Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad matemática que presenta al menos una variable en alguno de sus miembros, por eso también se le conoce como desigualdad algebraica.

Los signos de desigualdad son: $<, \leq, >, \geq$

Los signos: $<$ y $>$ o $\leq$ y $\geq$ son de sentido contrario.

Una desigualdad es doble cuando aparecen dos signos de desigualdad en la misma expresión: $a<b<c$

Resolver una inecuación con una incógnita, digamos x, quiere decir hallar los números reales x para los cuales la desigualdad se cumple. Llamamos **conjunto solución** al conjunto de tales x, ya que habitualmente son infinitas soluciones, que se agrupan en intervalos de $\mathbb{R}$. Es decir, la solución se expresa como un subconjunto, un intervalo o gráficamente.

Las inecuaciones se clasifican:

- Por el **número de incógnitas** que contienen
  - — Inecuaciones con una incógnita
  - — Inecuaciones con más de una incógnita
- Por su **grado y operaciones** que aparecen en la expresión
  - — Polinómicas (de 1º grado, de 2º grado, etc…)
  - — Con incógnitas en el denominador (racionales)
  - — Con incógnitas debajo del signo radical (irracionales)
  - — Dobles (con dos signos de desigualdad)
  - — Modulares o de Valor absoluto
  - — Con Logaritmos, Exponenciales, …

— Varias inecuaciones, consideradas a la vez, forman un sistema de inecuaciones, lineales o no

Resolver un sistema de inecuaciones es encontrar las soluciones comunes a todas ellas (intersección).

Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo dominio de la incógnita y el mismo conjunto solución.

Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita y, para ello, hay que tener en cuenta las siguientes **propiedades**:

1) $A<B \iff A+n<B+n$ $\quad$ *también* $A-n<B-n$
2) $A<B \iff A\cdot n<B\cdot n,\ si\ n>0$ $\quad$ *también* $A/n<B/n,\ si\ n\neq 0$
3) $A<B \iff A\cdot n>B\cdot n,\ si\ n<0$ $\quad$ *también* $A/n>B/n,\ si\ n\neq 0$

Observa que, si se multiplica por un número negativo, debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

La notación $\{x:\ \ldots\ \}$ o $\{x/\ \ \ldots\ \}$ representa el conjunto de todos los números x tales que $\ldots$ es verdad. Esta notación también puede sustituirse por intervalos, utilizando los ya conocidos paréntesis para intervalos abiertos, corchetes para intervalos cerrados o combinados para semiabierto.

Gráficamente, el punto "lleno" indica que el punto pertenece al conjunto solución, y el punto "vacío" que no pertenece.
Según la notación utilizada, significan lo mismo:

- — Los **paréntesis**, los signos **<** o **>** y el punto "**vacío**"
- — Los **corchetes**, los signos **≤** o **≥** y el punto "**lleno**"

Si la inecuación presenta el signo **<** o **>**, se denomina inecuación de **sentido estricto**, porque no incluye a sus extremos. Si el signo es **≤** o **≥** se llama inecuación en sentido amplio o **no estricto**, porque sí incluye a sus extremos.

Observación: si necesitamos cambiar el signo de toda la inecuación estaremos multiplicando por (-1) y por tanto es necesario invertir el sentido de la desigualdad.

Inecuaciones polinómicas de 1º grado, con una incógnita

Estas inecuaciones, se pueden llegar a escribir de la forma:

$$ax+b>0\ ,\ \ con\ a\neq 0$$
$$(el\ signo\ también\ puede\ ser\ \ <, \leq\ \ ó\ \geq)$$

Método de resolución

Se resuelven de manera semejante a las ecuaciones:

- — Eliminar denominadores (se multiplican los dos miembros por el mcm de los denominadores)
- — Operar paréntesis (se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma)
- — Agrupan términos semejantes
- — Despejar la incógnita

Ejemplo

Resolver la inecuación: $(x-1)(x+2)<x^2+3$

$x^2+2x-x-2<x^2+3$

$\boxed{x<5}$

$\therefore\ \ S=\{x:x<5\}=(-\infty,5)$

Ejemplo

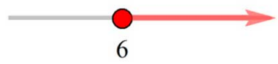
Resolver la inecuación: $\dfrac{7}{12}-\dfrac{5(x-2)}{6}\leq\dfrac{1}{4}-\dfrac{3(x-2)}{4}$

$mcm(4,6,12)=12$

$7-10(x-2)\leq 3-9(x-2)$

$7-10x+20\leq 3-9x+18$

$-x\leq -6\ \ \rightarrow\ \ \boxed{x\geq 6}$



$\therefore\ \ S=\{x:x\geq 6\}=[6,+\infty)$

Ejemplo

Resolver la inecuación: $\dfrac{5(3-x)}{6}-\dfrac{x-4}{2}\geq\dfrac{2x-3}{3}-x$

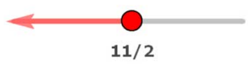
$mcm(6,2,3)=6$

$5(3-x)-3(x-4)\geq 2(2x-3)-6x$

$15-5x-3x+12\geq 4x-6-6x$

$-6x\geq -33$

$6x\leq 33\ \ \rightarrow\ \ \boxed{x\leq 11/2}$



$\therefore\ \ S=\{x:x\leq 11/2\}=(-\infty,11/2]$

Ejemplo

Resolver la inecuación: $x-3(x-1)<-2x+5$

$x-3x+3<-2x+5$

$3<5\ \ (verdadero)$

$\therefore\ \ S=\mathbb{R}\ \ (toda\ la\ recta\ real)$

Ejemplo

Resolver la inecuación: $(x-3)(x+2)-(x^2-x+8)>0$

$x^2+2x-3x-6-x^2+x-8>0$

$-14>0\ \ (falso)$

$\therefore\ \ S=\varnothing\rightarrow\ (no\ tiene\ solución)$