
- Los elementos más importantes de una parábola son el vértice y el eje de simetría. Vamos, a continuación, a obtener las coordenadas $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ del vértice y la ecuación del eje de simetría de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Las coordenadas de los puntos en los que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta a la recta $y = c$ se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones y operando se obtiene:

$$ax^2 + bx + c = c \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{-b}{2a}$$



La abscisa x_v es el punto medio de las abscisas halladas anteriormente: $x_v = \dfrac{0 + (-b/a)}{2} = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x_v = \dfrac{-b}{2a}}}$

La ordenada del vértice la obtenemos sustituyendo: $y_v = f(x_v) = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}}}$

El eje de simetría pasa por el vértice de la parábola. Por tanto, dicho eje es la recta de ecuación $\boxed{\boldsymbol{x = \dfrac{-b}{2a}}}$

- Lo estudiado anteriormente nos proporciona las propiedades de estas funciones.

La ***parábola*** de ecuación $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** es el conjunto de los números reales: **Dom** $\boldsymbol{f}$ = $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la parábola está **abierta hacia arriba.**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la parábola está **abierta hacia abajo.**
- La función es **continua.**
- Si $\boldsymbol{|\, a \,| > 1}$**,** la parábola es **más estrecha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
  Si $\boldsymbol{|\, a \,| < 1}$**,** la parábola es **más ancha** que la $\boldsymbol{y = x^2}$**.**
- El punto $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ es el ***vértice de la parábola.***
  Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función tiene un **mínimo absoluto** en su vértice, siendo **Im** $\boldsymbol{f}$ **= [** $\boldsymbol{y_v}$ **, +¥).**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función tiene un **máximo absoluto** en su vértice, siendo **Im** $\boldsymbol{f}$ **= (- ¥,** $\boldsymbol{y_v}$ **].**
- Si $\boldsymbol{a > 0}$**,** la función es **decreciente** en **(- ¥,** $\boldsymbol{x_v}$**)** y **creciente** en **(**$\boldsymbol{x_v}$ **, +¥).**
  Si $\boldsymbol{a < 0}$**,** la función es **creciente** en **(- ¥,** $\boldsymbol{x_v}$**)** y **decreciente** en **(**$\boldsymbol{x_v}$ **, +¥).**
- El ***eje de la parábola*** es la recta $\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$ (la función es simétrica respecto de este eje).

4.1. Método de representación de parábolas.

Podemos representar parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ sin utilizar traslaciones. Para ello, procederemos de la siguiente forma:

1º. Se halla la orientación de la parábola según el signo de a.

2º. Se calculan las coordenadas del vértice.

3º. Se halla la ecuación del eje de simetría.

4º. Se calculan los puntos de corte con los ejes cartesianos.

$$\text{Eje } Y\text{:} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (0, f(0)) = (0, c)$$

$$\text{Eje } X\text{:} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \text{resolvemos la ecuación } \ ax^2 + bx + c = 0$$

Dependiendo de las soluciones de esta ecuación, se tendrá que:

- dos 2 soluciones: x_1, x_2 $\Rightarrow$ dos puntos de corte: (x_1, 0) y (x_2, 0)
- una solución: x_1 $\Rightarrow$ un punto de corte (x_1, 0)
- ninguna solución $\Rightarrow$ la parábola no corta al eje X

5º. Por último, construimos una tabla de valores hallando dos o más puntos simétricos respecto del eje de simetría.

Ejemplo. Estudia y representa la gráfica de la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 6$

- Como $a = -1 > 0$, la parábola está abierta hacia abajo.
- Calculamos las coordenadas del vértice.

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = 2 \\ y_v = f(2) = -2^2 + 4\cdot 2 - 6 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ V = (2,-2)$$

- El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$.

- Hallamos los puntos de corte con los ejes.

  El punto de corte con el eje Y es $(0, f(0)) = (0, c) = (0, -6)$.

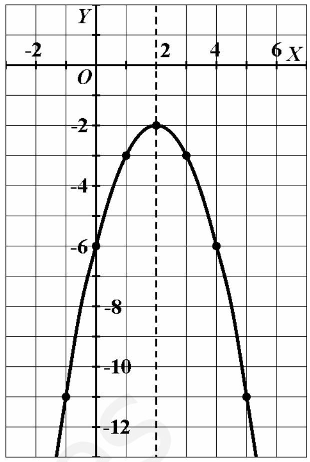
  Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos la ecuación de segundo grado $-x^2 + 4x - 3 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

  La ecuación no posee soluciones, por tanto, la gráfica no corta al eje X.

