

**2ª EVALUACIÓN****CURSO 2013/14**

ASIGNATURA: _____

FECHA: _____

ALUMNO: _____

2º BACHILLERATO: _____

Grupo A

1.- Dadas las rectas: $r \equiv x + 2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = z - a$

- a) Para qué valores de a las rectas r y s se cruzan (0,75 puntos)
- b) Para $a = -2$, determinar la recta que pasa por el punto $A(1, -1, 0)$ y corta a las rectas r y s . (1 punto)
- c) Para ese valor de a calcular la distancia entre las rectas r y s . (0,5 puntos)
- d) Calcular la ecuación de un plano paralelo a las rectas r y s que pasa por el punto $P(-3, 1, -1)$ (0,75 puntos)

2.- Dado el plano $\pi: x - 5y + 2z - 3 = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

- a) Hallar un punto P de la recta r , de manera que la distancia de P al plano π sea 1 u. (1 punto)
- b) Calcular el punto simétrico de $Q(2, -1, 3)$ respecto del plano π (1 punto)
- c) Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π . (1 punto)

3.- Los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(-4, 4, 7)$ son los extremos del diámetro de una esfera.

- a) Obtener su ecuación cartesiana.
- b) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto $A(2, 4, -3)$ (1,75 puntos)

4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} (m-1)x + y + z = m \\ y + z = 1 \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$

- a) Discutirlo según los diferentes valores del parámetro m .
- b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado
- c) Interpretar geométricamente

(2,25 puntos)

www.yoquieroaprobar.es

① a) $P_r = (-2, 1, 0)$ $\vec{V_r} = (1, -2, 3)$ $\vec{V_s} = (3, -1, 1)$ $\frac{\vec{V_r}}{\vec{V_s}} = \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{1}$ No son paralelos

$P_s = (-1, 0, a)$ $\vec{P_r P_s} = (1, -1, a)$

$\vec{V_s} = (3, -1, 1)$ $\begin{vmatrix} \vec{P_r P_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a - 9 - 6a - 3 - 1 = 5a - 7$
 $a = 7/5$

Si $a = 7/5$ se cumple, si $a \neq 7/5$ de lo contrario

b) Para $a = -2$ $A = (1, -1, 0)$

1º Hallamos un plano que contiene a r y a A

$\Pi_1 = \begin{cases} P_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{V_r} = (1, -2, 3) \\ \vec{P_r A} = (3, -2, 0) \end{cases} \Rightarrow \Pi_1: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$6(x+2) + 9(y-1) + 4z = 0$

$\Pi_1: 6x + 9y + 4z + 3 = 0$

Es correcta y sy pasa por A
 $t = \begin{cases} 6x + 9y + 4z + 3 = 0 \\ -x - 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$

2º Hallar un plano que contiene a s y a A

$\Pi_2 = \begin{cases} P_s = (-1, 0, -2) \\ \vec{V_s} = (3, -1, 1) \\ \vec{P_s A} = (2, -1, 2) \end{cases} \begin{vmatrix} x+1 & y & z+2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$
 $-(x+1) - 4y - (z+2) = 0$

$\Pi_2: -x - 4y - z - 3 = 0$

c) $\vec{P_r P_s} = (1, -1, -2)$

$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 8, 5)$ $\begin{vmatrix} \vec{P_r P_s} \\ \vec{V_r} \\ \vec{V_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 9 + 2 - 12 + 1 + 3$

$d(r, s) = \frac{|17|}{\sqrt{1+64+25}} = \frac{17}{\sqrt{90}} = \frac{17\sqrt{10}}{30}$

