COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA	**2ª EVALUACIÓN**	**CURSO 2014/15**
	ASIGNATURA:______________________	FECHA.___4/02/2015___
	ALUMNO:______________________	2º BACHILLERATO: __

Grupo A

1.- Se consideran las rectas: $r: x = y - 6 = \frac{z-5}{2}$; $s: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -4+3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto P(2, -1, 1) y cuyo vector dirección es perpendicular a los vectores dirección de las rectas anteriores. **(0.75 pto)**

2.- Sean las rectas: $r \equiv x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

a) Hallar k para que r y s sean coplanarias. **(1 pto)**
b) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas. **(1 pto)**
c) Para el valor anterior de k=2 hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas. **(1,5 ptos)**

3.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto P(1, 1, 1). Dado el punto Q(0, 0, 0) de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1 u^2. **(1,5 puntos)**

4º a)Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos A (4, 1, –3) y B (3, 2, 1) y que tiene su centro en la recta $r \equiv \frac{x-8}{2} = y - 3 = \frac{z+4}{-1}$ **(1,5 puntos)**

b) Hallar la posición relativa de la esfera anterior con el plano π: 2x – y + 2z + 1 = 0 **(0,5 puntos)**

5º) .- Dado el sistema
$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda\ ; \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda\ ; \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1\ ; \end{cases}$$
, se pide: **(2,25 ptos)**

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) Resolver cuando tenga más de una solución
c) Interpretar geométricamente

(A) ②

1º Construimos Π_1 que contiene a $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$ y a r

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} P_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v_r} = (1, 2, -2) \\ \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (2, -4, -3) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-14) - (y-1)(1) + (z+1)(-8) = 0$$

$$\boxed{-14x - y - 8z + 21 = 0}$$

2º Construimos Π_2 que contiene a $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$ y a s

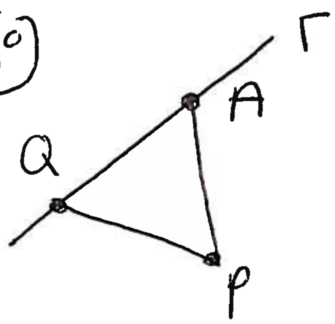
$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P_s = (1, 2, 0) \\ \vec{v_s} = (1, -1, 2) \\ \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (2, -4, -3) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(11) - (y-2)(-7) + z(-2) = 0$$

$$11x - 11 + 7y - 14 - 2z = 0 \qquad \boxed{11x + 7y - 2z - 25 = 0}$$

La perpendicular común es $\begin{cases} -14x - y - 8z + 21 = 0 \\ 11x + 7y - 2z - 25 = 0 \end{cases}$

3º



$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad A = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\vec{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\vec{QP} = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (2\lambda, -2\lambda, 0) \right| = 1$$

$$\sqrt{8\lambda^2} = 2 \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad A_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

A

A 1

1) $r: x = y - 6 = \frac{z-5}{2}$

$s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$

$P_r = (0,6,5)$

$\vec{V_r} = (1,1,2)$

$P_s = (3,-4,0)$

$\vec{V_s} = (1,3,0)$

$P = (2,-1,1)$

$$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2)$$

$$\boxed{\frac{x-2}{-6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}}$$

2) a) $P_r = (2,1,-1)$ $P_s = (1,2,0)$

$\vec{V_r} = (1, k, -2)$ $\vec{V_s} = (1,-1,2)$

$\frac{\vec{V_r}}{\vec{V_s}} : \frac{1}{1} = \frac{k}{-1} \neq \frac{-2}{2}$ No pueden ser paralelas

$\vec{P_rP_s} = (-1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{P_rP_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k - 2 - 1 + k - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

$-3k = 3$ $\boxed{k = -1}$

Si $k = -1$ r y s se cortan en un punto

b) $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{x + y - 3 = 0}$

c) Si $k = 2$ r y s se cruzan

$$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2, -4, -3)$$

A 3

4º) $A=(4,1,-3)$ $B=(3,2,1)$

a)

$r \equiv \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{-1}$ $\begin{cases} x=8+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases}$ $P_r=(8+2\lambda,\ 3+\lambda,\ -4-\lambda)=C$

$\vec{AC}=(2\lambda+4,\ \lambda+2,\ -\lambda-1)$ $r=|\vec{AC}|=\sqrt{4\lambda^2+16+16\lambda+\lambda^2+4+4\lambda+\lambda^2+1+2\lambda}$