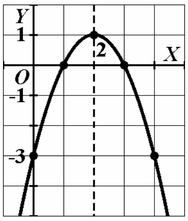
- Construimos una tabla de valores hallando puntos simétricos respecto del eje de simetría.

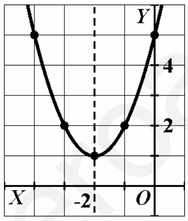
x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−11	−6	−3	−2	−3	−6	−11

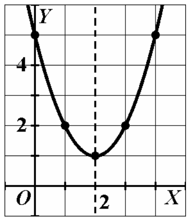


EJERCICIOS

7. Asocia cada una de las siguientes expresiones algebraicas a su gráfica correspondiente, razonando las respuestas.
   a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $y = -x^2 + 4x - 3$ c) $y = x^2 + 4x + 5$







8. Determina el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas. Compara los resultados obtenidos con los del ejercicio número seis.
   a) $y = x^2 - 6x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = 3x^2 - 6x + 7$

9. Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones, determinando previamente su vértice, eje de simetría y los puntos de corte con los ejes.
   a) $y = -x^2 + 4$ b) $y = x^2 - 8x + 12$ c) $y = 4x^2 + 8x$ d) $y = -4x^2 - 12x - 9$ e) $y = x^2 + 4x - 5$

10. Determina los puntos en los que la recta $y = x + 3$ corta a la parábola $y = -x^2 - x + 6$. Una vez hallados, interpreta gráficamente el resultado.

11. Determina la función que proporciona el producto de dos números cuya suma vale 10 unidades. ¿Para qué números es máximo este producto?

12. Expresa la función cuadrática en cada unos de los siguientes casos.
    a) El coeficiente de x^2 vale -1 y la gráfica pasa por $(1, 0)$ y $(2, 1)$.
    b) Su expresión es de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto $(1, 9)$.
    c) Pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 4)$.
    d) Tiene el vértice en $(-1, -1)$ y su gráfica pasa por $(0, 1)$.
    e) Corta al eje Y en $(0, 3)$ y al eje X en $(1, 0)$ y $(3, 0)$

13. Una avioneta vuela entre Cádiz y Ceuta. Su altura de vuelo viene dada por la siguiente fórmula: $h(t) = 840t - 30t^2$, donde $h(t)$ es la altura de la avioneta en metros a los t minutos de haber despegado de Cádiz. Representa la gráfica para determinar la altura a la que la avioneta inicia el descenso y la duración del vuelo.

14. Se lanza un objeto hacia arriba desde una torre situada a 75 metros del suelo. Conocemos en cada instante de tiempo x (segundos) la altura sobre el suelo y (metros) del objeto mediante la función $y = -5x^2 + 10x + 75$. Representa la gráfica para determinar la altura máxima que alcanza el objeto, el tiempo que tarda en alcanzarla y el tiempo que tarda en caer al suelo el objeto desde su lanzamiento.

5. Función de proporcionalidad inversa.

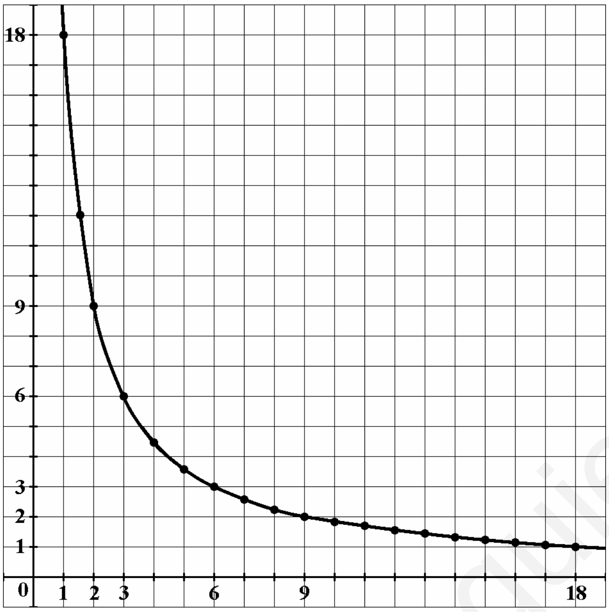
El área de un rectángulo es 18 cm^2. La siguiente tabla nos muestra algunas medidas que pueden tener la base y la altura:

$x \equiv$ base (cm)	1	1'5	2	3	4	6	10	15	…
$y \equiv$ altura (cm)	18	12	9	6	4'5	3	1'8	1'2	…

Observa que el producto de los valores correspondientes de las dos magnitudes es constante, por lo que ambas magnitudes son inversamente proporcionales, siendo 18 la constante de proporcionalidad.

