## Inecuaciones polinómicas factorizables, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$P(x) > 0$ ; (*el signo también puede ser* $<, \le$ *ó* $\ge$)

El polinomino $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ , con $a_n \neq 0$ y grado $n$, toma valores del mismo signo en cada uno de los intervalos:

$$(-\infty, x_1)\ ;\ (x_1, x_2)\ ;\ (x_2, x_3)\ ;\ \cdots\ ;\ (x_n, \infty)$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son sus raíces, ordenadas de forma creciente

### MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Se pasan todos los términos al primer miembro
- Descomponemos en factores de 1º y 2º grado el polinomio dado
- Estudiamos el signo de cada factor para los valores positivos de $x$ . Esto significa resolver tantas inecuaciones de 1º o 2º grado como factores tengamos, utilizando para resolverlas siempre el signo $\ge 0$ (esto se expresa colocando un "$+$" en los intervalos solución de cada inecuación dentro de la "tabla de signos", y un "$-$" en el resto de intervalos).
- Creamos una "tabla de signos":
  - Colocamos, en orden creciente, los valores solución de cada inecuación correspondiente a cada factor
  - Escribimos "$+$" donde sí se verifica cada inecuación
  - Escribimos "$-$" en el resto de intervalos
  - Aplicamos la regla de los signos de la multiplicación para averiguar el signo del producto de los factores
- Resaltamos (con trazo grueso, rayado o de otro color) los intervalos en los que se verifica la inecuación propuesta, fijándonos en los signos del producto. Si el signo de la inecuación propuesta es $\le$ *ó* $\ge$ incluiremos los extremos.

*Ejemplo*

Resolver: $x^3 - x^2 - 6x < 0$

$\rightarrow x(x^2 - x - 6) < 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ -2 & & -2 & +6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\rightarrow \boxed{x(x+2)(x-3) < 0}$

$\boxed{x \ge 0}$ | $x+2 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -2}$ | $x-3 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge 3}$

Tabla de signos

| | $-2$ | | $0$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | | $+$ | $+$ | | $+$ |
| $(x-3)$ | $-$ | | $-$ | $-$ | | $+$ |
| producto | $-$ | | $+$ | $-$ | | $+$ |
| inecuación | | | | | | |

*Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos*

$\therefore\ S = (-\infty, -2) \cup (0, 3)$

$S = \{x / x < -2\ \vee\ 0 < x < 3\}$

*Ejemplo*

Resolver: $(4 - x^2)(x+5) \le 0$

$\rightarrow \boxed{(2+x)(2-x)(x+5) \le 0}$

$2+x \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -2}$ | $2-x \ge 0$ ; $-x \ge -2$ ; $\boxed{x \le 2}$ | $x+5 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -5}$

Tabla de signos

| | $-5$ | $-2$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(2+x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(2-x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $(x+5)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| producto | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| inecuación | | | | |

$\therefore\ S = [-5, -2] \cup [2, +\infty)$

$S = \{x / -5 \le x \le -2\ \vee\ x \ge 2\}$

Observa que resolvemos siempre para los valores positivos $\ge 0$

*Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos o iguales a cero*

*Ejemplo*

Resolver:

$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \le 0$

1.- Factorizamos toda la expresión

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$(x^3 - 3x^2) = x^2(x-3)$

$(4 - x^2) = -(x-2)(x+2)$

$\boxed{x^2(x-1)(x-2)^2(x+2)(x-3) \ge 0}$

*Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los positivos o iguales a cero*

2.- Estudiamos el signo de cada factor

$x-1 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge 1}$ | $x+2 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -2}$ | $x-3 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge 3}$

Tabla de signos

| | $-2$ | $1$ | $3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| producto | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| inecuación | | | $2$ | |

$\therefore\ S = [-2, 1] \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$

$S = \{x / -2 \le x \le 1\ \vee\ x = 2 \vee x \ge 3\}$

Observa que no tenemos en cuenta los factores cuadrados, en la tabla de signos, por ser siempre positivos.

*Ejemplo*

Resolver:

$(x+14)(8-x)(5+x) > 0$

$x+14 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -14}$ | $8-x \ge 0$ ; $-x \ge -8$ ; $\boxed{x \le 8}$ | $5+x \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -5}$

Tabla de signos

| | $-14$ | $-5$ | $8$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(x+14)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(8-x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $(5+x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| producto | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| inecuación | | | | |

$\therefore\ S = (-\infty, -14) \cup (-5, 8)$

$S = \{x / x < -14\ \vee\ -5 < x < 8\}$

*Ejemplo*

Resolver:

$(1 - x^2)(x^2 - 9) \le 0$

$(1+x)(1-x)(x+3)(x-3) \le 0$

$1+x \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -1}$ | $1-x \ge 0$ ; $-x \ge -1$ ; $\boxed{x \le 1}$ | $x+3 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge -3}$ | $x-3 \ge 0$ ; $\boxed{x \ge 3}$

Tabla de signos

| | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| producto | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| Inecuación | | | | | |

$\therefore\ S = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$

$S = \{x / x \le -3\ \vee\ -1 \le x \le 1\ \vee\ x \ge 3\}$