1) Plano paralelo a r y s que pasa por $P = (-3, 1, 1)$

$\vec{n} = (1, 8, 5)$ $x + 8y + 5z + 0 = 0$

$\vec{V_r} \times \vec{V_s}$ $-3 + 8 + 5 + 0 = 0$

$n = \textcircled{1}$

$\Pi: x + 8y + 5z = 0$

(2)

$$\Pi: x - 5y + 2z - 3 = 0$$

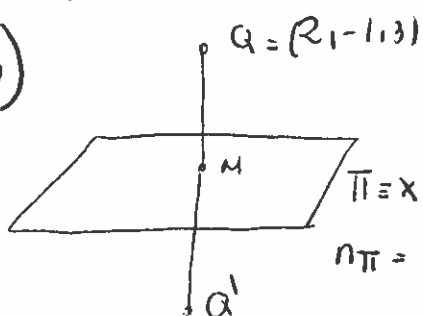
$$P_r = (4 - \lambda, -1 - 3\lambda, -2\lambda)$$

$$d(P, P_r) = \frac{|4 - \lambda - 5(-1 - 3\lambda) + 4(-2\lambda) - 3|}{\sqrt{1 + 25 + 4}} = 1$$

$$\frac{|6 + 10\lambda|}{\sqrt{30}} = 1 \begin{cases} 6 + 10\lambda = \sqrt{30} & \lambda_1 = \frac{\sqrt{30} - 6}{10} \\ 6 + 10\lambda = -\sqrt{30} & \lambda_2 = \frac{-\sqrt{30} - 6}{10} \end{cases}$$

$$P_1 = \left(\frac{46 - \sqrt{30}}{10}, \frac{8 - 3\sqrt{30}}{10}, \frac{6 - \sqrt{30}}{5} \right) \quad P_2 = \left(\frac{46 + \sqrt{30}}{10}, \frac{8 + 3\sqrt{30}}{10}, \frac{6 + \sqrt{30}}{10} \right)$$

b)



1º calculamos la recta $\perp$ a Π que pasa por Q

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

2º calculamos $M = \Gamma \cap \Pi$

$$2 + \lambda - 5(-1 - 5\lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow M = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

$$30\lambda + 10 = 0 \quad \lambda = -1/3$$

$$3^\circ \quad Q' = 2M - Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3} \right) - (2, -1, 3) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

$$\vec{V}_r \cdot \vec{n}_\Pi = (-1, -3, -2) \cdot (1, -5, 2) = -1 + 15 - 4 \neq 0 \quad \Gamma \text{ y } \Pi \text{ se cortan en 1 punto}$$

$$P_r = (4, -1, 0) \quad \vec{n}_\Pi = (1, -5, 2)$$

Simétrico de P_r

S. recta $\perp$ a Π que pasa por P_r

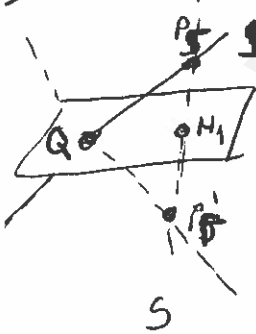
$$S \equiv \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = -1 - 5\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

$$4 + \mu - 5(-1 - 5\mu) + 2(2\mu) - 3 = 0$$

$$4 + \mu + 5 + 25\mu + 4\mu - 3 = 0 \quad 30\mu + 6 = 0 \quad \mu = -1/5$$

$$M_1 = \left(\frac{14}{5}, 0, -2/5 \right)$$

$$P_r' = 2M_1 - P_r = \left(\frac{18}{5}, 1, -\frac{4}{5} \right)$$



Hallamos el punto de intersección de Π_y y r

$$4 - \lambda - 5(-1 - 3\lambda) - 4\lambda - 3 = 0 \quad 10\lambda + 6 = 0 \quad \lambda = -3/5$$

$$Q = \left(\frac{23}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

Recta simétrica pasa por Q y $P_{r'}$

$$r' \begin{cases} Q = \left(\frac{23}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5} \right) \\ P_{r'} = \left(\frac{13}{5}, 1, -\frac{4}{5} \right) \end{cases} \quad \vec{P_{r'}Q} = \left(1, -\frac{1}{5}, 2 \right)$$