Se verifica entonces que $\boldsymbol{x \times y = 18}$, de donde podemos deducir la expresión algebraica de esta función: $\boldsymbol{y = \frac{18}{x}}$.

La representación gráfica es la siguiente:



Observando la gráfica podemos obtener algunas consecuencias sobre la función:

- El dominio está formado por los valores positivos de la base. Observa que no está definida para $x = 0$.
- La imagen está formada por los valores positivos de las alturas.
- La función es continua y decreciente.
- Si la base del rectángulo crece, entonces la altura disminuye.
- Si la base del rectángulo decrece, entonces la altura aumenta.

Las funciones cuya expresión es $y = \frac{k}{x}$ se llaman ***funciones de proporcionalidad inversa*** y su gráfica recibe el nombre de ***hipérbola,*** siendo $\boldsymbol{k}$ la constante de proporcionalidad.

EJERCICIOS

15. La siguiente tabla muestra el tiempo de llenado de un depósito en función del numero de grifos abiertos.

$x \equiv$ nº de grifos	2	3		5	6
$y \equiv$ tiempo (horas)	12	8	6		

a) Completa la tabla.
b) ¿Son magnitudes inversamente proporcionales? ¿Por qué?
c) Halla la función que se ajusta a estos valores y represéntala gráficamente.
d) ¿Cuántas horas son necesarias para llenar el depósito si disponemos de 8 grifos abiertos?
e) Si queremos llenar el depósito en una hora y media, ¿cuántos grifos debemos abrir?

16. El área de un triángulo es igual a 24 cm^2. Forma una tabla para los distintos valores de la base y la altura. Escribe la función correspondiente y represéntala.

17. Un ortoedro tiene altura constante igual a 10 m. Sabiendo que su volumen es constante e igual a 360 m^3, forma una tabla para los distintos valores de largo y ancho. Escribe la función correspondiente y represéntala.

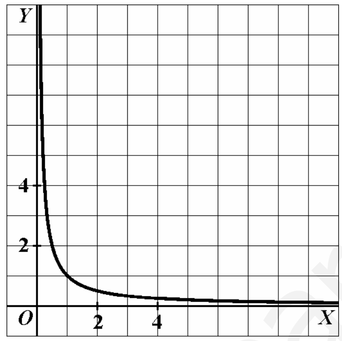
5.1. Propiedades y comportamiento asintótico.

- Representemos las función de proporcionalidad inversa $y = \dfrac{1}{x}$.

  Observemos primeramente que esta función no está definida para $x = 0$, por lo que Dom $f = \mathbf{R} - \{0\}$.

  Para valores de *x* positivos:

x	$y = \dfrac{1}{x}$
0'001	1.000
0'1	10
0'25	4
0'5	2
1	1
2	0'5
4	0'25
10	0'1
1.000	0'001



Comportamiento asintótico.

> Se dice que una recta es ***asíntota*** de una función cuando la gráfica de la función se acerca cada vez más a ella, sin llegar a tocarla.

Observa que a medida que se van dando valores más grandes a x, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose en este caso a 0. Es decir, la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = 0}$**.**

Esto se expresa del siguiente modo: $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Cuando una función se comporta así, se dice que tiene un ***comportamiento asintótico.*** La recta a la que se acerca la función se llama ***asíntota horizontal.***

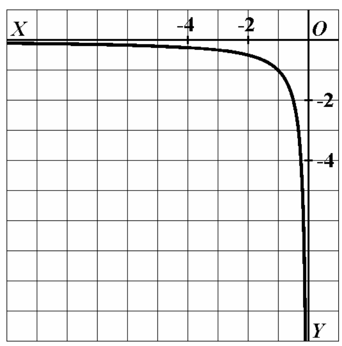
Por otra parte, esta función no tiene en su dominio el punto de abscisa $x = 0$. Sin embargo, se pueden dar a x valores tan próximos a 0 como se quiera. Si observamos la tabla, a medida que se van dando valores a x próximos a cero, el valor de y se hace cada vez más grande. Es decir, la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$**.**

Esto se expresa del siguiente modo: $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

La recta a la que se acerca la función se llama ***asíntota vertical.***

Para valores de *x* negativos:

x	$y = \dfrac{1}{x}$
–0'001	–1.000
–0'1	–10
–0'25	–4
–0'5	–2
–1	–1
–2	–0'5
–4	–0'25
–10	–0'1
–1.000	–0'001



Comportamiento asintótico.

