

1°.-Dados los puntos $A(3,1,4)$, $B(2,1,3)$ y $C(1,1,9)$, calcular:

- El área del triángulo $\triangle ABC$:
- La altura sobre el lado \overline{AB}
- La longitud de la mediana que pasa por el vértice C

Solución:

a)

$$\overline{BA} = [1, 0, 1] \quad \text{y} \quad \overline{BC} = [-1, 0, 6]$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |[0, -7, 0]| = \frac{7}{2} \text{ unid. de a.}$$

b) Sea "h" la altura sobre el lado \overline{AB} :

$$A = \frac{\text{base} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{2A}{\text{base}} = \frac{7}{|[-1, 0, -1]|} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ uni. de long.}$$

c) La mediana que pasa por C va de dicho vértice a la mitad del lado \overline{AB} , es decir al punto $C' = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{7}{2}\right)$, luego mide:

$$d_{CC'} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-11}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{2}} = \frac{\sqrt{130}}{2} \text{ uni. de long.}$$

2°.-Encontrar los puntos de la recta $\begin{cases} x+3y-z+7=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases}$ que distan $\sqrt{17}$ unidades de longitud del origen

Solución:

$$\begin{cases} x+3y-z+7=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{vector director } [1, -2, -5] \\ \text{Punto: } (-4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}$$

luego los puntos de esa recta tiene la forma:

$$(-4 + \lambda, -1 - 2\lambda, -5\lambda)$$

y el vector que une cualquier punto de la recta con el origen es:

$$[-4 + \lambda, -1 - 2\lambda, -5\lambda]$$

$$\text{luego} \quad \|[-4 + \lambda, -1 - 2\lambda, -5\lambda]\| = \sqrt{17}$$

que resolviendo nos permite encontrar dos valores de $\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{15}{2} \end{cases}$, luego los puntos

buscados son $(-4, -1, 0)$ y $\left(\frac{7}{2}, -16, \frac{-75}{2}\right)$

3°.-Calcular el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$

Solución:

Los tres puntos dados y el centro tiene que estar en el mismo plano, es decir en :

$$\text{plano} \begin{cases} \overline{AB} = [-1, 1, 0] \\ \overline{AC} = [-1, 0, 1] \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Luego todos los puntos de plano tiene la forma:

$$(1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$$

El centro M de la circunferencia equidista de los tres puntos A, B y C :

$$d_{M,A}^2 = (-\lambda - \mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2$$

$$d_{M,B}^2 = (1 - \lambda - \mu)^2 + (\lambda - 1)^2 + \mu^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2 - 4\lambda - 2\mu + 2$$

$$d_{M,C}^2 = (1 - \lambda - \mu)^2 + \lambda^2 + (\mu - 1)^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2 - 2\lambda - 4\mu + 2$$

igualando dos a dos y simplificando:

$$\begin{cases} 4\lambda + 2\mu = 2 \\ 2\lambda + 4\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Luego el centro de la circunferencia es: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$