Inecuaciones racionales, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \;\; ; \;\; (\textit{el signo también puede ser } <, \leq \text{ ó } \geq)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

El método de resolución es semejante al descrito para inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2 con las siguientes observaciones:

MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Se pasan todos los términos al primer miembro
- Realizamos las operaciones que aparecen SIN eliminar los denominadores, obteniendo una sola fracción algebraica
- Descomponemos en factores de 1º y 2º grado tanto el numerador como el denominador
- Estudiamos el signo de cada factor para los valores positivos de x. Esto significa resolver tantas inecuaciones de 1º o 2º grado como factores tengamos, utilizando siempre el signo ≥ 0 para los factores del numerador y el signo >0 para los factores del denominador
- Creamos una "tabla de signos" de manera que podamos estudiar el signo del cociente
- Resaltamos (con trazo grueso, rayado o de otro color) los intervalos en los que se verifica la inecuación propuesta, fijándonos en los signos del cociente. Si el signo de la inecuación propuesta es $\leq$ ó $\geq$ incluiremos los extremos que corresponden solo al numerador.

Ejemplo

Resolver: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{x}{x-1}>-\dfrac{2}{x-1}$

$$\frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-1}>0$$

$$\frac{3(x-1)+2x+4}{2(x-1)}>0$$

$$\frac{3x-3+2x+4}{2(x-1)}>0$$

$$\boxed{\frac{5x+1}{2(x-1)}>0}$$

$$\overbrace{5x+1\geq 0}^{N\geq 0} \;\Big|\; \overbrace{x-1>0}^{D>0}$$

$$5x\geq -1 \;\Big|\; \boxed{x>1}$$

$$\boxed{x\geq -1/5}$$

$$\therefore\; S=\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$$

Tabla de signos

	$-\frac{1}{5}$		1	
$(5x+1)$	−	+		+
$(x-1)$	−	−		+
cociente	+	−		+
inecuación				

Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los positivos

$$(x-1)\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq 1$$

Observa que el signo que utilizamos para resolver las inecuaciones del denominador siempre es >0 (debemos descartar los valores que anulan el denominador).

Ejemplo

Resolver: $\dfrac{1}{x}\leq 1 \;\rightarrow\; \dfrac{1-x}{x}\leq 0$

$$\overbrace{1-x\geq 0}^{N\geq 0} \;\Big|\; \overbrace{\boxed{x>0}}^{D>0}$$

$$\boxed{x\leq 1}$$

$$\therefore\; S=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$

	0	1	
$(1-x)$	+	+	−
x	−	+	+
cociente	−	+	−
inecuación			

Ejemplo

Resolver $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}\leq 0$

Nota: $(x-4)\neq 0 \rightarrow x\neq 4$

$$\overbrace{x-2\geq 0 \;\Big|\; x+1\geq 0}^{N\geq 0} \;\Big\|\; \overbrace{x-4>0}^{D>0}$$

$$\boxed{x\geq 2} \;\Big|\; \boxed{x\geq -1} \;\Big\|\; \boxed{x>4}$$

$$\therefore\; S=(-\infty,-1]\cup[2,4)$$

Tabla de signos

	−1	2	4	
$(x-2)$	−	−	+	+
$(x+1)$	−	+	+	+
$(x-4)$	−	−	−	+
cociente	−	+	−	+
inecuación				

Fijándonos en el signo de la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero

Ejemplo

Resolver la inecuación $\dfrac{3x^3-7x^2-22x+8}{-5x^4-3x^3+47x^2+27x-18}\leq 0$

1.- Factorizamos numerador y denominador por Ruffini

$$\frac{(3x-1)(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-3)(2-5x)(x+1)}\leq 0$$

2.- Estudiamos el signo de cada uno de los factores:

$$\overbrace{3x-1\geq 0 \;|\; x+2\geq 0 \;|\; x-4\geq 0}^{N\geq 0}$$

$$3x\geq 1 \;|\; \boxed{x\geq -2} \;|\; \boxed{x\geq 4}$$

$$\boxed{x\geq \frac{1}{3}}$$

$$\overbrace{x+3>0 \;|\; x-3>0 \;|\; 2-5x>0 \;|\; x+1>0}^{D>0}$$

$$\boxed{x>-3} \;|\; \boxed{x>3} \;|\; -5x>-2 \;|\; \boxed{x>-1}$$

$$5x<2$$

$$\boxed{x<\frac{2}{5}}$$

3.- Construimos la tabla de signos

4.- Señalamos la solución de la inecuación

$$\therefore\; S=(-3,-2]\cup\left(-1,\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{2}{5},3\right)\cup[4,\infty)$$

Fijándonos en el signo de la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero.

Tabla de signos

	−3	−2	−1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	3	4	
$3x-1$	−	−	−	−	+	+	+	+
$x+2$	−	−	+	+	+	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	−	−	+
$x+3$	−	+	+	+	+	+	+	+
$x-3$	−	−	−	−	−	−	+	+
$2-5x$	+	+	+	+	+	−	−	−
$x+1$	−	−	−	+	+	+	+	+
cociente	+	−	+	−	+	−	+	−
inecuación								