$$r' = \frac{x - 13/5}{1} = \frac{y - 1}{-1/5} = \frac{z + 4/5}{2}$$

(3) $A = (2, 4, -3)$ $B = (-4, 4, 7)$

a) $\vec{AB} = (-6, 0, 10)$

$$r = \frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = \sqrt{34}$$

$$C = \frac{A+B}{2} = (-1, 4, 2)$$

$$S: (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 34$$

b) $\vec{AC} = (-3, 0, 5)$ $n = (2, 4, -3)$

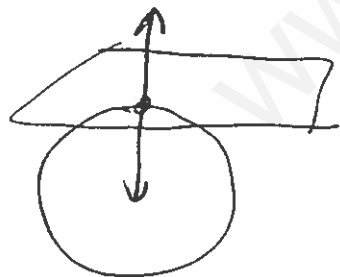
$$\vec{n}_n = (-3, 0, 5)$$

$$-3x + 5z + 0 = 0$$

$$-6 - 15 + 0 = 0$$

$$0 = 9$$

$$\Pi: -3x + 5z + 9 = 0$$



$$) \quad |A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m+1 - (1+(m-1)^2) = -m+1 - m^2 - 1 + 2m = -m^2 + m = 0$$

$m=0$
 $m=1$

Caso 1 Si $m \neq 0, 1$ $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = n^\circ \text{ incógnitas}$. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (*Solución única)

Caso 2 Si $m=0$ $|A|=0$ $\text{rang}(A) < 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n^\circ \text{ incógnitas}$$

aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado

Caso 3 $m=1$ $|A|=0$ $\text{rang}(A) < 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < 5$$

Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado

$$b) \quad \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - x \\ z = x \end{cases} \quad \text{Caso 2} \quad m=0$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{Caso 3} \quad m=1$$

c) Caso 1 los 3 planos se cortan en 1 punto

Caso 2 Π_1 y Π_3 son coincidentes y Π_2 los corta en una recta

Caso 3 Π_1 y Π_2 son coincidentes y Π_3 los corta en una recta

**2ª EVALUACIÓN****CURSO 2013/14**

ASIGNATURA: _____

FECHA: _____

ALUMNO: _____

2º BACHILLERATO: _____

Grupo B

1.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$ y $s \equiv x+4 = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{2}$

- a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s . (0,75 puntos)
- b) Determinar la distancia de r a s (0,5 puntos)
- c) Calcular la ecuación de la recta perpendicular a las rectas r y s y que las corta (1 pto)
- d) Calcular el punto simétrico de $P(-1, 2, -2)$ respecto de la recta s . (1 pto)

2.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$. Se pide:

- a) ¿Para qué valores de m y n son paralelos r y π ? Para esos valores hallar la distancia de r a s (1 Punto)
- b) Para $m = 1$ y $n = 2$ calcular la ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π (1 punto)
- c) Calcular los puntos de la recta r que se encuentran a 2 unidades de distancia del plano π . (1 Punto)

3.- Los puntos $A(5, 0, -1)$ y $B(-3, 6, 1)$ son los extremos del diámetro de una esfera.

- a) Obtener su ecuación cartesiana.
- b) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto $A(5, 0, -1)$ (1,75 puntos)

4.- Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los diferentes valores del parámetro a .

$$\left. \begin{aligned} (k+1)x + 3y + kz &= 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z &= k-1 \\ kx + 2y + kz &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discutirlo según los diferentes valores del parámetro m .
- b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado
- c) Interpretar geométricamente

(2,25 puntos)