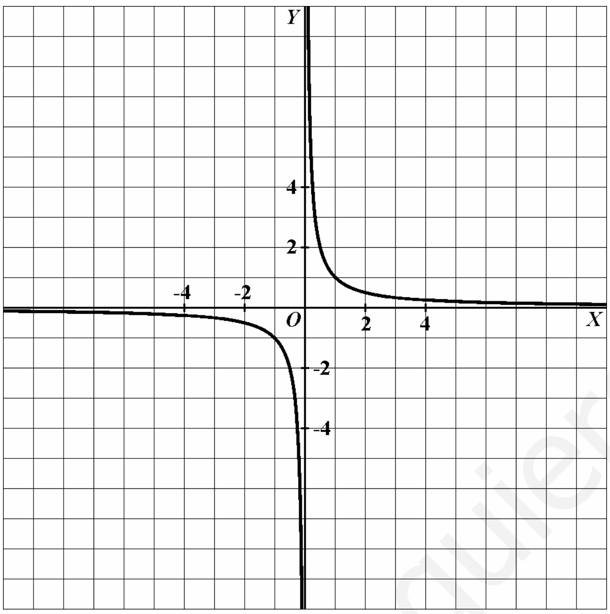
De manera análoga al caso anterior, a medida que se van dando valores más pequeños a x, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose también a 0. Igualmente la función se aproxima a la recta de ecuación $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

La recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*: $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

También podemos dar a x valores tan próximos a 0 como se quiera. Observando la tabla vemos que a medida que se van dando valores a x más próximos a cero, el valor de y se hace cada vez más pequeño, aproximándose la función a la recta de ecuación $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

La recta $x = 0$ es una *asíntota vertical*: $f(x) \xrightarrow[x\to0^-]{} -\infty$

Representando las dos ramas en los mismos ejes se obtiene la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$.



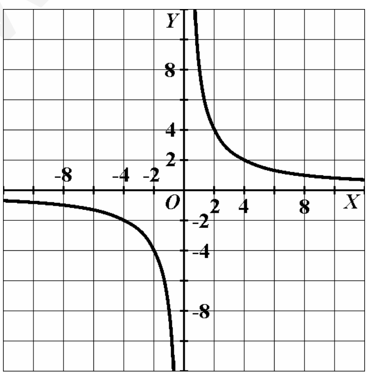
A la vista de la gráfica observamos que:

- La función no está definida en el origen.
- Es continua en todos los puntos salvo en $x = 0$, que no pertenece al dominio.
- Es siempre decreciente.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas de ecuación $y = 0$ y $x = 0$ (ejes de coordenadas) son, respectivamente, sus asíntotas horizontal y vertical.
- El punto donde se cortan las asíntotas, en este caso el origen de coordenadas, se llama *centro de la hipérbola.*

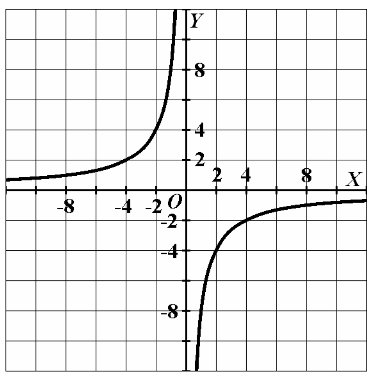
- Vamos a representar ahora las hipérbolas de ecuación $y = \dfrac{8}{x}$ e $y = \dfrac{-8}{x}$.