$\vec{BC}=(2\lambda+5,\ \lambda+1,\ -\lambda-5)$ $r=|\vec{BC}|=\sqrt{4\lambda^2+25+20\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2+25+10\lambda}$

$|\vec{AC}|=|\vec{BC}| \rightarrow 22\lambda+21=32\lambda+51$

$-10\lambda=30$ $\boxed{\lambda=-3}$

$C=(2,0,-1)$ $r=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{9}=3$

$\boxed{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=3}$

b) $\pi: 2x-y+2z+1=0$ $C=(2,0,-1)$

$d(C,\pi)=\dfrac{|4-0-2+1|}{\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1<r \Rightarrow$ el plano es secante con la esfera

5º

$\begin{cases} 2x+\lambda y+\lambda z=1-\lambda \\ x+y+(\lambda-1)z=-2\lambda \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda-1 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A|=2+\lambda(\lambda-1)^2+\lambda-\lambda(\lambda-1)-\lambda-2(\lambda-1)=0$

$\lambda^3-3\lambda^2+4=0$ $\begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=2 \end{cases}$

a) Si $\lambda \neq -1$ y 2 $|A|\neq 0$ $rang(A)=rang(A^*)=3$ S.C.D.

b) Si $\lambda=-1$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & +2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & +2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$

$2F_2-F_1$
F_3+F_1

$rang(A)=rang(A^*)=2<$ nº incógnitas

S.C.I.

$\textcircled{A}$

a) Si $\lambda = +2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 1$
$rang(A^*) = 2$
S. I.

b) Si $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3y - 3z = -2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$y = \dfrac{-2 + 3\lambda}{3}$ $\quad x = \dfrac{2+y+z}{2} = \dfrac{6 - 2 + 3\lambda + 3\lambda}{6} =$

$x = \dfrac{4 + 3\lambda}{3}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4+3\lambda}{3} \\ y = -\dfrac{2+3\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Si $\lambda \neq -1$ y 2 S.C.D. 3 planos que se cortan en un pto

- Si $\lambda = -1$

rang $(\Pi_1$ y $\Pi_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$ $rang(\Pi_1, \Pi_2) = 2$ Se cortan

$(\Pi_2$ y $\Pi_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $rang(\Pi_1, \Pi_3) = 2$ Se cortan

$(\Pi_1$ y $\Pi_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $rang(\Pi_1, \Pi_3) = 1$ coincidentes

Π_1 y Π_3 son coincidentes y Π_2 los corta.

- Si $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ los 3 planos son paralelos

COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA	**2ª EVALUACIÓN**	**CURSO 2014/15**
	ASIGNATURA:______________________	FECHA.__________
	ALUMNO:______________________	2º BACHILLERATO: __

Grupo B

1.- Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar la ecuación del plano que es perpendicular al plano π y que pasa por los puntos A y B **(0,75 ptos)**

2.-Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{a} = z$

a) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a. **(1 pto)**
b) Calcular la distancia entre r y s cuando a = -2. **(1 pto)**
c) Para a=1 hallar la ecuación de la perpendicular común **(1,5 ptos)**

3.- Hallar los puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, cuya distancia al plano π: $2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1u. **(1,5 ptos)**

4.-Halla las ecuaciones de las esferas tangentes a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tienen su centro en la recta: $r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ **(2 puntos)**

5.- Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array}\right\}$ Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) Resolver cuando tenga más de una solución
c) Interpretar geométricamente **(2,25 ptos)**

$((x^2-1)(x^2+3))$

① B

1) $A = (1,0,1)$ $B = (0,2,0)$ $\pi \equiv x-2y-z-7=0$

$\Pi \equiv \begin{cases} A=(1,0,1) & \vec{AB} = (-1,2,-1) \\ B=(0,2,0) \\ \vec{n}_\Pi = (1,-2,-1) \end{cases}$ $\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$(x-1)(-4) - y(2) + \cancel{(z-1)0} = 0$ $\boxed{-4x-2y+4=0}$ π'

2) $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$ $P_r = (0,0,-1/6)$ $\vec{V_r} = (-1, 1, -1/2)$ $P_s = (0,-1,0)$ $\vec{V_s} = (2, a, 1)$

$\frac{\vec{V_r}}{\vec{V_s}} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{a} = \frac{-1/2}{1}$ Si $a=-2$ r y s son //

$\vec{P_rP_s} = (0,-1,\frac{1}{6})$ $\begin{vmatrix} \vec{P_rP_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \frac{a+2}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$ Si $a \neq -2$ se cruzan.

