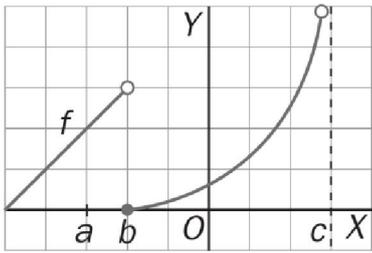


1) Dada la función de la figura, calcula:



a) $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$

b) Los límites laterales y el límite de la función en los puntos a , b y c .

2) Calcula los siguientes límites en el infinito:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+7^x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x-2}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+3x^2-1}{2x^3+8}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{6x^3+2x-3}$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7}$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x}$
- j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-2x}{7x^2+1}$
- k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-100x^{100}}{1+200x^{200}}$
- l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{4^{-x}}$
- m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2-2x$
- n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$
- ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$
- o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}$
- p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3+5x+3}}{x^2-2x}$
- q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-1}{5+x^2+\sqrt{9x^4+3x^3}}$
- r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+3}{x+2}\right)^{1-x}$
- s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right)$

3) Calcula los siguientes límites de funciones:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+2}{7-x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-3x+2}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)$
- i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2-2x+1}$
- j) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

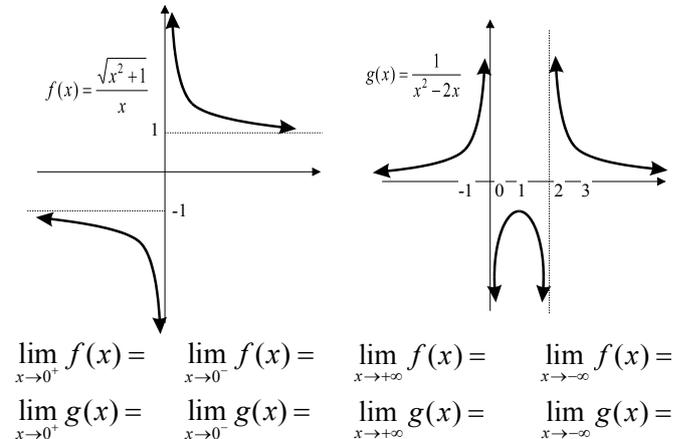
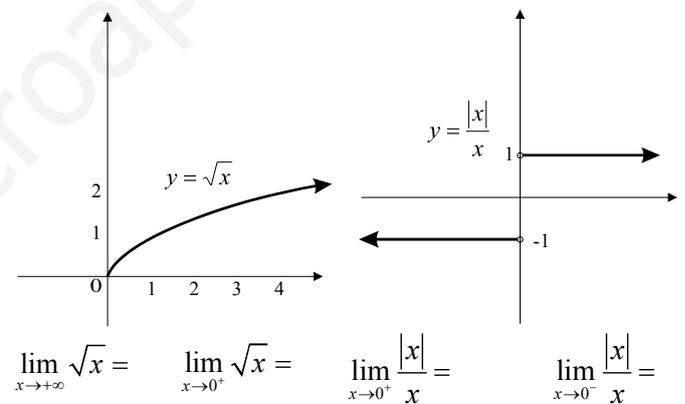
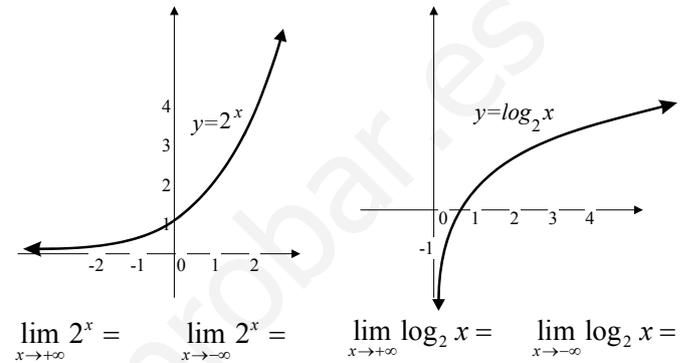
4) Sea la función definida por $f(x) = \frac{x+3}{|x|-3}$.