Para ello construimos las respectivas tablas de valores y representamos las gráficas:

x	$y = \dfrac{8}{x}$
…	…
−8	−1
−4	−2
−2	−4
−1	−8
1	8
2	4
4	2
8	1
…	…



x	$y = \dfrac{-8}{x}$
…	…
−8	1
−4	2
−2	4
−1	8
1	−8
2	−4
4	−2
8	−1
…	…



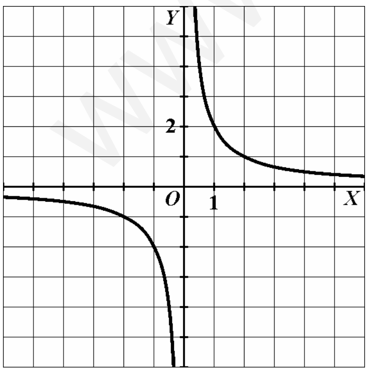
- A la vista de las gráficas estudiadas anteriormente se deducen las propiedades de estas funciones.

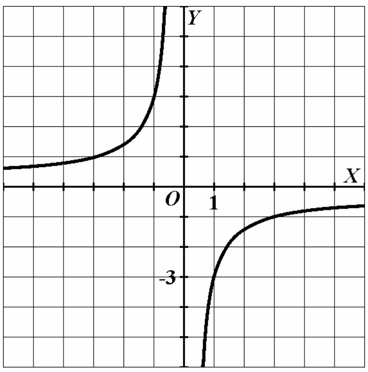
La ***hipérbola*** de ecuación $y = \dfrac{k}{x}$ tiene las siguientes propiedades:

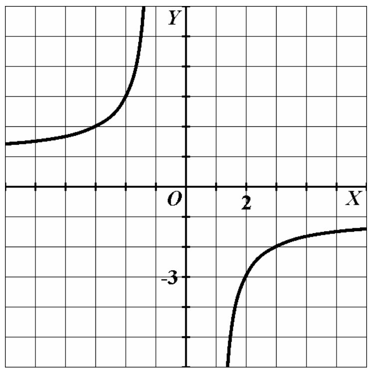
- Su **dominio** es el conjunto de los números reales a excepción del 0: **Dom** $f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Igualmente, su **imagen** es **Im** $f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- La función es **continua** en todo su dominio.
- Es **simétrica respecto del origen de coordenadas** (simetría impar) ya que $f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -f(x)$.
- Si $k > 0$, la función es siempre **decreciente** en todo intervalo que no contenga a $x = 0$.
  Si $k < 0$, la función es siempre **creciente** en todo intervalo que no contenga a $x = 0$.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Tiene por ***asíntota horizontal*** al eje de abscisas X (recta de ecuación $y = 0$): $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$
- Tiene por ***asíntota vertical*** al eje de ordenadas Y (recta de ecuación $x = 0$): $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0^+ \\ x \to 0^-}]{} \pm\infty$
- El origen de coordenadas, $C = (0, 0)$, es el ***centro de la hipérbola***.
- No tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.

EJERCICIOS

18. El producto de dos números es -14. Forma una tabla de valores, escribe la función y represéntala.
19. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{12}{x}$. Indica las asíntotas y el centro de la misma.
20. Contesta, razonadamente, las siguientes cuestiones.
    a) ¿Para qué valores de x la función $y = \dfrac{3}{x}$ es decreciente? ¿Y creciente la función $y = \dfrac{-2}{x}$?
    b) La función $y = \dfrac{2}{x}$, en $x = 0$, ¿tiene un máximo o un mínimo?
    c) Dada la función $y = \dfrac{4}{x}$, ¿a qué valor se va acercando y a medida que x toma valores cada vez mayores?
21. Las siguientes gráficas son hipérbolas. Razona cuál es la expresión de la función en cada caso.



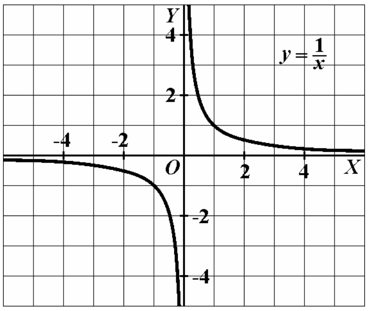


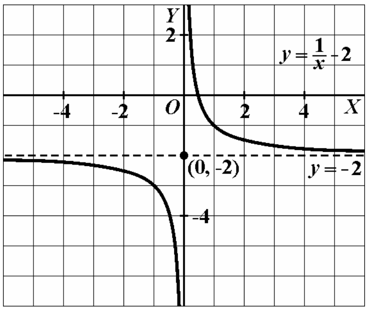


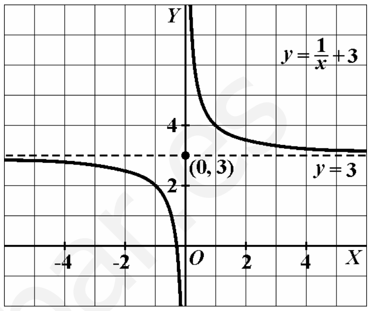
6. TRASLACIÓN DE HIPÉRBOLAS.

