

**Grupo A**

1.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}$ y el plano $\pi: 2x + y - 2z + 1 = 0$ (3 pts)

- Calcula la ecuación de un plano perpendicular al plano π y que contenga a la recta r .
- Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π .
- Calcula los puntos de la recta r que se encuentran a 2 unidades de distancia del plano π .

2.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$; $s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide: (3,5 pts)

- Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $Q(1, -3, 0)$ y que corta a r y s .
- Calcula la ecuación de la perpendicular común a las rectas r y s , las coordenadas de sus puntos de corte con ellas y la distancia mínima entre las rectas r y s .
- Determina la ecuación del plano que es paralelo a las rectas r y s y que pasa por el punto $P(-2, 3, 4)$.

3.- Dadas las rectas: $r \equiv x + 2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = z - a$ (2,25 pts)

- Hallar el valor de a para que las rectas estén contenidas en el mismo plano.
- Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s , el punto de corte de estas rectas y el ángulo que forman.

4.- Discutir según los valores de λ la posición relativa de los planos: (1,25 pts)

$$\pi_1 \equiv 6x + 4y + 2\lambda z = 2$$

$$\pi_2 \equiv \lambda x + y - z = 2$$

$$\pi_3 \equiv 5x + 3y + 3z = 2\lambda$$

**Grupo B**

1.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{-2} = z$; $s \equiv \frac{x+1}{4} = y = \frac{z+3}{-3}$, se pide:

- Determina la ecuación del plano que es paralelo a las rectas r y s y que pasa por el punto $P(-1, 2, -4)$
- Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $Q(0, -2, 7)$ y que corta a r y s .
- Calcula la ecuación de la perpendicular común a las rectas r y s , las coordenadas de sus puntos de corte con ellas y la distancia mínima entre las rectas r y s **(3,5 pts)**

2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 5$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$, se pide: **(3 pts)**

- Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π .
- Calcula los puntos de la recta r que se encuentran a $\sqrt{14}$ unidades de distancia del plano π .
- Calcula la ecuación de un plano perpendicular al plano π y que contenga a la recta r .

3.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$, y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$. **(2,25 pts)**

- Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.
- Para $m = -1$ y $k = 3$ calcula el ángulo que forman la recta y el plano y la ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

4.- Discutir según los valores de a la posición relativa de los planos: **(1,25 pts)**

$$\pi_1 \equiv x - y = 2$$

$$\pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0$$

$$\pi_3 \equiv x - y + az = 1$$

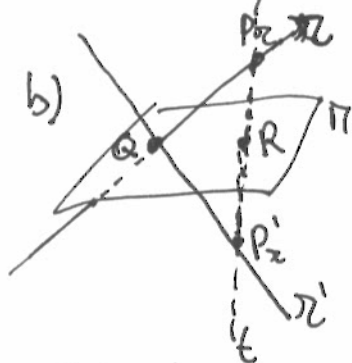
(A) (1) $P_2(3, -1, 5)$ a) $\alpha \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_\pi$ es v. director de α

$\vec{v}_2(2, -1, 1)$

$\alpha \supset \pi \Rightarrow P_2, \vec{v}_2 \in \alpha$

$\vec{n}_\pi(2, 1, -2)$

$\alpha = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\alpha = x-3+6(y+1)+4(z-5)=$
 $\alpha = x+6y+4z-17=0$



Q = plo de corte de π con π

$2(3+2\lambda)+(-1-\lambda)-2(5+\lambda)+1=0$

$\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=4$

Q(11, -5, 9)

Recta $t \perp \pi$ que pasa por $P_2 \Rightarrow t = \begin{cases} x=3+2\mu \\ y=-1+\mu \\ z=5-2\mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$

R = plo de corte de t con π

$2(3+2\mu)+(-1+\mu)-2(5-2\mu)+1=0$

$9\mu-4=0 \Rightarrow \mu=4/9 \Rightarrow R(\frac{35}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{37}{9})$

$R = \frac{P_2 + P'_2}{2} \Rightarrow P'_2 = 2R - P_2 = (\frac{70}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{74}{9}) - (3, -1, 5)$