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

B (1)

$$\textcircled{1} \begin{cases} P_r = (-3, 3, 1) \\ \vec{V}_r = (-2, 1, 5) \end{cases} \quad \begin{cases} P_s = (-4, 0, -5) \\ \vec{V}_s = (1, -1, 2) \end{cases}$$

$$a) \vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (7, 9, 1)$$

$$7x + 9y + z + b = 0 \quad P_r \Rightarrow -21 + 27 + 1 + b = 0 \quad b = -7$$

$$\Pi: 7x + 9y + z - 7 = 0$$

$$b) \frac{\vec{V}_r}{\vec{V}_s} \Rightarrow \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{5}{2} \text{ no son paralelos}$$

$$\vec{P_r P_s} = (-1, -3, -6)$$

$$d(P, S) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{49 + 81 + 1}} = \frac{-2 - 15 - 12 + 6 - 12 - 5}{\sqrt{131}} = \frac{-40}{\sqrt{131}} u$$

Se normaliza.

c) Perpendicular común a r y a s

$$\Pi_1 = \begin{cases} P_r = (-3, 3, 1) \\ \vec{V}_r = (-2, 1, 5) \\ \vec{V}_r \times \vec{V}_s = (7, 9, 1) \end{cases}$$

$$\Pi_1: \begin{vmatrix} x+3 & y-3 & z-1 \\ 7 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$44(x+3) - 37(y-3) + 25(z-1) = 0$$

$$\Pi_1: 44x - 37y + 25z + 218 = 0$$

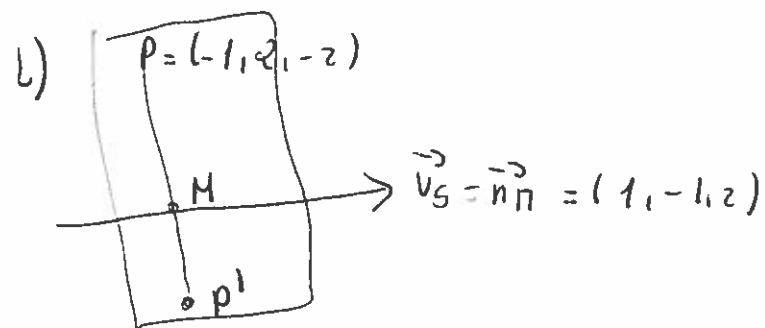
$$\Pi_2 = \begin{cases} P_s = (-4, 0, -5) \\ \vec{V}_s = (1, -1, 2) \\ \vec{V}_r \times \vec{V}_s = (7, 9, 1) \end{cases}$$

$$\Pi_2: \begin{vmatrix} x+4 & y & z+5 \\ 7 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-19(x+4) + 13y + 16(z+5) = 0$$

$$\Pi_2: -19x + 13y + 16z + 4 = 0$$

$$\text{La perpendicular común } \begin{cases} 44x - 37y + 25z + 218 = 0 \\ -19x + 13y + 16z + 4 = 0 \end{cases}$$



Calculamos el plano $\Pi \perp$ a S y que pasa por P

$$\Pi: x - y + 2z + 0 = 0$$

$$-1 - 2 - 4 + 0 = 0 \quad n = 7$$

$$\Pi: x - y + 2z + 7 = 0$$

$$S \equiv \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Calculamos $M = S \cap \Pi$

$$(-4 + t) + t + 2(-5 + 2t) + 7 = 0$$

$$-4 + t + t - 10 + 4t + 7 = 0$$

$$6t - 7 = 0 \quad t = 7/6$$

$$M = \left(-\frac{17}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{8}{3} \right)$$