Las hipérbolas $y = \frac{k}{x}$ son las más sencillas. Sus asíntotas son los ejes de coordenadas, y el centro de la hipérbola es el origen. A partir de estas hipérbolas se obtienen otras por traslación.

- **Traslación vertical:** $\boldsymbol{y = \frac{k}{x} + p}$

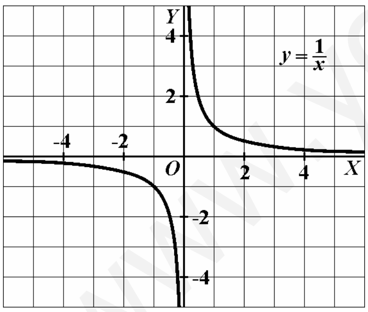


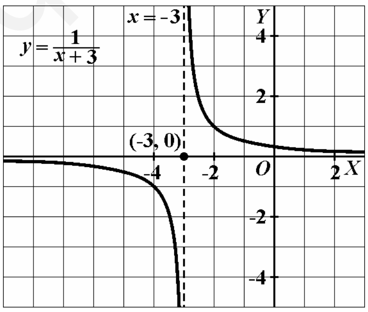


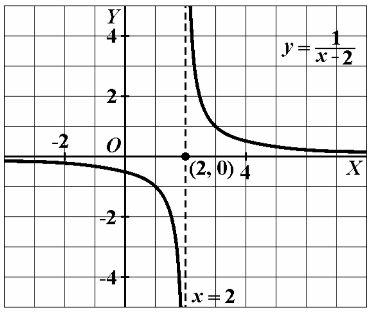


> Las funciones del tipo $\boldsymbol{y = \frac{k}{x} + p}$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto $\boldsymbol{C = (0, p)}$**.** Se obtienen trasladando verticalmente $\boldsymbol{p}$ unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$.
>
> - Si $\boldsymbol{p > 0}$**,** la traslación vertical es **hacia arriba.**
> - Si $\boldsymbol{p < 0}$**,** la traslación vertical es **hacia abajo.**

- **Traslación horizontal:** $\boldsymbol{y = \frac{k}{x + h}}$

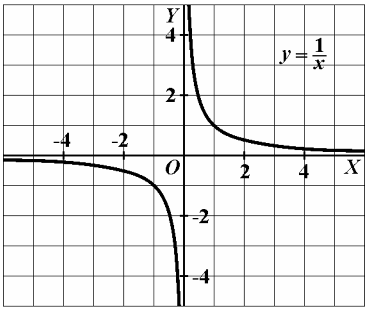


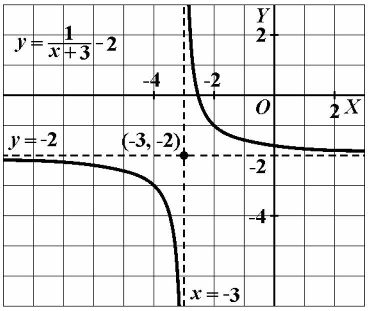


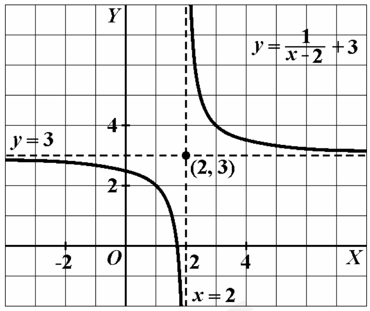


> Las funciones del tipo $\boldsymbol{y = \frac{k}{x + h}}$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto $\boldsymbol{C = (-h, 0)}$**.** Se obtienen trasladando horizontalmente $\boldsymbol{h}$ unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$.
>
> - Si $\boldsymbol{h > 0}$**,** la traslación horizontal es **hacia la izquierda.**
> - Si $\boldsymbol{h < 0}$**,** la traslación horizontal es **hacia la derecha.**

- **Traslación oblicua:** $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x+h} + p}$







Las funciones del tipo $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x+h} + p}$ son ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto ***C* = (- *h*, *p*).** Se obtienen trasladando verticalmente ***p*** unidades y horizontalmente ***h*** unidades la gráfica de $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$. El sentido de las traslaciones horizontales y verticales dependen del signo de *p* y *h* respectivamente.