b) Como si $a=-2$ son paralelas

$d(P_r, s) = \frac{|\vec{P_rP_s} \times \vec{V_s}|}{|\vec{V_s}|} = \frac{\frac{\sqrt{\cancel{59}\,41}}{3}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{\cancel{53}\,41}}{9}\ u}$

$|\vec{P_rP_s} \times \vec{V_s}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2)$

c) Si $a=+1$ r y s se cruzan

$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,0,-6) = (1,0,-2)$

B ②

1º) Construyo Π_1 que contiene a r y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} P_r = (0,0,-1/6) \\ \vec{v}_r = (-1,1,-1/2) = (-2,2,-1) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1,0,-2) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z+\frac{1}{6} \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-4) - y(5) + \left(z+\frac{1}{6}\right)(-2) = 0 \qquad \boxed{-4x-5y-2z-\frac{1}{3}=0}$$

2º Construyo Π_2 que contiene a s y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} P_s = (0,-1,0) \\ \vec{v}_s = (2,1,1) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1,0,-2) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-2) - (y+1)(-5) + z(-1) = 0 \qquad -2x+5y+5-z=0 \qquad \boxed{-2x+5y-z+5=0}$$

La perpendicular común es $\begin{cases} -12x-15y-6z-1=0 \\ -2x+5y-z+5=0 \end{cases}$

③ $P_r = (3+\lambda,\ 5+\lambda,\ -1-\lambda)$ $\qquad \pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$

$$d(P_r,\pi) = \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1+\lambda) + 1|}{\sqrt{9}} = 1 \qquad |\lambda| = 3 \qquad \lambda = \pm 3$$

$P_1 = (6, 8, -4)$ $\qquad P_2 = (0, 2, +2)$

④ $C = (-2, 0, \lambda)$ $\qquad d(C,\Pi_1) = d(C,\Pi_2)$

$\Pi_1 \equiv x - 2z - 8 = 0$

$\Pi_2 = 2x - z + 5 = 0$

$$\frac{|-2-2\lambda-8|}{\sqrt{5}} = \frac{|-4-\lambda+5|}{\sqrt{5}} = r$$

$$|-2\lambda-10| = |-\lambda+1| \qquad \begin{cases} -2\lambda-10 = -\lambda+1 \\ \quad -\lambda = -11 \quad \boxed{\lambda=-11} \\ -2\lambda-10 = \lambda-1 \\ \quad -3\lambda = +9 \quad \boxed{\lambda=-3} \end{cases}$$

① Si $\lambda = -11$ $\quad C = (-2,0,-11)$ $\qquad$ ② Si $\lambda = 3$ $\quad C = (-2,0,-3)$

$$r = \frac{|-2+22-8|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \qquad r = \frac{|-2+6-8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$S_1: (x+2)^2 + y^2 + (z-11)^2 = \frac{144}{5}$ $\qquad$ $S_2: (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{16}{5}$

⑤ $\begin{cases} y+z=1 \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \end{cases}$

B ③

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A|=\cancel{1}(\lambda-1)^2\cancel{-1}+(\lambda-1)=\lambda^2+\cancel{1}-2\lambda+\lambda-\cancel{1}=\lambda^2-\lambda=0$

$\boxed{\lambda=0 \quad \lambda=1}$

1º) Si $\lambda\neq 0$ y -1 $|A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(A^*)=3=$ nº incógnitas S.C.D

2º) Si $\lambda=0$ $|A|=0 \Rightarrow rang(A)<3$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $rang(A)=rang(A^*)=2$ S.C.I.

3º) Si $\lambda=1$ $|A|=0 \Rightarrow rang(A)<3$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $rang(A)=rang(A^*)=2$ S.C.I

b) Si $\lambda=0$

$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t+t \\ y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$z=t$

Si $\lambda=1$

$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbb{R}$

c) Si $\lambda\neq 0$ y 1 3 planos que se cortan en un punto

Si $\lambda=0$

$\begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $(\pi_1 \text{ y } \pi_2)$ $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{0}$ Se cortan

$(\pi_1 \text{ y } \pi_3)$ $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{-1}$ Se cortan

$(\pi_2 \text{ y } \pi_3)$ $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}=\frac{1}{-1}=\frac{0}{0}$ Coincidentes

π_2 y π_3 son coincidentes y π_1 los corta

Si $\lambda = 1$

$$\begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

π_1 y π_2 = coincidentes

π_1 y π_3 se cortan