$$M = \frac{P + P'}{2}$$

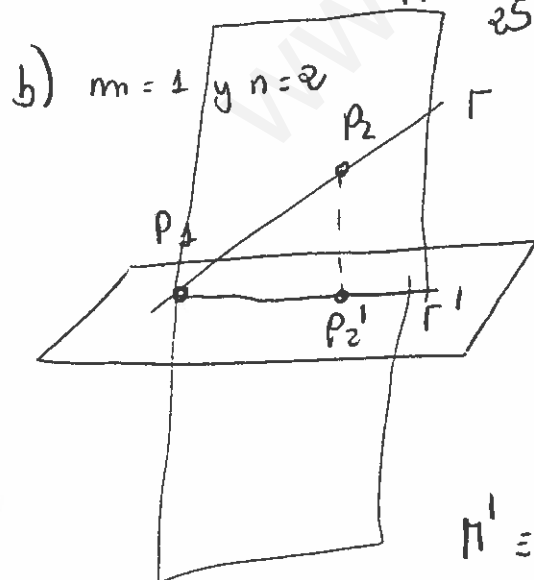
$$P' = 2M - P = \left(\frac{17}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{16}{3} \right) - (-1, 2, -2) = \left(\frac{14}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{10}{3} \right)$$

2) $P_r = (-3, 2, -3)$ $\vec{n}_\Pi = (2, 1, m)$ $\Pi: 2x + y - \frac{4}{5}z - n = 0$
 $\vec{v}_r = (0, -4, 5)$ $\vec{n}_\Pi = (2, 1, -4/5)$

a) r y Π son // si $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\Pi = 0$ $-6 + 2 - 5m = 0 \quad m = 4/5$

Si $m = 4/5$ r y Π son paralelos para cualquier valor de n

$$d(P_r, \Pi) = \frac{|-6 + 2 - \frac{12}{5}n|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + \frac{16}{25}}} = \frac{|-30 + 10 - 12 \cdot 5n|}{\sqrt{100 + 25 + 16}} = \frac{|5n - 32|}{\sqrt{141}}$$



1º Calculamos la intersección de r y Π

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4x \\ z = 3 + 5x \end{cases} \quad \Pi: 2x + y + z - 2 = 0$$

$$-6 + 2 - 4x - 3 + 5x - 2 = 0$$

$$x = 9$$

Plano $\perp$ a Π que contiene a r

$$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z+3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 10y + 18z - 23 = 0$$

$$\Gamma = \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -4x + 16y + 8z = 23 \end{cases}$$

la recta proyección ortogonal es la $\cap$ de Π y Π'

m(3)

$$c) \Gamma = \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases} \quad \Pi: 2x + y + z - 2 = 0 \quad \begin{aligned} P_1 &= (2\sqrt{6} + 6, -2\sqrt{6} - 34, 42 + 10\sqrt{6}) \\ P_2 &= (-2\sqrt{6} + 6, +2\sqrt{6} - 34, 42 - 10\sqrt{6}) \end{aligned}$$

$$\frac{|2(-3) + 2 - 4\lambda + -3 + 5\lambda - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = 2$$

$$|-6 + 2 - 4\lambda - 3 + 5\lambda - 2| = 2\sqrt{6} \quad |\lambda - 9| = 2\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2\sqrt{6} + 9 \\ \lambda = -2\sqrt{6} + 9 \end{cases}$$

$$3) a) C = \frac{A+B}{2} = (1, 3, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-4, 3, 1) \quad r = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z)^2 = 26$$

$$b) -4x + 3y + z + 10 = 0$$

$$-4x + 3y + z - 21 = 0$$

$$-20 + 0 - 1 + 10 = 0$$

$$4) \begin{vmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{vmatrix} = (k^2 + 2k + 1)k + 6k + 6k - (k^3 + k^2 + 4k + 4k + 4) = k^2 - 4 \quad k = \pm 2$$

a) Caso 1 Si $k \neq \pm 2$ $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado, (Solución única)

Caso 2 $k = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < n^o$ incógnitas, aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado

Caso 3 Si $k = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A') = 3$
~~Sistema incompatible~~
Sistema compatible indeterminado

1) Para $k = 2$

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \frac{1 - 3\lambda + 3 + 3\lambda}{2} = 2 \end{cases}$$

Si $k \neq \pm 2$ 3 planos que se cortan en 1 punto

Si $k = \pm 2$ 2 planos coincidentes y 1 que los corta

Si $k = -2$ 3 planos que se cortan en una recta