- Lo estudiado anteriormente nos permite deducir las propiedades de estas funciones.

La ***hipérbola*** de ecuación $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x+h} + p}$ tiene las siguientes propiedades: • Su **dominio** es **Dom *f*** = **R** - **{- *h*}.** • Su **imagen** es **Im *f*** = **R** - **{*p*}.** • La función es **continua** en todo su dominio. • El ***centro de la hipérbola*** es el punto ***C* = (- *h*, *p*)** (la función es simétrica respecto de este punto). • Si ***k* > 0,** la función es siempre **decreciente** en todo intervalo que no contenga a $x = -h$. Si ***k* < 0,** la función es siempre **creciente** en todo intervalo que no contenga a $x = -h$. • No tiene máximos ni mínimos. • Tiene por ***asíntota horizontal*** la recta de ecuación ***y* = *p*.** • Tiene por ***asíntota vertical*** la recta de ecuación ***x* = - *h*.**

EJERCICIOS

22. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{-2}{x}$. A partir de ella representa mediante traslaciones las siguientes, hallando previamente las asíntotas y centros de las mismas.

    a) $y = \dfrac{-2}{x} + 3$ b) $y = \dfrac{-2}{x+5}$ c) $y = \dfrac{-2}{x+5} + 3$

23. Representa la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{9}{x}$. A partir de ella representa mediante traslaciones las siguientes, hallando previamente las asíntotas y centros de las mismas

    a) $y = \dfrac{9}{x} - 2$ b) $y = \dfrac{9}{x-4}$ c) $y = \dfrac{9}{x-4} - 2$

24. Escribe la ecuación de una hipérbola que tenga por asíntotas las rectas $x = 2$ e $y = 2$. ¿Puedes obtener más de una? Halla la ecuación de aquella que pasa por el punto de coordenadas (4, 5).

7. FUNCIONES RACIONALES.

Una ***función racional*** es el cociente $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con $q(x) \neq 0$. El **dominio** de estas funciones son todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.

Nota: En este curso, nos centraremos en el estudio de aquellas funciones racionales en las que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado uno.

Ejemplo. Halla el dominio de la función racional $y = \dfrac{4x+5}{2x-3}$

Resolviendo la ecuación $2x - 3 = 0$, obtenemos: $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 2/3$

Por tanto, Dom $f = \mathbf{R} - \{2/3\}$

- Veamos cómo se puede construir la gráfica de la función $y = \dfrac{3x+5}{x+1}$ utilizando la traslación de hipérbolas.

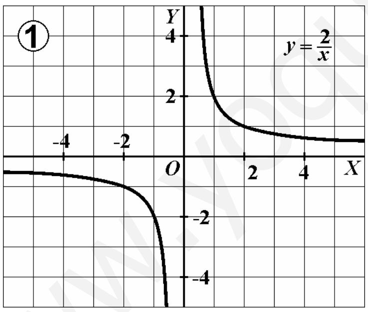
Resolviendo la ecuación $x + 1 = 0$, obtenemos que Dom $f = \mathbf{R} - \{-1\}$

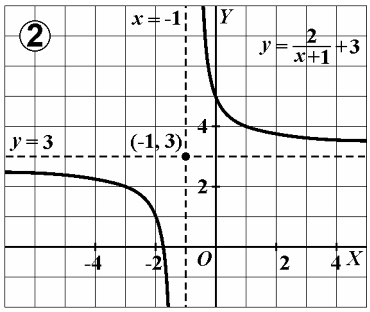
Dividimos el numerador entre el denominador:
$$\begin{array}{r|l} 3x+5 & x+1 \\ \cline{2-2} -3x-3 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

El algoritmo de la división nos permite afirmar que: $3x + 5 = (x + 1) \cdot 3 + 2$

Dividiendo esta igualdad por el cociente obtenemos que: $\dfrac{3x+5}{x+1} = \dfrac{(x+1)\cdot 3}{x+1} + \dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow y = \dfrac{3x+5}{x+1} = 3 + \dfrac{2}{x+1}$

Así, la gráfica de $y = \dfrac{3x+5}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} + 3$ es la hipérbola obtenida al trasladar la función $y = \dfrac{2}{x}$ de modo de su centro sea el punto $(-1, 3)$.





