SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2x2

Llamamos sistema no lineal a un sistema de ecuaciones en el que una o ambas de las ecuaciones que forman el sistema es una ecuación no lineal, es decir, cuando alguna de las incógnitas que forman parte de la ecuación no son de primer grado. Por tanto en este tipo de sistemas nos podemos encontrar ecuaciones polinómicas de segundo grado, raíces, logaritmos, exponenciales, trigonométricas,....

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y=1 \\ 3x+y^2=3 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{r} \sqrt{xy}+2=x+1 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{r} \log x+\log y=\log 2 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\}$$

Muchos de estos sistemas se resolverán habitualmente por sustitución, aunque en algunos casos puede ocurrir que no sea la forma más sencilla y utilizaremos reducción, igualación o métodos numéricos. Puede ocurrir que el sistema tenga una solución, varias o ninguna solución. Se puede comprobar que el resultado analítico concuerda con la aproximación gráfica.

También es recomendable, en la medida de lo posible, interpretar geométricamente las ecuaciones del sistema, para hacerse una idea aproximada de la situación de las soluciones, si las hay. Por ejemplo si una de las ecuaciones representa a una circunferencia y la otra a una recta se podrían dar tres situaciones:

- Que no exista ninguna solución: La recta no corta la circunferencia
- Que sólo exista una solución: La recta es tangente a la circunferencia
- Que existan dos soluciones: La recta corta dos veces la circunferencia

CASO 1 Si una de las ecuaciones es lineal y la otra no lineal: en este caso utilizaremos siempre el método de sustitución

- Despejamos una de las incógnitas en la ecuación lineal (la más fácil)
- Sustituimos esta incógnita en la otra ecuación
- Se resuelve la ecuación resultante, que puede ser de primer grado, de segundo, bicuadrada, etc...
- Se obtienen las soluciones para la otra incógnita

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \boxed{x=y-3} \\ \rightarrow \textit{sustitución} \end{array}$$

$$(y-3)^2+y^2=5 \rightarrow y^2+9-6y+y^2-5=0$$

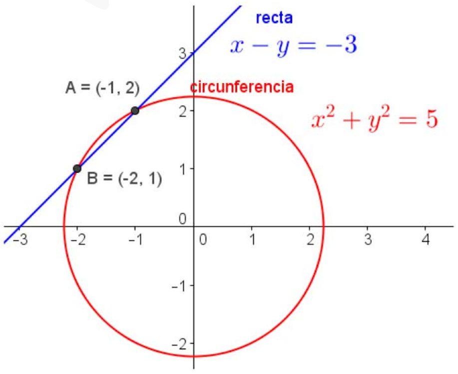
$$2y^2-6y+4=0 \rightarrow y^2-3y+2=0$$

$$y=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\left\langle \begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=1 \end{array}\right.$$

$$Si \quad y_1=2 \quad entonces \quad x_1=-1 \rightarrow (-1,2)$$

$$Si \quad y_2=1 \quad entonces \quad x_2=-2 \rightarrow (-2,1)$$

Interpretación geométrica



CASO 2: Si ambas ecuaciones son no lineales y ambas incógnitas son de segundo grado o en ambas ecuaciones la incógnita de segundo grado es la misma, podemos utilizar reducción.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=41 \\ x^2-y^2=9 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x^2+\cancel{y^2}=41 \\ x^2-\cancel{y^2}=9 \\ \hline 2x^2=50 \end{array}$$

$$x^2=25 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1=+5 \\ x_2=-5 \end{array}\right.$$

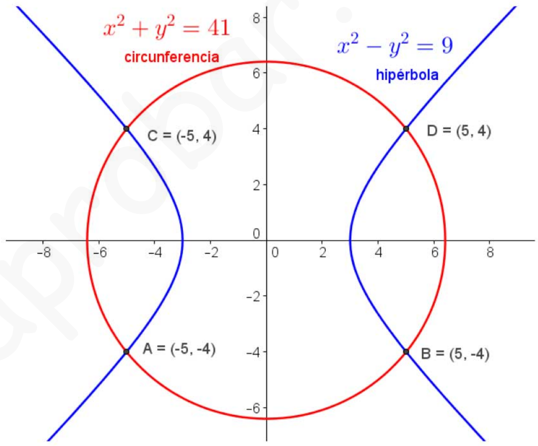
$$Si \quad x_1=+5 \quad entonces$$

$$(+5)^2-y^2=9 \rightarrow y=16 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y_1=+4 \rightarrow (5,4) \\ y_2=-4 \rightarrow (5,-4) \end{array}\right.$$

$$Si \quad x_1=-5 \quad entonces$$

$$(-5)^2-y^2=9 \rightarrow y=16 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y_1=+4 \rightarrow (-5,4) \\ y_2=-4 \rightarrow (-5,-4) \end{array}\right.$$

Interpretación geométrica



CASO 3: Si una de las ecuaciones es lineal y la otra es irracional (una o ambas incógnitas están afectadas por el signo radical): en este caso podemos utilizar igualación.

$$\left.\begin{array}{r} 2\sqrt{x+1}=y+1 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=2\sqrt{x+1}-1 \\ \rightarrow y=\dfrac{2x-1}{3} \end{array}$$

$$2\sqrt{x+1}-1=\frac{2x-1}{3} \rightarrow \left(6\sqrt{x+1}\right)^2=(2x+2)^2$$

$$36(x+1)=4x^2+4+8x \rightarrow -4x^2+28x+32=0$$

$$x^2-7x-8=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{7\pm9}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=8 \\ x_2=-1 \end{array}\right.$$

$$Si \quad x_1=8 \quad entonces \quad y_1=5 \rightarrow (8,5)$$

$$Si \quad x_2=-1 \quad entonces \quad y_2=-1 \rightarrow (-1,-1)$$

Interpretación geométrica