$P'_2 = (\frac{43}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{29}{9})$

El vector director de la recta simétrica es

$\vec{QP'_2} = (-\frac{56}{9}, \frac{44}{9}, -\frac{52}{9}) \simeq (-56, 44, -52) \simeq (14, -11, 13)$

$\pi' = \frac{x-11}{14} = \frac{y+5}{-11} = \frac{z-9}{13}$

c) $P(3+2\lambda, -1-\lambda, 5+\lambda) \Rightarrow d(P, \pi) = 2$

$\frac{|2(3+2\lambda)+(-1-\lambda)-2(5+\lambda)+1|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 ; | \lambda-4 | = 6$

$\lambda-4=6 \Rightarrow \lambda=10 \Rightarrow P_1(23, -11, 15)$

$\lambda-4=-6 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow P_2(-1, 1, 3)$

(2) a) t corta a $r \Rightarrow$ Son coplanarias $\Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$
 $\pi_1 \equiv \{Q, P_2, \vec{v}_r\}$

t corta a $s \Rightarrow$ Son coplanarias $\Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
 $\pi_2 \equiv \{Q, P_3, \vec{v}_s\}$

La recta t es la intersección de estos planos

$$t \equiv \begin{cases} 10x + 4y - 3z + 2 = 0 \\ -4x + 7y + 5z + 25 = 0 \end{cases}$$

b) Recta $t \perp r$ $\begin{cases} \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-1, 1, -2) \times (3, 1, 1) = (3, -5, -4) \\ t \perp s \end{cases}$

t corta a $r \Rightarrow$ Tienen un punto $Q(-\lambda, 1+\lambda, 2-2\lambda)$ en común

t corta a $s \Rightarrow$ Tienen un punto $P(5+3\mu, \mu, -1+\mu)$ en común

$\vec{PQ} \simeq \vec{v}_t (3, -5, -4) \Rightarrow (-5-3\mu-\lambda, 1+\lambda-\mu, 3-2\lambda-\mu)$

$$\frac{-5-\lambda-3\mu}{3} = \frac{1+\lambda-\mu}{-5} = \frac{3-2\lambda-\mu}{-4}$$

$$\begin{cases} 25 + 5\lambda + 15\mu = 3 + 3\lambda - 3\mu \\ -4 - 4\lambda + 4\mu = -15 + 10\lambda + 5\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 18\mu = -22 \\ -14\lambda - \mu = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14\lambda + 126\mu = -154 \\ -14\lambda - \mu = -11 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{22}{25} \Rightarrow Q\left(\frac{-22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

$$\begin{cases} 14\lambda + 126\mu = -154 \\ -14\lambda - \mu = -11 \end{cases} \Rightarrow \mu = \frac{-33}{25} \Rightarrow P\left(\frac{26}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-58}{25}\right)$$

$t \equiv \begin{cases} x = -\frac{22}{25} + 3\alpha \\ y = -\frac{33}{25} - 5\alpha \\ z = \frac{-58}{25} - 4\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$d(r, s) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{-48}{25}\right)^2 + \left(\frac{80}{25}\right)^2 + \left(\frac{64}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{800}}{25} = \frac{16\sqrt{2}}{5} u$

c) $\beta \parallel r$
 $\beta \parallel s$
 β pasa por P

$$\Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv 3x - 5y - 4z + 37 = 0$$

(3)

(3) a) como $\vec{v}_2(1, -2, 3) \neq \vec{v}_3(3, -1, 1) \Rightarrow$ las rectas son coplanares si se cortan $\Rightarrow \{P_2, P_3, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a - 6a - 3 - 1 = 0 \Rightarrow -5a + 4 = 0; a = \frac{4}{5}$$

b) $\pi = \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $(x+2) + 8(y-1) + 5z = 0$
 $\pi = x + 8y + 5z - 6 = 0$

pto de corte. $\begin{cases} -2 + \lambda = -1 + 3\mu \\ 1 - 2\lambda = -\mu \\ 3\lambda = \frac{7}{5} + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 3\mu = 1 \\ -2\lambda + \mu = -1 \\ 15\lambda - 5\mu = 7 \end{cases}$

$$2\lambda - 6\mu = 2$$

$$-2\lambda + \mu = -1$$

$$\frac{-5\mu = 1}{-5\mu = 1} \Rightarrow \mu = -1/5 \Rightarrow P\left(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$\alpha(x, y) = \arccos \frac{(1, -2, 3) \cdot (3, -1, 1)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \arccos \frac{8}{\sqrt{154}} =$$

$$= 49^\circ 51' 36'' = 0.87 \text{ rad.}$$

(4) $|M| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 20 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 18 - 12\lambda = 6\lambda^2 - 22\lambda + 16$
 $3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 8/3$
 $\lambda = 1$