Observa que la asíntota horizontal es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la asíntota vertical se obtiene en el valor de x que anula al denominador.

Las ***funciones racionales*** del tipo $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ se pueden expresar siempre de la forma $y = \dfrac{k}{x+h} + p$.

Su representación gráfica es una ***hipérbola*** cuya ***asíntota horizontal*** es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la ***asíntota vertical*** se obtiene en el valor de x que anula al denominador.

EJERCICIOS

25. Representa, mediante traslaciones, las siguientes funciones racionales.

a) $y = \dfrac{2x+1}{2x-4}$ b) $y = \dfrac{-x}{-x+1}$ c) $y = \dfrac{4x-2}{2x+1}$

7.1. Método de representación de hipérbolas.

Podemos representar funciones racionales del tipo $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mediante traslaciones, como anteriormente, o bien directamente siguiendo los pasos que a continuación se detallan:

1º. Se halla el dominio de la función: Dom $f = \{x \in \mathbf{R} \,/\, cx+d \neq 0\} = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$.

2º. Se determinan las asíntotas horizontales y verticales, y el centro de la hipérbola.

La asíntota horizontal es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la asíntota vertical se obtiene en el valor de x que anula al denominador.

Asíntota horizontal: $y = \dfrac{a}{c}$; Asíntota vertical: $x = \dfrac{-d}{c}$; Centro: $C = \left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$

3º. Se calculan los puntos de corte con los ejes cartesianos.

Eje Y: $\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, f(0)) = \left(0, \dfrac{b}{d}\right)$

Eje X: $\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ resolvemos $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 0 \Leftrightarrow ax+b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow$ es el punto $\left(\dfrac{-b}{a}, 0\right)$

4º. Para finalizar, fijamos la hipérbola ayudándonos con una tabla de valores.

Ejemplo. Estudia y representa la gráfica de la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

- Hallamos el dominio de la función resolviendo la ecuación $x - 2 = 0 \Rightarrow$ Dom $f = \mathbf{R} - \{2\}$
- Determinamos las asíntotas y centro de la hipérbola:

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x+2 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntota vertical: $x = 2$

Centro: $(2, 1)$

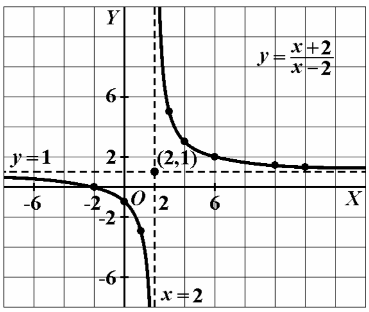
- Hallamos los puntos de corte con los ejes.

Para $x = 0$ obtenemos $y = -1$, luego la hipérbola corta al eje Y en el punto $(0, -1)$.

Resolviendo la ecuación $\dfrac{x+2}{x-2} = 0$ obtenemos $x = -2$, luego en $(-2, 0)$ corta la hipérbola al eje X.

- Construimos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	–8	–3	–2	0	1	3	4	6	7	10	12
y	0’6	0’2	0	–1	–3	5	3	2	1’8	1’5	1’4



26. Representa las siguientes hipérbolas hallando previamente su dominio, asíntotas, centro y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

a) $y = \dfrac{3x}{x+5}$ b) $y = \dfrac{3x-9}{x-2}$ c) $y = \dfrac{-6x+12}{2x+3}$ d) $y = \dfrac{4x+2}{2x-1}$

27. Halla la ecuación de una hipérbola $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ que tenga por centro el punto $(-1, 3)$ y pase por $(2, 4)$.

28. Las pérdidas y ganancias (y) de una empresa en función del tiempo (x) sigue una ley del tipo $y = \dfrac{2x-6}{x+1}$.

Ayudándote de la representación gráfica de esta función, determina:

a) Pérdidas que tuvo la empresa en su fundación.
b) El momento (valor de x) a partir del cual la empresa tendrá ganancias.
c) La ganancia máxima previsible en el futuro, si existe.
d) ¿Existirá algún momento futuro en el que las ganancias empiecen a disminuir?

29. La función que relaciona el número (y) de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear en un ordenador en función de las horas (x) empleadas es del tipo $y = \dfrac{400x+400}{x+18}$.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto dará al cabo de 3, 5 y 20 horas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) ¿Cuál es el número máximo de pulsaciones que puede dar si aumenta indefinidamente el número de horas?