- a) ¿Cuál es el dominio de f ?
- b) Calcula si existen los siguientes límites
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

5) Teniendo en cuenta la continuidad de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométrica, calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{x^2+x}{x}\right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{1+e^x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_2 \frac{2x+1}{x+1}\right)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\cos(\pi+x)}{1-\sin x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2^{-x}}{1+2^x}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{1/2} x + \log_2 \frac{1}{x}\right)$

6) Fíjate en las gráficas de las siguientes funciones y di cual es el valor de los límites que se indican:



7) La famosa fórmula $m = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa m de un cuerpo en función de su velocidad v , siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s). Calcula el límite de la masa m cuando v tiende a c^- e interpreta el resultado.

8) Se ha estimado que la población de zorros de una región se rige por la fórmula: $z(t) = 100 \frac{6t^2 + 3}{2 + t^2}$

Donde $z(t)$ representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.

El veterinario de la región ha observado que, en los 6 primeros meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

9) Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determinar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

10) Calcula los siguientes límites resolviendo las posibles indeterminaciones:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{2x - 4} \right)^{-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x - 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 12}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 1} - \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x)$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 1)$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - x}{x - 2}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$

q) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 + x - 6}$

r) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 5}{(x^2 - 2)(2x^2 - 1)}$

t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x}}{x + 1}$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2} \right)$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{x^2 - 3x + 2}$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x)$

x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5 + x^2 + \sqrt{9x^4 + 3x^3}}$

y) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 6x + 9}$

z) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}$

z') $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{\sqrt{3x^2 + 7}}{x}$

11) Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$ hallar los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

12) Para el valor indicado de a , justifica si existe o no $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

a) $a = 2, f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $a = 2, f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $a = -3, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 - 3x} & \text{si } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$

d) $a = -3, f(x) = \begin{cases} \frac{9}{x^2} & \text{si } x < -3 \\ 4 + x & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$

e) $a = 0, f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x}{2 - 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f) $a = 1, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

13) Calcula razonadamente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x}$

14) Determinar los valores de a para los cuales existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

15) Halla los siguientes límites de potencias, resolviendo las posibles indeterminaciones:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2)^{-7x+55}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+3}{x+2} \right)^{1-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x+6} \right)^{\frac{3x}{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+3}{x^2+1} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-3x}{4-3x} \right)^{x-2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x^2}{x+1} \right)^{\frac{x+5}{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 5}{x^3} \right)^{2x^2 - 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \right)^x$

m) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x+2}{2x+3} \right)^{\frac{x}{x-1}}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+3}{x+2} \right)^{1-x}$

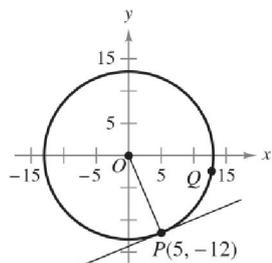
ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x^3 - 1}{2x^3 + x + 1} \right)^{\frac{x}{2x-1}}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{3x^2 + 1} \right)^{x^2}$

16) Halla el valor de a para que se cumpla:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + a}{x - a} - \frac{x^2 - a}{x + a} \right] = 6$$

17) Sea $P(5, -12)$ un punto de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 169$.

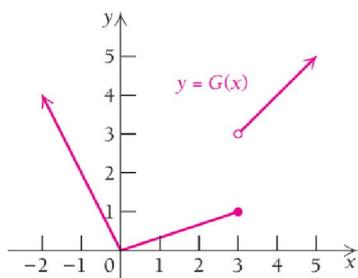


- a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une los puntos P y $O(0,0)$?
- b) Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P .
- c) Sea $Q(x, y)$ otro punto cualquiera del cuarto cuadrante. Hallar la pendiente m_x de la recta que une P y Q en términos de x .
- d) Calcula $\lim_{x \rightarrow 5} m_x$ e indica qué relación existe con el resultado del apartado b)

18) Indica si son continuas en $x=3$ las siguientes funciones. Si no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:

- a) $f(x) = (x-3)(x-4)$
- b) $g(x) = x^2 - 9$
- c) $h(x) = \frac{3}{x-3}$
- d) $g(t) = \sqrt{t-4}$
- i) $h(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$
- j) $h(t) = \frac{\sqrt[3]{(t-3)^4}}{t-3}$
- k) $f(t) = |t-3|$
- l) $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
- m) $h(x) = \frac{21-7x}{x-3}$
- n) $r(t) = \begin{cases} \frac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$
- ñ) $f(t) = \begin{cases} t-3 & \text{si } t \leq 3 \\ 3-t & \text{si } t > 3 \end{cases}$
- o) $g(t) = \begin{cases} t^2-9 & \text{si } t \leq 3 \\ (3-t)^2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

19) Sea $G(x)$ la función cuya gráfica se muestra.



