YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES

LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD Y ASÍNTOTAS

CONTINUIDAD

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto. En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua.

Este hecho conduce a los siguientes tipos de discontinuidades:

1) Evitable: La función no existe en x=a, o no coincide con el límite, pero dicho límite existe y es finito.

2) De salto finito: Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden.

3) De salto infinito: Un límite lateral es finito y el otro infinito o los dos límites laterales son infinitos.

Reglas para estudiar la continuidad de las funciones más habituales:

1.- La suma, resta o producto de funciones continuas es también una función continua.

2.- Las funciones polinómicas son continuas en todo **R**.

3.- Una función racional es discontinua en los x que anulan el denominador h(x) (pues entonces no existirá imagen)

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

4.- Función irracional. es continua en los x tales que $g(x)\geq 0$ (pues, en caso contrario, no existirá imagen. Si el índice es impar, sería continua en todo **R**.

$$f(x)=\sqrt[par]{g(x)}$$

5.- Función logarítmica: es continua en los x tales que g(x)>0.

6.- Sen x, cos x y a^x son continuas en todo **R**.

DERIVABILIDAD

Una función es derivable en un punto x=a si en dicho punto existe la derivada f'(a). Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Para que una función sea derivable en un punto, ha de ser contínua en dicho punto.

Para estudiar la derivabilidad de una función a trozos, veamos un ejemplo:

Estudia la derivabilidad de la función siguiente en el punto de abscisa x = 1.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x<1 \\ -2lnx+1 & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-2lnx+1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x^2+2)=1$$

$$f(1)=-2ln1+1=1$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, f es continua en x = 1.

Derivabilidad: Se deriva la función f trozo a trozo:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{x} & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

Como ambas coinciden y la función es continua, f es derivable en x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} -2x=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x}=-2$$

ASÍNTOTAS

Una asíntota es una recta tangente a la función en el infinito, o dicho de otra forma, la asíntota se va aproximando tanto como queramos a la gráfica de la función, pero nunca llega a tocarla.

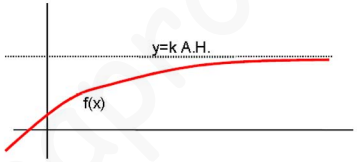
Existen tres tipos de asíntotas: horizontales (A.H.), verticales (A.V.) Y oblicuas (A.O.). Veamos cómo se calculan:

a) A.H.:

$$\boxed{\lim_{x\to \infty_{(-\infty)}} f(x)=k \Rightarrow y=k \text{ es A.H.}}$$

se calcula mediante el siguiente límite:

Cómo máximo puede haber dos A.H. (una cuando $x\to\infty$ y otra cuando $x\to-\infty$, aunque normalmente es una sola. La función puede cortar a la asíntota horizontal.



b) A.V.5: se calcula mediante el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty_{(-\infty)} \Rightarrow x=a \text{ es A.V.}}$$

En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, aunque a veces hay excepciones. Puede haber una, ninguna o varias A.V. La gráfica nunca puede cortar a la A.V.

c) A.O.:

Una función no puede tener por el mismo lado a la vez A.H. y A.O.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty\,(0\,-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} \\ n=\lim\limits_{x\to\infty\,(0\,-\infty)} [f(x)-mx] \end{array}\right\} \Rightarrow y=mx+n \text{ es A.O.}}$$

Una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.

Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo.

www.yoquieroaprobar.es

YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES