Inecuaciones polinómicas de 2º grado, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$ax^2+bx+c>0 \quad ; \quad con\ a\neq 0$$

$$(el\ signo\ también\ puede\ ser\ <, \leq\ ó\ \geq)$$

1º MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Resolvemos la ecuación de 2º grado
- Situamos las soluciones sobre la recta real
- Estudiamos el signo en cada uno de los intervalos
  - Con dos soluciones reales: tendrá el mismo signo que a en los intervalos externos y contrario en el interno
  - Con una solución doble o ninguna solución: tendrá el mismo signo que a en toda la recta.

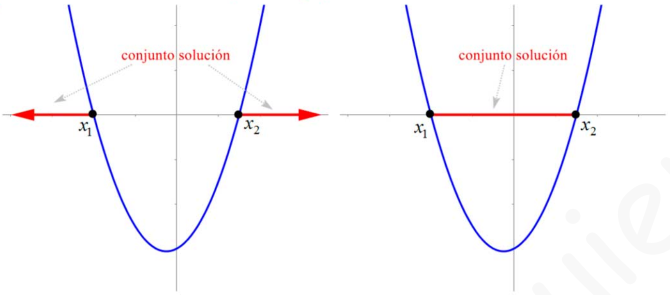
2º MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Resolvemos la ecuación de 2º grado
- Situamos las soluciones sobre la recta real
- Tomamos un "valor x cualquiera" en cada uno de los intervalos y averiguamos el signo de la expresión en dichos intervalos.

3º MÉTODO DE RESOLUCIÓN

- Descomponiendo en factores: utilizamos el método de la "tabla de signos" que veremos a continuación para inecuaciones polinómicas de grado mayor a 2

En todos los métodos, la solución de la inecuación cuadrática será el/los intervalos que verifiquen la inecuación dada.



Si $b^2-4ac>0$, entonces $ax^2+bx+c=0$ tiene dos raíces reales y la recta queda dividida en 3 intervalos

Ejemplo

Resolver: $x^2-2x-15\leq 0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$x_1=\frac{2+8}{2}=5 \quad ; \quad x_2=\frac{2-8}{2}=-3$$

$$\therefore\ S=[-3,5] \ ;\ S=\{x/-3\leq x\leq 5\}$$

Ejemplo

Resolver $x^2+6x+8\geq 0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$x_1=\frac{-6+2}{2}=-2\,;x_2=\frac{-6-2}{2}=-4$$

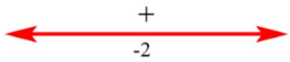
$$\therefore\ S=(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty)$$

$$S=\{x/x\leq -4\vee x\geq -2\}$$

Si $b^2-4ac=0$, entonces $ax^2+bx+c=0$ tiene una única raíz real (doble): $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

Ejemplo

Resolver: $x^2+4x+4\geq 0$



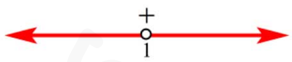
$(x+2)(x+2)\geq 0$

$\therefore\ S=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4\pm 0}{2}=-2$$

Ejemplo

Resolver: $x^2-2x+1>0$



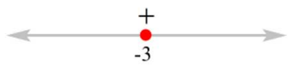
$(x-1)(x-1)>0$

$\therefore\ S=\mathbb{R}-\{1\}$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=1$$

Ejemplo

Resolver: $x^2+6x+9\leq 0$



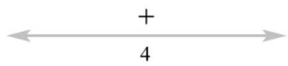
$(x+3)(x+3)\leq 0$

$\therefore\ S=\{-3\}\ ;\ x=-3$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{-6\pm 0}{2}=-3$$

Ejemplo

Resolver: $x^2-8x+16<0$



$(x-4)(x-4)\leq 0$

$\therefore\ S=\varnothing$

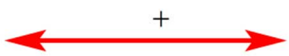
(no existe solución)

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8\pm 0}{2}=4$$

Si $b^2-4ac<0$, entonces $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíz real alguna, es decir, $ax^2+bx+c\neq 0$

Ejemplo

Resolver: $x^2-5x+10>0$



$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-40}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-15}}{2}$$

(sin solución real)

$\therefore\ S=\mathbb{R}$

La cuadrática siempre es positiva y el conjunto solución es $\mathbb{R}$

Ejemplo

Resolver: $-x^2+4x-5>0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

(sin solución real)

$\therefore\ S=\varnothing$ (no existe solución)

La cuadrática nunca es positiva y el conjunto solución es $\varnothing$