- a) Halla $\lim_{x \rightarrow 3^-} G(x)$
- b) Halla $\lim_{x \rightarrow 3^+} G(x)$
- c) Halla $\lim_{x \rightarrow 3} G(x)$
- d) Halla $G(3)$
- e) ¿Es G continua en $x=3$? ¿Por qué?
- f) ¿Es G continua en $x=0$? ¿Por qué?
- g) ¿Es G continua en $x=2,99$? ¿Por qué?

20) Razonar si la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ es o no continua en los puntos $x_0=1$; $x_1=2$; $x_2=0$. Indica además los tipos de discontinuidades que presenta.

21) Hallar b para que la función $g(x) = \begin{cases} x-b & \text{si } x < 0 \\ b+1 & \text{si } x = 0 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea siempre continua.

22) Estudia la continuidad en $x=9$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x \neq 9 \\ 6 & \text{si } x = 9 \end{cases}$$

23) Estudia y clasifica las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1+2^{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2-1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x/(x-2) & \text{si } 2 < x < \infty \end{cases}$$

24) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Halla el valor de las constantes a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

25) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & \text{si } |x| < 3 \\ d & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Halla c y d para que f sea continua en $[-3, 3]$.

26) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$g(r) = \begin{cases} \frac{GMmr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GMm}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra y R el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r ?

27) Dada la función $F(x) = \begin{cases} x^2+2x-a & \text{si } x < 0 \\ 2x+b & \text{si } 0 < x < 1 \\ x+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Halla el valor de a y b para que sea continua en todo \mathbb{R} .

Calcula además $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

28) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^5 + 3x^2 + x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 3x^4 + x^2 + ax & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$

Demostrar que f es continua para cualquier valor de a .

29) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-|t|} & \text{si } t = \pm 1 \\ 0 & \text{si } t \neq \pm 1 \end{cases}$$

30) Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 10 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ kx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y halla el valor de k para que sea continua en $x = 1$.

31) Encontrar el valor que debe tener k para que la siguiente función sea continua en el punto $x_0 = 4$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ k & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

32) Halla a y b para que sea continua en todo \mathbb{R} la función:

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 2) & \text{si } x \leq 0 \\ bx + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

33) a) El espacio e recorrido por un móvil en función del tiempo t viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -2t + a & \text{si } 2 \leq t \leq 4 \\ -t^2 + 3t + b & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

Halla el valor de a y b para que sea continua para todos los valores de $t > 0$.

b) Calcula: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e(t)}{t^2 + 1}$

34) a) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ e^{x-4} + b & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Calcula el valor de las constantes a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

b) Con los valores antes calculados, halla las asíntotas horizontales de dicha función.

35) Hallar los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-x}$$

y decir si alguno de ellos es una discontinuidad evitable.

36) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 3x + 2) & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2^x + ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$?

b) Halla a para que sea continua en $x = 2$.

37) Indica en qué puntos no es continua la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2}$$

38) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x + b}{2x^3 - ax^2 - 2x}$ averigua a y b

sabiendo que en $x = 2$ presenta una discontinuidad evitable. A continuación calcula y clasifica las restantes discontinuidades.

39) Calcula las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^{10} + 8x^7 - 1$ b) $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - 25}$

c) $f(x) = \frac{3x^4 + 2x - 1}{x^4 + 1}$ d) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3}$

e) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ f) $f(x) = \log(x^2 - 16)$

g) $f(x) = \pi + \arctg x$ h) $f(x) = e^{x-1} + 2$

40) Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas.

a) $y = \frac{4x^2 + 5}{2x + 8}$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$ d) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

e) $y = \frac{x}{1-x^2}$ f) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ h) $y = \frac{2x - x^2}{x - 3}$

41) La recta $y = 2x - 3$ es una asíntota de la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + 3}{bx + ab}$$

Halla los valores de a y b .