Caso 1° - si $\lambda \neq 1, \frac{8}{3} \Rightarrow \text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 3 \Rightarrow$ son tres planos que se cortan en un punto.

Caso 2° - si $\lambda = 1 \Rightarrow \text{Rg } M = 2; \text{Rg } M^* = 3 \Rightarrow$ No tienen pto en común.

$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad E_3 = E_1 - E_2$ son 3 planos que se cortan 2 a 2 formando un prisma triangular

Caso 3° - si $\lambda = 8/3 \Rightarrow \text{Rg } M = 2 \Rightarrow \text{Rg } M^* = 3 \Rightarrow$ No tienen pto en común.

$$M^* = \begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{64}{3} + 32 + 6 + 6 - 24 - \frac{256}{9} = -\frac{268}{9} \neq 0$$

son tres planos que se cortan 2 a 2 formando un prisma triangular.

(13) ① a) $\pi \perp r \Rightarrow \vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son v. dirección de π . ④
 $\pi \perp s$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \underline{\pi \equiv 5x + y + 7z + 31 = 0}$$

b) t corta a $r \Rightarrow$ son coplanares $\Rightarrow \pi_1 \equiv \{Q, P_2, \vec{v}_r\} = 0$

t corta a $s \Rightarrow$ son coplanares $\Rightarrow \pi_2 \equiv \{Q, P_5, \vec{v}_s\} = 0$

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-7 \\ -3 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-7 \\ -1 & 2 & -10 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

La recta t es la intersección de estos 2 planos

$$t \equiv \begin{cases} x - y - z + 5 = 0 \\ 4x - 43y - 9z - 23 = 0 \end{cases}$$

c) $t \perp r \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \times (4, 1, -3) = (5, 1, 7)$

$t \perp s$
 t corta a $r \Rightarrow$ son coplanares $\Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

t corta a $s \Rightarrow$ son coplanares $\Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

t es la intersección de estos planos.

$$t \equiv \begin{cases} 15x - 12y - 9z + 69 = 0 \\ 10x - 43y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

• Pto de corte de t con $r \equiv (-3-\lambda, 2-2\lambda, \lambda) = P$

$$-30 - 30\lambda - 86 + 85\lambda - \lambda + 7 = 0; \quad 55\lambda - 109 = 0; \quad \lambda = \frac{109}{55}$$

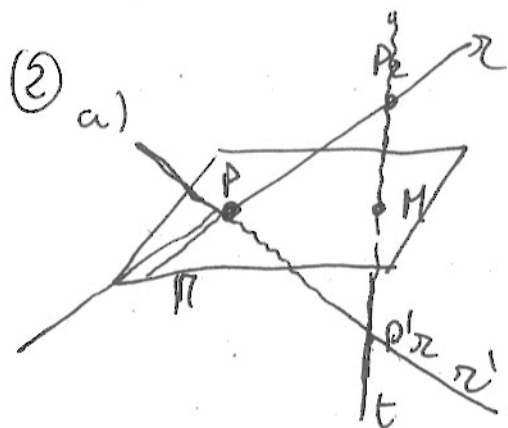
$$P\left(\frac{-274}{55}, \frac{-108}{55}, \frac{109}{55}\right)$$

