

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2013

Problema 1 Se supone que el consumo mensual de agua por habitante en una determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 300 litros. Tomamos una muestra de 100 habitantes y nos aporta un consumo medio mensual de 1000 litros.

1. Calcula la distribución de la media muestral.
2. Calcula la probabilidad de que el consumo medio de la muestra esté entre 950 y 1090 litros.
3. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %.
4. Calcula el tamaño que debería tener la muestra si queremos que el tamaño del intervalo de confianza sea de 143 litros con una probabilidad del 94 %

Solución:

1. $\bar{X} \equiv N(1000; 30)$
2. $P(950 \leq \bar{X} \leq 1090) = P(-1,67 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -1,67) = P(Z \leq 3) - (1 - P(Z \leq 1,67)) = 0,9502$
- 3.

$$z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$I.C. = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (941,2, 1058,8)$$

- 4.

$$E = \frac{143}{2} = 71,5$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = 62,55$$

Luego $n = 63$

Problema 2 Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

1. Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.

- Obtener un seis en el primer y último lanzamiento y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

(Madrid 2010)

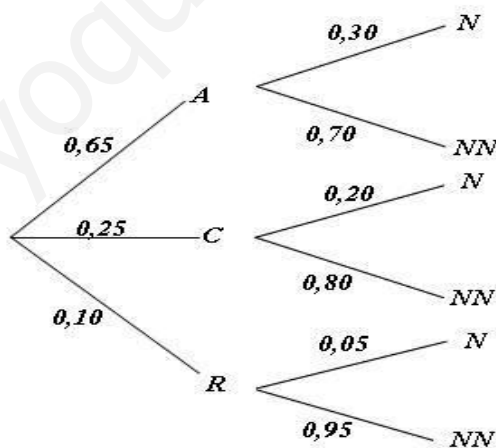
Solución:

- $P(\text{al menos un } 6) = 1 - P(\text{ningún } 6) = 1 - P(\overline{6}\overline{6}\overline{6}\overline{6}\overline{6}\overline{6}) = 1 - (5/6)^6 = 0,76$
- $P(6\overline{6}\overline{6}\overline{6}\overline{6}\overline{6}) = (1/6)^2(5/6)^4 = 0,01$

Problema 3 Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se debe a la ingesta de alcohol, el 25% se debe a la imprudencia del conductor, y el resto, a otras causas (fallo mecánico, etc.). En estos accidentes el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

- Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes no tenga resultado nefasto.
- Si se produce un accidente sin resultado nefasto, calcular la probabilidad de que la causa de dicho accidente sea la ingesta excesiva de alcohol.

Solución:



- $P(NN) = 0,65 \cdot 0,70 + 0,25 \cdot 0,80 + 0,10 \cdot 0,95 = 0,75$

-

$$P(A|NN) = \frac{P(NN|A) \cdot P(A)}{P(NN)} = \frac{0,7 \cdot 0,65}{0,75} = 0,6071$$

Problema 4 Una muestra aleatoria extraída de una población normal de varianza igual a 100, presenta una media muestral de 160. Sabiendo que el tamaño de la muestra es 144 se pide:

1. Calcular el intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional.
2. Calcular el intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional.
3. Si se quiere tener una confianza del 95 % de que un error máximo es 1,2 cm, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

Solución:

1. $N(\mu, 10)$, $\bar{x} = 160$, $n = 144$

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{Nivel de confianza} = 95\% \implies z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\text{Varianza} = 100 \implies \sigma = 10$$

$$IC = \left(160 - 1,96 \frac{10}{\sqrt{144}}, 160 + 1,96 \frac{10}{\sqrt{144}} \right) = (158,4; 161,6)$$

2. Nivel de confianza = 90 % $\implies z_{\alpha/2} = 1,645$

$$IC = \left(160 - 1,645 \frac{10}{\sqrt{144}}, 160 + 1,645 \frac{10}{\sqrt{144}} \right) = (158,6; 161,4)$$

3. Error: $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$1,2 = 1,96 \frac{10}{\sqrt{n}} \implies n = 266,8$$

El tamaño muestral tiene que ser superior o igual a 267 para conseguir un error que no supere 1,2. Habría que tomar $267-144=123$ observaciones adicionales.