• Pto de corte de t con $s \equiv (-1+4\mu, \mu, -3-3\mu) = Q$

$$-15 + 60\mu - 12\mu + 27 + 27\mu + 69 = 0; \quad 75\mu + 81 = 0; \quad \mu = \frac{-81}{75}$$

$$Q\left(\frac{-133}{25}, \frac{-81}{75}, \frac{6}{25}\right)$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{P}_2 \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\sqrt{25+1+16}} = \frac{13}{\sqrt{42}} = \frac{13\sqrt{3}}{15} u. \quad (5)$$



$$2(5+\lambda) - 3(-2+3\lambda) + (1-\lambda) = 5$$

$$10 + 2\lambda + 6 - 9\lambda + 1 - \lambda = 5$$

$$-8\lambda = -12 \Rightarrow \lambda = 3/2 \Rightarrow P\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$t \perp \pi$ pasa por P_2

$$x = 5 + 2\mu$$

$$t: y = -2 - 3\mu \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$z = 1 + \mu$$

$$M = \text{pto de corte de } t \text{ con } \pi \Rightarrow 2(5+2\mu) - 3(-2-3\mu) + (1+\mu) = 5$$

$$14\mu = -12 \Rightarrow \mu = -6/7 \Rightarrow M\left(\frac{23}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

$$M = \frac{P_2 + P'_2}{2} \Rightarrow P'_2 = 2M - P_2 = \left(\frac{46}{7}, \frac{8}{7}, \frac{2}{7}\right) - (5, -2, 1) = \left(\frac{11}{7}, \frac{22}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

$$\vec{v}_{r'} = \vec{P}_2 P'_2 = \left(\frac{-69}{14}, \frac{9}{14}, \frac{-3}{14}\right) \simeq (-69, 9, -3) \simeq (-23, 3, -1)$$

$$r' : \begin{cases} x = 13/2 - 23\alpha \\ y = 5/2 + 3\alpha \\ z = -1/2 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$b) P_2(5+\lambda, -2+3\lambda, 1-\lambda) \Rightarrow d(P_2, \pi) = \frac{|2(5+\lambda) - 3(-2+3\lambda) + (1-\lambda) - 5|}{\sqrt{4+9+1}}$$

$$|-8\lambda + 12| = 14 \rightarrow -8\lambda + 12 = 14 \Rightarrow -8\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow P_1\left(\frac{19}{4}, -\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\rightarrow -8\lambda + 12 = -14 \Rightarrow -8\lambda = -26 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{4} \Rightarrow P_2\left(\frac{33}{4}, \frac{31}{4}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$c) \alpha = \begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \alpha = -y - 3z + 1 = 0$$

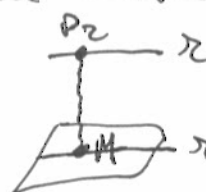
$$(3) a) r \subset \pi \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow (m, 4, 2) \cdot (2, -1, k) = 0 \Rightarrow 2m - 4 + 2k = 0$$

$$P_2 \in \pi \Rightarrow 2 - 0 + k = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2} \Rightarrow 2m - 4 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

$$b) \alpha = \text{Arc sen} \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}_\pi|} = \text{Arc sen} \frac{-2 - 4 + 6}{\sqrt{1+16+4} \sqrt{4+1+9}} = 0^\circ$$

6

La recta r es paralela a Π



$$\left. \begin{array}{l} \text{recta } t \perp \Pi \\ \text{Pasa por } P_2 \end{array} \right\} t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$M = \text{pto de corte } 2(1+2\alpha) + \alpha + 3(1+3\alpha) = 0$

$14\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -5/14 \Rightarrow M \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-1}{14} \right)$

$M = \frac{P_2 + P_{r'}}{2} \Rightarrow P_{r'} = 2M - P_2 = \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-1}{7} \right) - (1, 0, 1) = \left(\frac{-3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-8}{7} \right)$

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{7} - \mu \\ y = \frac{5}{7} + 4\mu \\ z = -\frac{8}{7} + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a \quad \begin{array}{l} 2+2+a^2 = a^2+a=0 \rightarrow a=0 \\ \rightarrow a=-1 \end{array}$$

Caso 1°.- Si $a \neq 0, -1 \Rightarrow \text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 3 \Rightarrow$ Son tres planos que se cortan en un punto

Caso 2°.- Si $a = 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{Rg } M^* = 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Los planos Π_1 y Π_2 son paralelos y Π_3 los corta.

Caso 3°.- Si $a = -1 \Rightarrow \text{Rg } M = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rg } M^* = 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ No hay planos paralelos.}$$

Son tres planos que se cortan en la misma recta.